確率計画法について (1)

1　確率計画法とは

オペレーションズ・リサーチ (operations research) とは，企業や各種事業体の経営における意思決定や, 各種システムの設計・管理・運用などにおける問題を科学的に解決するためのアプローチである (Wagner [5]). オペレーションズ・リサーチは, 「科学的方法および用具を体系の運営方策に関する問題に適用して, 方策の決定者に問題の解を提供する技術」であると JIS により定義されている. 政策立案・経営・基本設計などの意思決定における諸問題は, オペレーションズ・リサーチを用いることにより, 定量的な評価に基づく判断や決定が可能となる. **数理計画法** (mathematical programming) は, オペレーションズ・リサーチの数学的手法の中心をなす. 数理計画問題とは, 与えられた制約条件の下で, 目的関数を最適化する問題である (Nemhauser–Rinnooy Kan–Todd [2]). 数理計画法は, 線形計画問題に対する Dantzig の単体法 (付録**??**) [1] に起源を有する. 単体法以来, 理論とアルゴリズムと問題を解く計算機の進歩により, 非線形計画法や整数計画法と組合せ最適化へと発展してきた. 現在では, 複雑なシステムで大規模な問題の一部に対しても, 問題を解く技法が開発されてきており, ますますその有効性が高まっている.

数理計画法の適用分野は実社会のあらゆる面に及んでいる. 工業生産, エネルギーなどの工学的諸問題, 企業の経営や計画, また公共政策, さらには農業など, 数理計画法が適用される分野は数多い．さまざまな分野で発生する現実の数理計画問題には，目的関数および制約条件に不確実要素を伴う場合が多い．たとえば，与えられたパラメータなどは，確定値として取り扱うことが困難であることがある．不確実な状況下での計画には**リスク** (risk) が含まれる．不確実な状況から生じるリスクを回避するため，現実のシステムに含まれる不確実な状況をモデル化し，確率的変動要素を考慮することが必要となる．このように不確実要素を直接モデルに組み入れた最適化手法は，**確率計画法** (stochastic programming) とよばれている．

電気事業における電力供給計画を例にあげ, 不確実な状況から生じるリスクを考える．電気事業においては, 設備運用, 設備投資, 経営, 系統など非常に多くの計画が策定されているが, その中心となるのが電力供給計画である. 電力供給計画は, 想定される電力需要に対して, 安定した電力供給を行うとともに経済的な電力設備の運用および開発を行うことが目的である. 電力供給計画は，電力需要を満たすという制約条件の下で，電力供給コストを最小化する問題である (Wood–Wollenberg [6])．電力需要および，電力供給に必要な燃料費などは確定的な値ではなく，確率的な変動を含む．電力需要が想定値より大きくなると，電力供給が満たされない可能性が生じ，また電力需要の想定を大きくとりすぎると，供給設備に余剰が生じることになる．また，電力供給に必要な燃料費が変動する場合は，電力供給の実行可能性には問題は生じないものの，供給コストの最適性が失われる可能性がある．このようなリスクは，現実の計画においては回避しなければならない．

本章でははじめに, 電力供給計画 (椎名 [4], Shiina [3]) に対する次の 2 つのモデルによって確率計画法の例を示す. 長期の供給計画に対する罰金型モデルは, **??** 章で取り上げる罰金に対するリコースを有する確率計画問題に対応し, 短期の供給計画に対する信頼度モデルは, **??** 章で取り上げる確率的制約条件を有する確率計画問題に対応する.

2　罰金型モデル（長期の供給計画）

次の 2 年間の供給計画モデルでは, 各年で想定電力需要が与えられている．電気事業者は, 1 年度のはじめに燃料を購入して発電を行うことによって電力供給を行い, 燃料が余った場合は, 燃料を貯蔵して次年度の電力供給に回すものとする．次年度の電力供給は貯蔵燃料によるが, 貯蔵燃料が不足する場合は新設備開発により供給を行う．よって決定変数は, 燃料の購入による電力供給量 x(MWh) および, 1 年度から 2 年度へと貯蔵した燃料により供給可能な電力量 z(MWh) と, 2 年度における新設備開発による電力供給量 y(MWh) になる．目的関数を, 燃料の購入による 1 年目の電力供給に要する費用と, 貯蔵燃料および新設備開発による 2 年目の電力供給費用の総和とすると, 総費用最小化の線形計画問題が定式化される．しかし, 長期の需要想定は, 過去の電力需要や経済動向さらには将来にわたる経済見通しなどに基づいているため, 実績と若干の差異を生ずることがある．したがって, 将来の想定需要値は次のような複数の**シナリオ** (scenario) によって与えられることが通例である．

表 1: 電力需要想定におけるシナリオ

シナリオ	確率	新設備開発による電力供給コスト (億円/MWh)	電力需要 (MWh)
通常	1/3	5	200
夏の猛暑	1/3	6	250
夏の猛暑+冬の厳寒	1/3	7.5	280

電力需要および, 新設備開発による電力供給コストは, 上の表のシナリオによって変動するものとする．MWh 当たりの電力量を供給するために必要な貯蔵燃料の保管費用 (1 億円/MWh), 購入された燃料による電力供給費用 (5 億円/MWh) は一定とする．

いま, 1 年度における電力需要の実績値が上の表のシナリオにおける通常の電力需要と等しい値になるものとする．2 年度における新設備開発による電力供給コストと電力需要は確定できないため, 上の表の各シナリオの平均値で与えるものとする．このとき, 総費用を最小化する問題を考えると, 次の平均値を用いた線形計画問題が定式化できる．

(平均値を用いた線形計画問題)

$$\begin{array}{rl} \min & 5x + z + \frac{1}{3}(5+6+7.5)y \\ \text{subject to} & x = 200 + z \\ & z + y = \frac{1}{3}(200+250+280) \\ & x, z, y \geq 0 \end{array}$$

最適解は, $x = 443.33$, $z = 243.33$, $y = 0$, 目的関数の最適値は 2460 億円となる．具体的には, 1 年度に $x = 443.33$(MWh) 分の発電を行うための燃料を購入し, 1 年度の需要 200(MWh) を満たす．残った燃料によって, 3 つのシナリオの平均として与えられる 2 年度の需要に対して供給 $z = (200+250+280)/3 = 243.33$(MWh) を行う．2 年度における新設備開発は行わず, $y = 0$(MWh) である．この解を各シナリオに当てはめてみると色々な不都合が生じる．

よって, 総費用の期待値は, $\frac{1}{3}(2503.33 + 2500 + 2735) = 2579.44$ となる．この平均値を用いた線形計画問題による定式化では, 最適解と各シナリオとの乖離に応じて, 実際に行うべき追加行動がモデルに含まれていない．3 シナリオの平均値のような需要想定値を用いた場合, どのシナリオが実際に生じるかを知る前に判断を行うと, 必然的に不都合が生じるため, 上の表に示したような追加行動をとらなければならない．現実のシナリオと最適解との乖離には余分な費用がかかり, このような余分にかかる追加費用を, リコース費用 (recourse cost) とよぶ．

表 2: 最適解と各シナリオとの乖離

2 年度の需要シナリオ	実際に行うべき追加行動	総費用 (億円)
通常 (2 年度に使用可能な燃料に余剰が生じる)	電力量 43.33(MWh) を供給可能な燃料の貯蔵=43.33(億円)	2503.33
夏の猛暑 (2 年度に使用可能な燃料では不足が生じる)	新設設備開発 6(億円/MWh) による供給 6.67(MWh)=40(億円)	2500
夏の猛暑+冬の厳寒 (2 年度に使用可能な燃料では不足が生じる)	新設設備開発 7.5(億円/MWh) による供給 36.67(MWh)=275(億円)	2735

需要シナリオの平均値を想定値として用いたモデルに対し, あらかじめ追加的な行動を考慮した数理計画モデルを考える. それには, 罰金に対するリコース費用をあらかじめ含む確率計画問題によって長期の電力供給計画を考えればよい. この定式化では, あらかじめリコース費用の期待値を目的関数に組み入れたものである. この場合, 追加的に行う燃料の貯蔵および新設備の開発によってリコース費用が必要となる. $c_s, d_s (s = 1, 2, 3)$ をそれぞれ, 各シナリオ s に対応する新設備開発による供給コストおよび需要量とする. また, $w_s, y_s (s = 1, 2, 3)$ をそれぞれ, 各シナリオ s に対応する余剰供給量および, 新設備開発による電力供給量とする. リコース費用を含む確率計画問題による供給計画の定式化は以下のようになる. ただし, $E_{s\in S}$ はシナリオの添字集合 $S = \{1, 2, 3\}$ に関する期待値を表し, $Q^s(x, z)(s \in S)$ はシナリオ s におけるリコース費用を表す.

(リコース費用を含む確率計画問題)

$$
\begin{array}{rl}
\min & 5x + z + E_{s\in S}[Q^s(x, z)] \\
\text{subject to} & x = 200 + z \\
& Q^s(x, z) \\
& \quad = \min\{c_s y_s + 1 \cdot w_s | z + y_s = d_s + w_s, \quad y_s, w_s \geq 0\}, s \in S \\
& x, z \geq 0
\end{array}
$$

この定式化は各シナリオに対する期待値を含んでおり, またリコース費用 $Q^s(x, z)$ が決定 x, z を行った後に線形計画問題を解くことによって定義されている. リコース費用 $Q^s(x, z)$ とは, 1 年度と 2 年度の電力供給量 x(MWh) および, z(MWh) が与えられたときの, 新設備開発による電力供給費用の最小値である. このリコース費用 $Q^s(x, z)$ は決定変数 x, z の関数であり, x, z の値が与えられた上で線形計画問題を解くことによって定義されることに注意されたい. このため, より理解しやすい等価な展開形 (extensive form) の問題として表す.

(リコース費用を含む確率計画問題: 展開形)

$$
\begin{array}{rl}
\min & 5x + z + \displaystyle\sum_{s\in S} \frac{1}{3}(c_s y_s + 1 \cdot w_s) \\
\text{subject to} & x = 200 + z \\
& z + y_1 = 200 + w_1 \\
& z + y_2 = 250 + w_2 \\
& z + y_3 = 280 + w_3 \\
& x, z \geq 0, y_s, w_s \geq 0, s \in S
\end{array}
$$

リコース費用を含む問題と展開形の問題は等価である. なぜなら, リコース費用を含む問題の実行可能解は展開形の問題の実行可能解になるため, 前者の最適目的関数値は後者の最

適目的関数値以上の値となる．明らかに，展開形の問題の目的関数は，リコース費用を含む問題の目的関数の上界であるため，両問題の最適目的関数値は一致することがわかる．展開形の問題における最適解は，$x = 400$, $z = 200$, $y_1 = 0$, $y_2 = 50$, $y_3 = 80$, $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$ となり，目的関数の最適値は 2500 億円となる．このように，罰金に対するリコースを要する確率計画問題を解いた場合の目的関数値は，問題に含まれる確率変数を平均値で置き換えた場合より小さくなる．この差 79.44(億円)=2579.44–2500 を，確率計画の解の価値 VSS(value of stochastic solution) とよぶ．

3　信頼性モデル（短期の供給計画）

短期供給計画は至近年を対象とし，主に設備の経済的運用を目的とする．この計画では，新設設備開発などの電源開発計画を含まず，最も経済的な発電所運転，および融通電力の決定などに重点がおかれる．また短期計画では，信頼度の高い電力供給を可能とするために，供給予備力が用いられる．これは，計画外停止，需要変動などの予測外の事態発生に対しても，安定した電力供給を可能とするため，あらかじめ想定需要をこえて保有する供給力のことである．本節では，ある月のピーク需要が与えられる 1 時間に対する短期供給計画モデルを示す．このモデルでは，電力需要を 3 つの負荷領域（ベース，ミドル，ピーク）に分割し，それぞれ，原子力，火力，水力の各供給力で電力を供給する．d_i, v_i, w_i をそれぞれ，負荷領域 i における電力需要量 (kWh) および供給電力量 (kWh)，供給予備力 (kWh) とする．目的関数は，供給費用と供給予備力に関わる費用との総和である．負荷領域 i における単位供給電力量あたりの費用および単位供給予備力あたりの費用をそれぞれ，a_i, b_i, また $(1+\delta)$ を供給予備力の需要に対する比率の下限値とする．

(短期の供給計画問題)

$$
\begin{array}{ll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{3}(a_i v_i + b_i w_i) \\
\text{subject to} & v_i \le d_i \le w_i, \quad i = 1, \ldots, 3 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{3} v_i = \sum_{i=1}^{3} d_i \\
& (1+\delta)\displaystyle\sum_{i=1}^{3} d_i \le \sum_{i=1}^{3} w_i \\
& v, w \ge 0
\end{array}
$$

制約 $(1+\delta)\sum_{i=1}^{3} d_i \le \sum_{i=1}^{3} w_i$ は供給予備力を少なくとも電力需要の $(1+\delta)$ 倍保持するための条件である．この短期供給計画においては，予測外の変動要因が起こる合成確率分布を考慮し，信頼度として $(1+\delta)$ を設定することが行われている．上のモデルに含まれる変動要因は電力需要だけであり，電力需要を直接確率変数と定義した確率計画モデルを示す．この制約条件において $\sum_{i=1}^{3} d_i$ を平均 $\sum_{i=1}^{3} d_i$, 分散 10^2 の正規分布 $\mathcal{N}(\sum_{i=1}^{3} d_i, 10^2)$ に従う確率変数 $\tilde{e}$ と仮定し，$(1+\delta)$ を除く．すると，制約条件は次の形になる．

$$
\tilde{e} \le \sum_{i=1}^{3} w_i
$$

この $\tilde{e}$ は確率変数であるため，そのすべての実現値に対して実行可能な $\boldsymbol{w}$ が存在しない場合がある．よってこの制約条件を，確率 α 以上で成立するという確率的制約条件 (chance-constraint) へ置き換える．

$$
\text{Prob}\left(\tilde{e} \le \sum_{i=1}^{3} w_i\right) \ge \alpha
$$

$(\tilde{e}-\sum_{i=1}^{3}d_i)/10$ は, 平均 0, 分散 1^2 の標準正規分布 $\mathcal{N}(0,1^2)$ に従うので, その分布関数を Φ とする.

$$\Phi\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}w_i-\sum_{i=1}^{3}d_i}{10}\right)\geq\alpha$$

すると, この制約条件は次の式に変形できる.

$$\frac{\sum_{i=1}^{3}w_i-\sum_{i=1}^{3}d_i}{10}\geq\Phi^{-1}(\alpha)$$

パラメータは, 以下のように定める.

$$\boldsymbol{a}=(50,200,400),\boldsymbol{b}=(30,100,150)(\text{万円}/\text{kWh}),\boldsymbol{d}=(10,20,30)(\text{kWh})$$

$\Phi^{-1}(0.90)=1.28,\Phi^{-1}(0.99)=2.32$ となる. この線形計画問題を解くと, 最適解および目的関数の最適値は以下のようになる.

$$\boldsymbol{v}=(10,20,30)\ (\text{kWh}),\boldsymbol{w}=\begin{cases}(22.8,20,30)\ (\text{kWh})\ (\alpha=0.90\ \text{の場合})\\(33.2,20,30)\ (\text{kWh})\ (\alpha=0.99\ \text{の場合})\end{cases}$$

$$\text{目的関数の最適値}=\begin{cases}24984(\text{万円})(\alpha=0.90\ \text{の場合})\\25296(\text{万円})(\alpha=0.99\ \text{の場合})\end{cases}$$

このように, 一般的にシステムの信頼性と経済性には, トレードオフの関係があり, 高い信頼性を求める場合には, 高い費用を要することになる.

参考文献

[1] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

[2] G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan, and M. J. Todd, editors. *Optimization*, Vol. 1 of *Handbooks in Operations Research and Management Science.* Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1989.

[3] T. Shiina. Numerical solution technique for joint chance-constrained programming problem –an application to electric power capacity expansion–. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 42, pp. 128–140, 1999.

[4] 椎名孝之. 確率的電力供給計画モデル. 第 7 回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 37–52, 仙台, 1995. 日本オペレーションズ・リサーチ学会.

[5] H. M. Wagner. *Principles of Operations Research: With Applications to Managerial Decisions.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969.

[6] A. J. Wood and B. J. Wollenberg. *Power Generation, Operation and Control.* John Wiley & Sons, New York, NY, second edition, 1996.