確率計画法について (2)

1　確率計画法の一般的定式化

本章で取り扱う数理計画問題の何らかのパラメータはある確率分布に従う確率変数とする．その確率分布があらかじめ示されている場合, **確率計画法** (stochastic programming) とよばれる．

(確率計画問題プロトタイプ SP)

$$
\begin{array}{rl}
\text{“最小化”} & g_0(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \\
\text{“制約条件”} & g_i(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \leq 0, i = 1, \ldots, m \\
& \boldsymbol{x} \in X \subset \mathbb{R}^n
\end{array}
$$

問題 (SP) において, X および $g_i(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (i = 0, \ldots, m)$ は与えられているものとする．$\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ は N 次元確率変数ベクトルであり, そのとりうる値の集合を $\Xi(\subset \mathbb{R}^N)$ とする．集合 Ξ の部分集合の族 $\mathcal{F}$ と, $\mathcal{F}$ に含まれる個々の事象が発生する確率 P は与えられている．ゆえに, 全ての Ξ の部分集合 $A(A \subset \Xi)$ に対して, $A \in \mathcal{F}$ であり, $P(A)$ は既知である．すなわち, 確率空間 $(\Xi, \mathcal{F}, P)$ が与えられているものとする．確率空間に関しては, 付録**??**を参照されたい．決定変数 $\boldsymbol{x}$ が与えられたとき, 関数 $g_i(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) : \Xi \to \mathbb{R}$, $\forall x, \forall i$ はこれ自身確率変数となり, 確率 P は $\boldsymbol{x}$ に関し独立であると仮定する．

上の問題 (SP) においては, 目的関数, 制約条件に確率変数が含まれる．確率変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ のすべてのとりうる値に対して, 目的関数を最小化し, 同時に制約条件を満たす解 $\boldsymbol{x}$ が必ず存在するとはいえない．このように, “制約条件” を常に満足し, 目的関数を “最小化” する解が存在しない場合があるため, 問題 (SP) は明確に定義されたものであるとはいえない．したがって**等価確定問題** (deterministic equivalents) に考え直す必要があり, そのために各種のアプローチがとられる．

2　確率計画法におけるアプローチ方法

確率計画法に関するアプローチは, **即時決定** (here and now) とよばれるものと, **待機決定** (wait and see) とよばれるものに大別される．即時決定は, 確率変数の実現値を知る前に決定を下さなければならないアプローチであり, 確率計画法では主にこのアプローチを考える．このアプローチに含まれるリコースを有する確率計画問題は, 制約の満たされない場合の追加費用を重要視する．これに対し, 確率的制約条件を有する問題は, 制約が満たされる確率を問題にする．

リコースを有する確率計画問題 (stochastic programming with recourse) あるいは **2 段階確率計画問題** (two-stage stochastic programming)
: 制約に確率変数が含まれるとき, 制約を逸脱する度合に応じて罰金を与え, **リコース** (recourse) を含む目的関数を最小化する．リコースとは, 罰金に対する**償還請求** (recourse) を表す．

確率的制約条件問題 (chance constrained program)

制約条件の概念を拡張し, ある確率レベル (充足水準) で制約条件が満たされればよいとする**確率的制約条件** (chance constraint) を用いる.

本章ではこの 2 つの問題の考え方と, 問題の導出法について示す. **??**章ではリコースを有する確率計画問題, **??**章では, 確率的制約条件問題について考える. 従来, 確率的制約条件問題は**機会制約条件問題** (chance constrained program) と訳されることが多かったが, 本書では確率的制約条件問題とよぶ.

即時決定に対し, 待機決定は, 確率変数の実現値を知ってから確定的な数理計画問題を取り扱うというアプローチである. このアプローチは, 最適値の分布関数や, または平均値分散などの特性値を求める**分布問題** (distribution problem) との関連が深く, パラメトリック計画や, 安定性の理論とも密接に関連する. 分布問題については, 必ずしも確率計画法の範疇で捉えられていないが, 詳細は Prékopa [17] などに詳しい.

確率計画法は, 1950 年代の Danzig [7], Beale [2], Charnes–Cooper [5] などに起源を由来する. 1975 年までの文献は, Stancu-Minasian–Wets [21] を参照されたい. 確率計画法におけるアプローチの分類に関しては, Kall [12, 13] などの解説がある. 確率計画法全般に関する成書としては, 石井 [11], Wets [24], Kall–Wallace [15], Birge–Louveaux [4], 椎名 [20] などがあげられる. さらに発展的な内容を含むものとして, Prékopa [17], Ruszczyński–Shapiro [18], Kall–Mayer [14] などがある.

確率計画法の現実問題への応用に関しては, Wallace–Ziemba [22] 等に多くの適用例が示されている. 特に, 確率計画法の解法アルゴリズムに関しては, Ermoliev–Wets [8], Infanger [9], Birge [3], Mayer [16] 等を参照されたい.

最新の書籍としては次のものがある. Infanger [10] は, Dantzig [7] の功績を称えて確率計画法の専門家が分担して執筆した本であり, Shapiro–Dentcheva–Ruszczyński [19] は理論的側面に詳しい.

3 等価確定問題の導出

3.1 リコースを有する確率計画問題

確率変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ の実現値を $\boldsymbol{\xi}$ とし, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ の実現値 $\boldsymbol{\xi}$ が知られた段階で, (SP) の制約 $g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \leq 0 (i = 1,\ldots,m)$ を逸脱する度合を表す $g_i^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ を次のように定義する.

$$g_i^+(x,\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 0, & g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) < 0 \ \text{が成立する場合} \\ g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

このとき, $\boldsymbol{\xi}$ が得られた段階での **2 段階変数** (second stage variable) または, 制約が侵されたことに対する**リコース変数** (recourse variable) $y_i(\boldsymbol{\xi})(i = 1,\ldots,m)$ を各制約について考えることができる. $y_i(\boldsymbol{\xi})$ は制約が侵されたことに対する補償として, $g_i^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - y_i(\boldsymbol{\xi}) \leq 0$ となるように選ばれる. このように, 新たな変数を加えて制約の充足を図ることは, 余分な費用増加をもたらすものである. その制約の単位逸脱量あたりの罰金を q_i とすると, 次の**リコース費用** (recourse cost) $Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ が定義できる. また, リコース費用 $Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ は第 1 段階の決定が $\boldsymbol{x}$ であり, 確率変数の値が $\boldsymbol{\xi}$ である場合の**リコース関数** (recourse function) ともよばれる. この $Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ を求める問題を**リコース問題** (recourse problem) あるいは **2 段階問題** (two-stage problem) とよぶ.

(リコース問題)

$$Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \min\nolimits_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})} \left\{ \sum_{i=1}^{m} q_i y_i(\boldsymbol{\xi}) \mid y_i(\boldsymbol{\xi}) \geq g_i^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), i = 1,\ldots,m \right\}$$

問題 (SP) に元から含まれる変数 $\boldsymbol{x}$ を**1 段階変数** (first stage variable), 2 段階変数 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})$ を含まない実行可能解集合 X を**1 段階実行可能解集合** (first stage feasible set) とよぶ. 1 段階変数 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{\xi}$ を観測する前に決定され, $\boldsymbol{\xi}$ を観測した後に 2 段階変数 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})$ を決定するということに注意されたい.

問題 (SP) および (リコース問題) の両者を考えると, 総費用 $f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ は, $\boldsymbol{\xi}$ が得られる前に決定 $\boldsymbol{x}$ を行った**1 段階費用** (first stage cost) $g_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ と, リコース費用 $Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ との総和となる.

$$f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = g_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) + Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$$

また, リコース問題の代わりに, 一般化された次の線形リコース問題を考えることができる. ここでは, $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})$ を $\overline{n}$ 次元の 2 段階変数ベクトルと定義し, $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^{\overline{n}}$ は $Y \subset \mathbb{R}^{\overline{n}}$ (ただし Y は $\{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$ のような多面体) に制限されるものとする. W を任意の $m \times \overline{n}$ 定数行列とする. この行列 W を**リコース行列** (recourse matrix) とよぶ.

(線形リコース問題)
$Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \min_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})}\{\boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \mid W\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \geq \boldsymbol{g}^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \in Y\}$

この線形リコース問題で $\overline{n} = m$ のとき, $W = I(m \times m$ 単位行列) とすると, 前述のリコース問題が得られる. たとえば, m 品種の生産計画問題を考えるとき, $g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ は品種 i の不足量 (需要量–供給量) を表すと考えることができる. そのとき, $g_i^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) > 0$ は品種 i の供給不足を表す. したがってリコース問題は, 供給不足が起きた時点での 2 段階問題または緊急購入費用を最小化する計画問題と解釈できる. 意思決定者としては, 全費用 (生産費用と緊急購入費用の和) の期待値を最小化することを求めればよく, その問題が等価確定問題となる. この線形リコース問題から, 次の一般化されたリコース問題へと一般化することができる. 次に, $\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})), H_i(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}))$ を $\mathbb{R}^{\overline{n}} \to \mathbb{R}$ の関数と定義する.

(一般化されたリコース問題)
$Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \min_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})}\{\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})) \mid H_i(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})) \geq \boldsymbol{g}_i^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \in Y, i = 1,\ldots,m\}$

一般化されたリコース問題を導入し, また目的関数として $f_0(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ の期待値を考えることにより, 次のリコースを有する確率計画問題 (SPR) が (SP) の等価確定問題 (deterministic eqivalent) として定義できる.

(リコースを有する確率計画問題 SPR)

$$\begin{array}{ll}
\min_{\boldsymbol{x}\in X} & E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[f_0(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] \\
\text{subject to} & f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = g_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) + Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \in \Xi \\
& Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \min_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})}\{\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})) \mid \boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})) \geq \boldsymbol{g}^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \in Y\}, \\
& \qquad \boldsymbol{\xi} \in \Xi
\end{array}$$

この問題は, 第**??**章の**多段階確率計画問題** (multistage stochastic programming) へ拡張できる.

実用上重要なのが, 次の確率的線形計画問題 (SLP) における等価確定問題 (SLPR) である. 問題 (SP) の場合と同様に, 確率変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ のすべてのとりうる値に対して, "制約条件" を常に満足し, 目的関数を "最小化" する解 $\boldsymbol{x}$ が存在しない場合があるため, 問題 (SLP) は明確に定義されたものであるとはいえない.

(確率的線形計画問題 SLP)

$$\begin{array}{ll}
\text{“最小化”} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{“制約条件”} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& T(\tilde{\boldsymbol{\xi}})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}$$

問題 (SLP) においては, n 次元ベクトル c, $m_0 \times n$ 次元行列 A および m_0 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ は確定的で与えられており, $m_1 \times n$ 次元行列 $T(\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ と m_1 次元ベクトル $\boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ は確率変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ に従うものとする. これは, 問題 (SP) の制約で

$$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \begin{pmatrix} T(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \\ -T(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} -\boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \\ \boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \end{pmatrix}$$

としたものに相当する. (SLP) に対し, リコース問題を導入することによって等価確定問題を定義する.

(リコースを有する確率的線形計画問題 SLPR)

$$\begin{array}{rl} \min & E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + Q(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})] \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \\ & Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \min\{q^\top y(\boldsymbol{\xi}) \mid W\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi}) - T(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \geq \boldsymbol{0}\}, \\ & \quad \boldsymbol{\xi} \in \Xi \end{array}$$

特に, $m_1 \times \overline{n}$ リコース行列 W が

$$\{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = W\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \geq 0\} = \mathbb{R}^{m_1}$$

を満たすとき, 問題は**完全リコース** (complete recourse) という性質をもつと定義し, W を**完全リコース行列** (complete recourse matrix) とよぶ. これは, 第 1 段階での決定 $\boldsymbol{x}$ が何であろうと, また確率変数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ の実現値 $\boldsymbol{\xi}$ が何であろうと, (SLPR) におけるリコース問題

(SLPR におけるリコース問題)

$$Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \min\{\boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \mid W\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi}) - T(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \geq \boldsymbol{0}\}$$

が実行可能であることを表す. 完全リコースの特別な例は, **単純リコース** (simple recourse) であり, $m_1 \times 2m_1$ 行列 W が次の m_1 次単位行列 I から構成されるものである.

$$W = (I, -I)$$

すると, 問題 (SLPR) におけるリコース問題は次のようになり, リコース変数 $\boldsymbol{y}^+(\boldsymbol{\xi})$ および $\boldsymbol{y}^-(\boldsymbol{\xi})$ によって, 確率変数を含む制約に対する侵害を補償する.

(SLPR におけるリコース問題: 単純リコース性を有する場合)

$$\begin{array}{ll} Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) & \\ = \min\{(\boldsymbol{q}^+)^\top \boldsymbol{y}^+(\boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{q}^-)^\top \boldsymbol{y}^-(\boldsymbol{\xi}) \mid & \boldsymbol{y}^+(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{y}^-(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi}) - T(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{y}^+(\boldsymbol{\xi}) \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}^-(\boldsymbol{\xi}) \geq \boldsymbol{0}\} \end{array}$$

確率計画問題 (SP) とその特殊ケースである (SLP) に対して, リコースを有する等価な確定問題 (SPR) と (SLPR) を導いた. これらの等価確定問題を一般化すると, (SP) の等価確定問題 (DESP) は以下の形に書くことができる.

(確率計画問題 SP に対する等価確定問題 DESP)

$$\begin{array}{rl} \min & E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[f_0(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})] \\ \text{subject to} & E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[f_i(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})] \leq 0, i = 1, \ldots, s \\ & E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[f_i(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})] = 0, i = s+1, \ldots, \bar{m} \\ & \boldsymbol{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

たとえば問題 (SLPR) においては, $f_0(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = c^\top \boldsymbol{x} + Q(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})$, $f_i(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = -x_i (i = 1, \ldots, n(= s))$, $(f_{s+1}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}), \ldots, f_{\bar{m}}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}))^\top = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ ($\bar{m} = m + s$) とすればよい (Wets [24]). 等価確定問題の導出に関しては, Wets [23, 24] を参考にした. また, 問題 (SLPR) の定式化は, Dantzig [7], Beale [2] による.

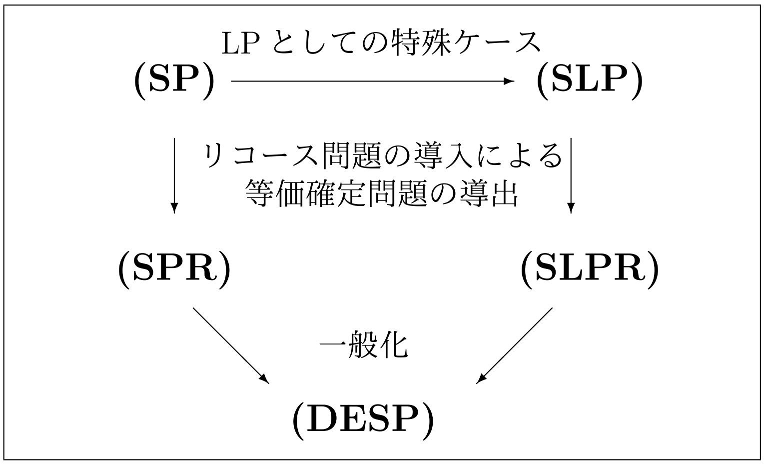

図 1: リコースを有する確率計画問題の導出での各問題の関係

3.2　確率的制約条件問題

リコースを有する確率計画問題とは別の等価確定問題として, 確率的制約条件問題 を定義することができる. 確率的制約条件問題においては, ある確率レベル (充足水準) で制約条件が満たされればよいとする**確率的制約条件** (chance constraint) を含む. この問題を導出するための等価確定問題は, 問題 (DESP) に含まれる形で表現される. ある定数 $\alpha \in [0,1]$ が与えられたとき, 問題 (SP) のすべての制約に対する**利得関数** (payoff function) $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ を次のように定める.

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1-\alpha, & g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) < 0 (i=1,\ldots,m) \text{ が成立する場合} \\ -\alpha, & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

利得関数は次のように解釈できる. 確率変数の実現値 $\boldsymbol{\xi}$ に対し, 決定 x が実行不可能であれば損失 α を生じ, 実行可能であれば収益 $1-\alpha$ を得る. 意思決定者は, 平均的に損失を出さないような決定 $\boldsymbol{x}$ を行いたいと考える. 確率変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ の**分布関数** (distribution function) を $F(\boldsymbol{\xi}) = P(\tilde{\boldsymbol{\xi}} \leq \boldsymbol{\xi})$ とする. 利得関数の**期待値** (expected value) は 0 以上になることが望ましいため, 次のようになる.

$$E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[\varphi(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] = \int_{\boldsymbol{\xi}\in\Xi} \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) dF(\boldsymbol{\xi}) \geq 0$$

そして, $f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = g_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, $f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = -\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ とすると,

$$\begin{aligned} f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) &= g_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \\ f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) &= \begin{cases} \alpha - 1 & g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) < 0 (i=1,\ldots,m) \text{ が成立する場合} \\ \alpha & \text{それ以外の場合,} \end{cases} \end{aligned}$$

であり, 次の不等式が成り立つ.

$$E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[f_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] = -E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[\varphi(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] \leq 0$$

そこで $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = (g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}),\ldots,g_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))^\top$ とすると, $E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[f_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})]$ は次のようになる.

$$
\begin{array}{rcl}
E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[f_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] & = & \int_\Xi f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dP \\
& = & \int_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\leq\boldsymbol{0}}(\alpha-1)dP + \int_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\not\leq\boldsymbol{0}} \alpha dP \\
& = & (\alpha-1)P(\{\boldsymbol{\xi}\mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\leq\boldsymbol{0}\}) + \alpha P(\{\boldsymbol{\xi}\mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\not\leq\boldsymbol{0}\}) \\
& = & \alpha\underbrace{[P(\{\boldsymbol{\xi}\mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\leq\boldsymbol{0}\}) + P(\{\boldsymbol{\xi}\mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\not\leq\boldsymbol{0}\})]}_{=1} \\
& & -P(\{\boldsymbol{\xi}\mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\leq\boldsymbol{0}\})
\end{array}
$$

したがって, 制約 $E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[f_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] \leq 0$ は $P(\{\boldsymbol{\xi}\mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\leq\boldsymbol{0}\}) \geq \alpha$ と等価になる. 確率論の基本的な内容は, **??**節を参照されたい.

これまでの議論によって, 問題 (DESP) は次の**確率的制約条件問題** (CCP) の形式になる. 問題 (CCP) は, リコースを有する確率計画問題同様に, 問題 (SP) に対する等価確定問題の一つであり, **確率的な制約を有する問題** (probabilistically constrained program) とよばれることもある.

(確率的制約条件問題 CCP)

$$
\begin{array}{ll}
\min_{\boldsymbol{x}\in X} & E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[g_0(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] \\
\text{subject to} & P(\{\boldsymbol{\xi}\mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\leq\boldsymbol{0}\}) \geq \alpha
\end{array}
$$

問題 (CCP) は, 同時に複数の制約が満たされる確率を制約条件として有するため, **同時確率的制約条件問題** (joint chance constrained program) ともよばれる.

また, 上で定めた $f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ の代わりに, 定数 $\alpha_i \in [0,1] (i=1,\ldots,m)$ が与えられたとき, 個別に各制約について利得関数を定義すると, 次のようになる.

$$
\begin{array}{rcl}
f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) & = & g_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \\
f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) & = & \left\{\begin{array}{ll} \alpha_i - 1, & g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) < 0 \text{ となる場合} \\ \alpha_i, & \text{それ以外の場合} \end{array}\right\}, i=1,\ldots,m
\end{array}
$$

同様に問題 (DESP) から, **個別確率的制約条件問題** (stochastic program with separate chance constraints) が得られる.

(個別確率的制約条件問題 SCCP)

$$
\begin{array}{ll}
\min_{\boldsymbol{x}\in X} & E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[g_0(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] \\
\text{subject to} & P(\{\boldsymbol{\xi}\mid g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\leq 0\}) \geq \alpha_i, i=1,\ldots,m
\end{array}
$$

これらの定式化は, Charnes–Cooper [5], Charnes–Cooper–Symonds [6] 等に由来する.

4 情報の価値と確率計画問題の解との関係

リコースを有する確率的線形計画問題 (SLPR) において, 確率変数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ が特定の値 $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}$ に固定される場合について考える.

(SLPR($\boldsymbol{\xi}$))

$$
\begin{array}{rl}
z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \min & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} + Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \min\{\boldsymbol{q}^\top\boldsymbol{y} \mid W\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi}) - T(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}\}
\end{array}
$$

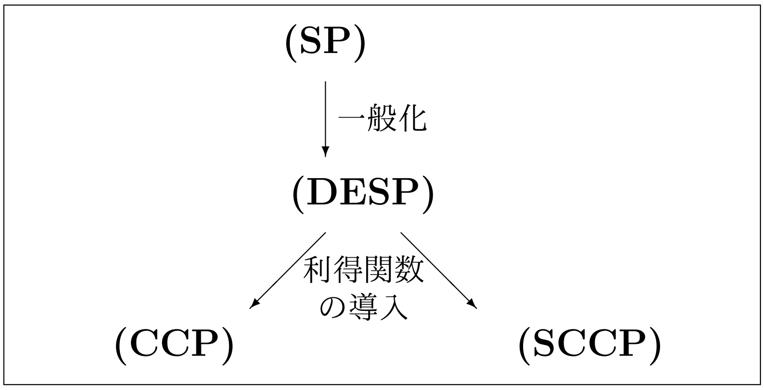

図 2: 確率的制約条件問題の導出での各問題の関係

本節では, 待機決定 アプローチの解と, 即時決定 アプローチの解との関係について考える. 問題 (SLPR) は, 即時決定アプローチによる (SLP) の等価確定問題であることはすでに述べた. 待機決定アプローチとして, 問題 (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)) をすべての $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ について解き, その目的関数値の期待値を求めるものと定める. 待機決定アプローチの最適目的関数値を WS, 即時決定アプローチの最適目的関数値を RP とする. $\hat{\boldsymbol{x}}(\tilde{\boldsymbol{\xi}})$, $\boldsymbol{x}^*$ をそれぞれ, (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)), (SLPR) の最適解とする. WS は (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)) の最適目的関数値の $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ に関する期待値と等しく, RP はリコースを有する確率的線形計画問題 (SLPR) の最適値と等しい. また, 待機決定アプローチにおいては, 即時決定アプローチとは異なり, 第 1 段階決定変数も $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ がとりうる値に応じて変動することに注意されたい.

$$WS = E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[\min_{\boldsymbol{x}} z(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})] = E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[z(\hat{\boldsymbol{x}}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}), \tilde{\boldsymbol{\xi}})]$$

$$RP = \min_{\boldsymbol{x}} E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[z(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})] = E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[z(\boldsymbol{x}^*, \tilde{\boldsymbol{\xi}})]$$

完全情報の期待値 $EVPI$(expected value of perfect information) とは, 意思決定者が, 将来起こりうる事象に関する完全な情報を得ることができると仮定するとき, その情報を得るために払う費用の期待値を表す. $EVPI$ は次のように定義される.

$$EVPI = RP - WS$$

また, 待機決定や即時決定以外にも, 単純に確率変数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ をその平均値 $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ で置き換えた問題を解くというアプローチも考えられる. その問題 (SLPR($\bar{\xi}$)) の最適解と最適目的関数値をそれぞれ, $\bar{\boldsymbol{x}}(\bar{\xi})$, EV とする.

$$EV = \min_{\boldsymbol{x}} z(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) = z(\bar{\boldsymbol{x}}(\bar{\boldsymbol{\xi}}), \bar{\boldsymbol{\xi}})$$

この解を用いた (SLPR) の目的関数値を EEV とする.

$$EEV = E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[z(\bar{\boldsymbol{x}}(\bar{\boldsymbol{\xi}}), \tilde{\boldsymbol{\xi}})]$$

すると, **確率計画問題の解の価値** VSS(value of stochastic solution) は次のように定義される.

$$VSS = EEV - RP$$

WS, RP, EEV には次の関係がある.

定理 1. $WS \leq RP \leq EEV$

証明 問題 (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)) を考えると,

$$z(\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) \le z(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\xi})$$

の関係が成り立つため, この両辺の期待値をとることにより, $WS \le RP$ となる. また, 問題 (SLPR) を考えると, $\bar{x}(\bar{\xi})$ は (SLPR) の最適解ではないため, $RP \le EEV$ となる. □

これより, $0 \le EVPI$, $0 \le VSS$ が直ちに導かれる. また, EV と WS との関係は (SLPR) において, T が定数行列 $T \equiv T(\boldsymbol{\xi})$ であるならば, 次のようになる.

定理 2. $EV \le WS$

証明 Jensen の不等式 (定理**??**) より, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ の凸関数 $f(\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ について, $E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[f(\tilde{\boldsymbol{\xi}})] \ge f(E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}])$ となる. ここで, $f(\boldsymbol{\xi}) = \min_x z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ が $\boldsymbol{\xi}$ の凸関数であることを示せばよい. 次の問題 (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)') を考える.

(SLPR($\boldsymbol{\xi}$)')

$$\begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & W\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi}) - T(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

問題 (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)) の最適解は, (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)') の実行可能解であるため, 問題 (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)) の最適目的関数値 $\ge$ (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)') の最適目的関数値という関係がある. 逆に問題 (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)') の目的関数は, 明らかに (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)) の上界であるため, (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)) と (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)') の最適目的関数値は一致する. よって問題 (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)) と等価な問題 (SLPR($\boldsymbol{\xi}$)') の**双対問題** (dual problem) を考える (付録**??**節).

$$\begin{array}{rcl} f(\boldsymbol{\xi}) & = & \min_{\boldsymbol{x}} z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ & = & \max_{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi}} \{\boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\pi}^\top \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi}) | \boldsymbol{\sigma}^\top A + \boldsymbol{\pi}^\top T \le \boldsymbol{c}^\top, \boldsymbol{\pi}^\top W \le \boldsymbol{q}^\top\} \end{array}$$

この双対問題の制約は $\boldsymbol{\xi}$ によらないため, $f(\boldsymbol{\xi})$ の**エピグラフ** (epigraph) は全ての実行可能な $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\pi})$ に対する線形関数 $\boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\pi}^\top \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi})$ のエピグラフの共通部分すなわち半空間の共通部分であり凸集合となる. よって $f(\boldsymbol{\xi})$ は凸関数となる (付録**??**節). □

本節の内容は, Birge–Louveaux [4] に基づく. 待機決定アプローチと即時決定アプローチとの関係については, Avriel–Williams [1] に示されている.

参考文献

[1] M. Avriel and A. Williams. The value of information and stochastic programming. *Operations Research*, Vol. 18, pp. 947–954, 1970.

[2] E. M. L. Beale. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. B 17, pp. 173–184, 1955.

[3] J. R. Birge. Stochastic programming computation and applications. *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 9, pp. 111–133, 1997.

[4] J. R. Birge and F. Louveaux. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer series in operations research. Springer-Verlag, 1997.

[5] A. Charnes and W. W. Cooper. Chance constrained programming. *Management Science*, Vol. 6, pp. 73–79, 1959.

[6] A. Charnes, W.W. Cooper, and G.H. Symonds. Cost horizons and certainty equivalents: An approach to stochastic programming of heating oil. *Management Science*, Vol. 4, pp. 235–263, 1958.

[7] G. B. Dantzig. Linear programming under uncertainty. *Management Science*, Vol. 1, pp. 197–206, 1955.

[8] Y. Ermoliev and R. J.-B. Wets, editors. *Numerical Techniques for Stochastic Optimization.* Springer Series in Computational Mathematics 10. Springer-Verlag, 1988.

[9] G. Infanger. *Planning under Uncertainty.* boyd & fraser publishing company, Danvers, MA, 1994.

[10] G. Infanger, editor. *Stochastic Programming: The State of the Art in Honor of George B. Dantzig.* International Series in Operations Research & Mangement Science. Springer-Verlag, New York, 2010.

[11] 石井博昭. 確率論的最適化. 伊理正夫, 今野浩（編）, 数理計画法の応用 < 理論編 >, 講座・数理計画法 10, pp. 1–40. 産業図書, 1982.

[12] P. Kall. Stochastic programming. *European Journal of Operational Research*, Vol. 10, pp. 125–130, 1982.

[13] P. Kall. Solution methods in stochastic programming. In J. Henry and J.-P. Yvon, editors, *System Modelling and Optimization*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 197, pp. 3–22. Springer-Verlag, 1994.

[14] P. Kall and J. Mayer. *Stochastic Linear Programming -Models, Theory, and Computation.* Springer's INTERNATIONAL SERIES in Operations research and Management Science. Springer-Verlag, 2005.

[15] P. Kall and S. W. Wallace. *Stochastic Programming.* John Wiley & Sons, 1994.

[16] J. Mayer. *Stochastic Linear Programming Algorithms: A Comparison Based on a Model Management System.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1998.

[17] A. Prékopa. *Stochastic Programming.* Kluwer Academic Publishers, 1995.

[18] A. Ruszczyński and A. Shapiro, editors. *Stochastic Programming.* Handbooks in Operations research and management Science Volume 10. Elsevier, 2003.

[19] A. Shapiro, D. Denctcheva, and A. Ruszczyński, editors. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory.* MPS-SIAM Series on Optimization. SIAM, Philadelphia, PA, 2009.

[20] 椎名孝之. 確率計画法. 久保幹雄, 田村明久, 松井知己（編）, 応用数理計画ハンドブック, pp. 710–769. 朝倉書店, 2002.

[21] I. M. Stancu-Minasian and R. J.-B. Wets. A research bibliography in stochastic programming 1955-1975. *Operations Research*, Vol. 25, pp. 1078–1119, 1976.

[22] S. W. Wallace and W. T. Ziemba, editors. *Applications of Stochastic Programming.* MPS-SIAM Series on Optimization. SIAM, Philadelphia, PA, 2005.

[23] R. J.-B. Wets. Stochastic programs with fixed recourse: The equivalent deterministic program. *SIAM Review*, Vol. 16, pp. 309–339, 1974.

[24] R. J.-B. Wets. Stochastic programming. In G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan, and M. J. Todd, editors, *Optimization*, Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 1, pp. 573–629. Elsevier, 1989.