



確率計画法とその応用

早稲田大学 創造理工学部
経営システム工学科
椎名 孝之

1. はじめに

- **オペレーションズ・リサーチ(OR)**: 現実システムに対する数理モデル分析と意思決定
- **数理計画法**: 制約条件下で目的関数最適化
- 現実の問題(生産、エネルギー、経営、公共政策): 目的関数や制約条件に**不確実要素**を伴う

- 不確実な状況での最適化:**リスク**を含む
- **リスクを回避**または**リスクを管理**
- **確率計画法**: 不確実要素を数理計画問題に導入
⇒ 確定的数理計画法 + **確率的な変動**
(モデルが複雑化: **多数のシナリオ**を考慮または制約式や目的関数の計算が困難, 効率的な解法が必要)

2. 不確実な状況下での意思決定とリスク

- **現実の計画における最適化問題**: 従来は確定的な数理計画法を適用したが、確率的な変動を考慮することが必要
 - 生産計画: 製品への需要を満たし、供給コストを最小化(需要や生産費: 確率的に変動)
 - **計画に含まれるリスク**:
需要想定大⇒設備余剰、需要想定小⇒供給不足
 - **確率計画法 (Stochastic Programming) の適用によりリスクを回避、管理**
 - システムの効率的な運用と信頼性の保持

3. 確率計画法の研究の流れ

- 線形計画法: Dantzig(1947)理論的枠組

- 確率計画法: 先駆的論文
Dantzig(1953)

- **リソースモデル**: 段階的に決定を行い、制約侵犯への罰金を平均的に最小化

- Charnes - Cooper (1959)

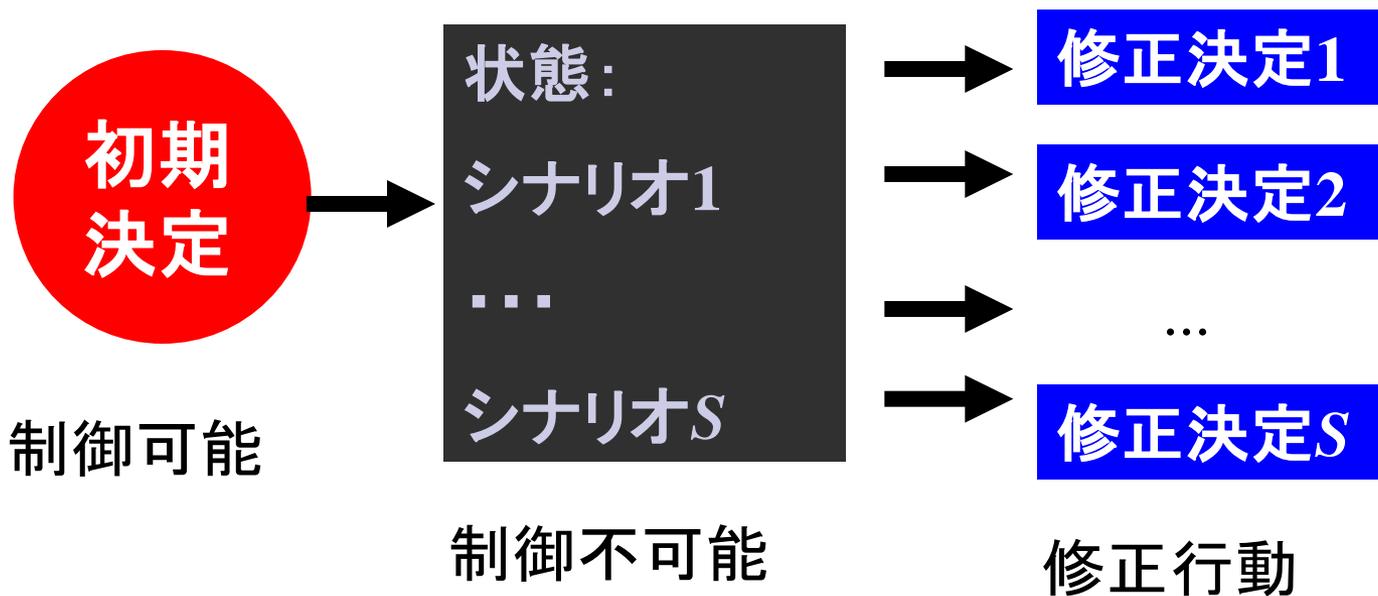
- **確率的制約条件モデル**: ある充足水準で制約が満たされる

- 1980年代以降 – 大型の問題を解く計算技法

- Shiina-Birge (2003), Shiina-Tagaya-Morito (2007), 椎名, 確率計画法 (久保, 田村, 松井 編「応用数理計画ハンドブック」理論編 第13章), 朝倉書店, 2002.)

4. 確率計画法の考え方

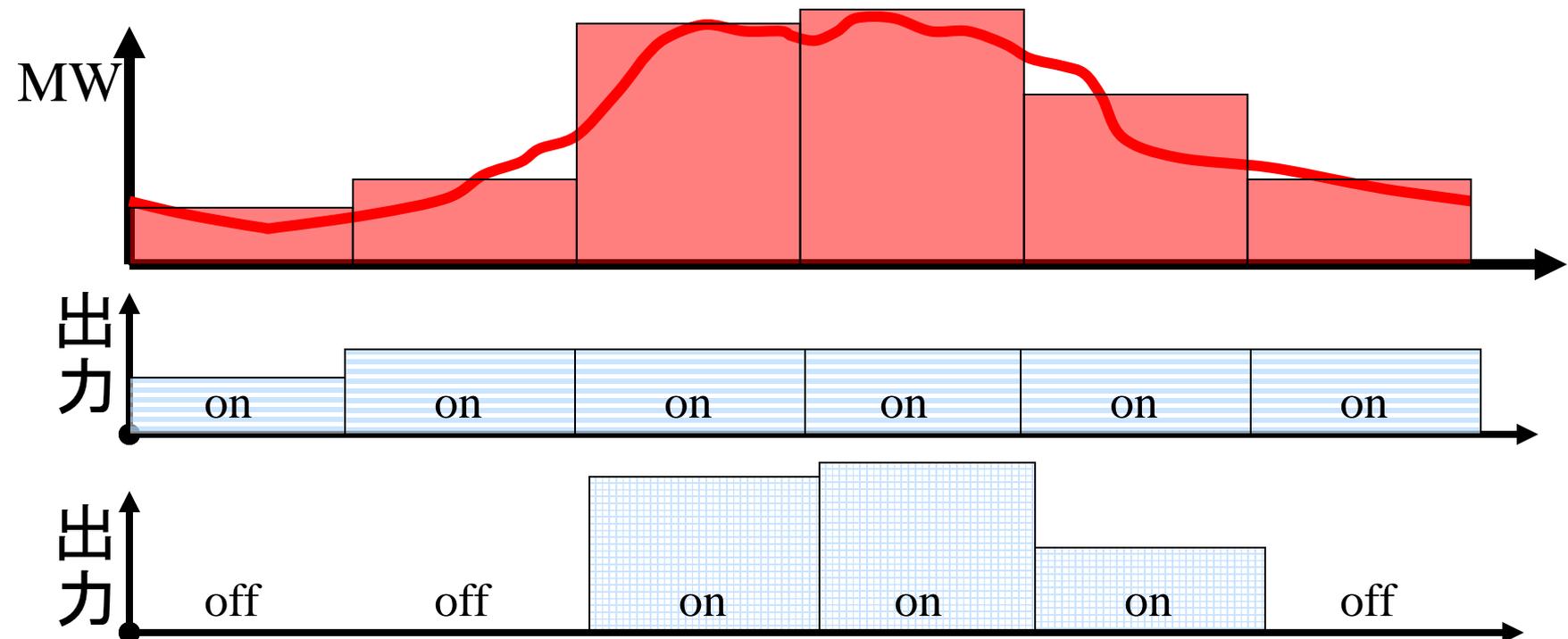
■ リコースモデル：2段階の意思決定



- 確率的制約条件モデル：
制約が満たされる確率 \geq 充足水準

5. リコースモデル: 発電機起動停止問題

- unit commitment: 電力システムにおけるスケジューリング問題(Shiina-Birge(2004))
- 各時間帯に与えられた電力需要を満足するように発電機のオン/オフおよび発電量を決定



6. 定式化

最小化：発電機の起動費用

＋発電機の燃料費（凸関数）の期待値

制約条件：需要制約（変動をシナリオとしてモデル化）

連続稼働制約（一旦運転すると一定時間以上稼働）

連続停止制約（一旦停止すると一定時間以上停止）

運転出力の上下限制約

予測不可能性制約（シナリオ制約）

決定変数：発電機の起動停止（整数変数）、出力（変動に対応）

整数条件を含むリソース型多期間確率計画問題

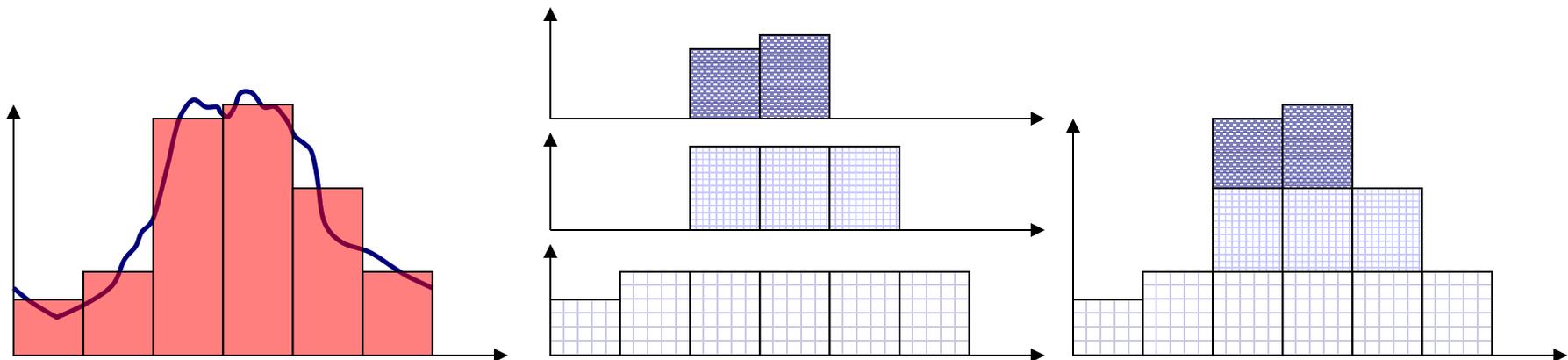
従来確定的であった電力需要の変動を考慮

問題の難しさ：複数のシナリオの下で多期間にわたる

連続的決定（ $168\text{h}=24\text{h}\times 7\text{日}$ ）

7. 緩和法に基づく解法

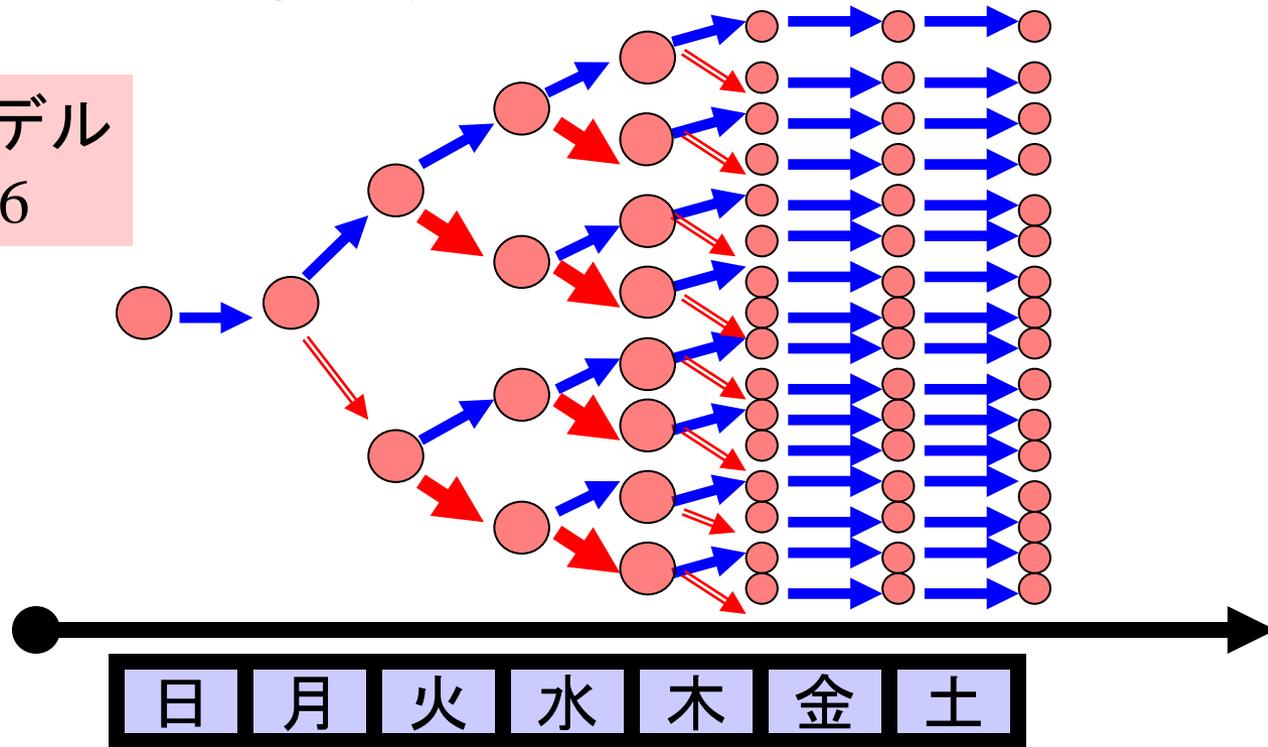
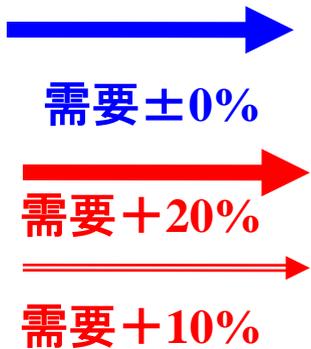
- 区分線形近似 (L-shaped法) は非効率
- 多期間にわたる決定の流れ (スケジュール) を求める必要



1. 需要制約を緩和して各発電設備毎に問題を分割して、動的計画法により効率的に起動停止スケジュールを生成
2. 電力需要を満たすように、生成したスケジュールを合成し、出力を調整 (2分探索法を応用)

8. 電力需要の変動シナリオ

確率計画モデル
シナリオ16



確定的モデル
予備率を設定

(5%, 10%, 10%, 5%)
 (6%, 12%, 12%, 6%)
 (7%, 14%, 14%, 7%)
 (8%, 16%, 16%, 8%)
 (9%, 18%, 18%, 9%)
 (10%, 20%, 20%, 10%)

16シナリオの平均
 ・
 等間隔で6組の予備率
 ・
 ・
 16シナリオの最大値

9. 確定的モデルと確率計画モデルの比較

確定的モデルの解(スケジュール)を16個のシナリオに当てはめる

モデル: 予備率(月,火,水,木)	最適コストの期待値の比率 (確率計画を1とする)
確定計画(5%,10%,10%,5%)	供給不足
確定計画(6%,12%,12%,6%)	供給不足
確定計画(7%,14%,14%,7%)	供給不足
確定計画(8%,16%,16%,8%)	供給不足
確定計画(9%,18%,18%,9%)	1.051
確定計画(10%,20%,20%,10%)	1.051
確率計画	1

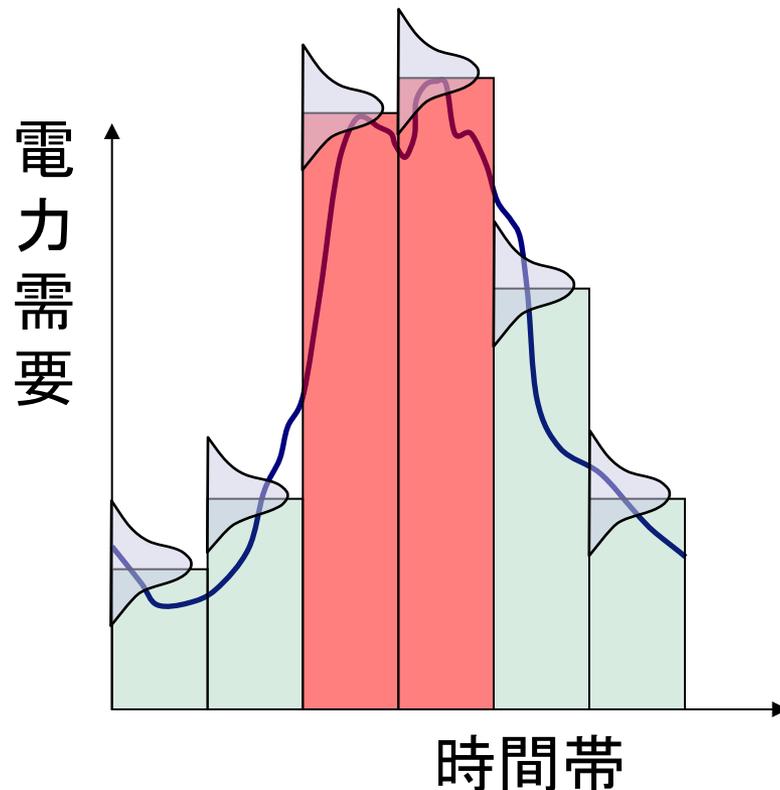
- 多期間の計画において、制約侵犯が起こるリスクを回避
- 同時に供給費用の期待値を最小化

10. 確率的制約条件モデル: 電力供給計画

- 電力供給: 需要変動を想定
- 供給予備力の保有

- 夏場のピーク時など想定を超える可能性
- 複数の時間帯で同時に電力需要を満たすという高い信頼度が求められる

- 時間帯毎の変動の同時分布を考えた確率的同時制約条件の導入



11. 確率的同時制約条件を満たす解集合

確率的同時制約条件：複数の制約が満たされる確率 \geq 充足水準

多次元正規分布の場合、確率的同時制約条件を満たす解集合は凸集合

- ・ 確率的同時制約条件：従来は理論的な研究が主流（現実問題への応用は非常に少ない）
- ・ 確率的同時制約条件：確率変数の相関を省略すれば、周辺分布関数の積として計算可能
- ・ 相関を考慮する場合、多次元の積分を制約条件に含む(椎名孝之, 確率計画法 (久保, 田村, 松井 編「応用数理計画ハンドブック」理論編 第13章), 朝倉書店, 2002.)

12. 電力供給計画の定式化

最小化：供給費用(燃料費＋運転費＋待機予備力維持費)

制約条件：発電出力の総和＝想定需要

発電出力 ≤ 容量

Prob(時間帯1(容量の総和 ≥ 想定需要＋偏差))

...

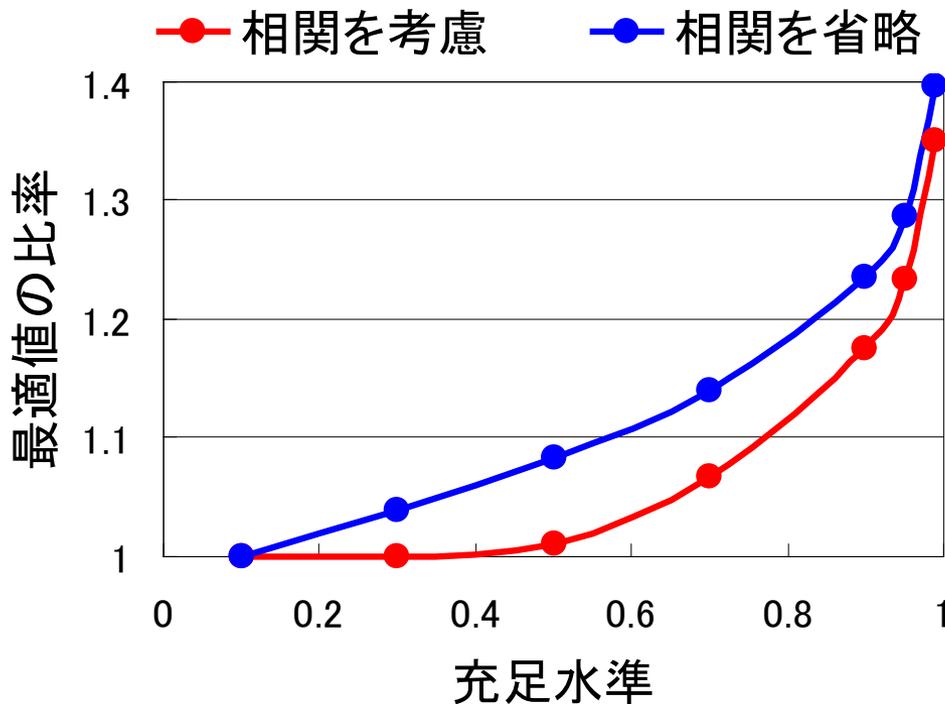
時間帯 T (容量の総和 ≥ 想定需要＋偏差))

≥ 充足水準 (T 時間帯の同時制約条件)

- ・ 運転計画における需要想定値と実測値との偏差を多次元正規分布に従う**確率変数**
- 日本電力調査委員会の変動想定：運転計画における需要予測値と実績値との偏差を正規分布

13. 供給信頼度と供給費用

- 同時機会制約条件：多次元の数値積分＋非線形最適化手法によって計算可能



確率的制約条件を含まない場合の最適値を1とする

充足水準	相関省略	相関考慮
0.9	1.24	1.17
0.95	1.29	1.23
0.99	1.40	1.35

相関を考慮⇒正確な供給コスト

- 供給信頼度設定と供給コスト把握によりリスクを管理

14. 確率計画法の応用および将来の普及

- INFORMS, MPS などの国際会議、シンポジウム: Stochastic Programming 関連の研究は非常に多い

- ・ 応用分野: 従来はエネルギー、金融
- ・ SCM、生産、スケジューリング⇒今後多分野での応用

- ・ 日本国内では、研究者は少ない(特に基礎解法)
- ・ 「確率計画法」(2010以降出版予定)⇒国内での普及

参考文献

T. Shiina and J. R. Birge. Multistage stochastic programming model for electric power capacity expansion problem. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 20, pp. 379–397, 2003.

T. Shiina and J. R. Birge. Stochastic unit commitment problem. *International Transactions in Operational Research*, Vol. 11, pp. 19–32, 2004.

T. Shiina, Y. Tagaya, and S. Morito. Stochastic programming problem with fixed charge recourse. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 50, pp. 299–314, 2007.