

# 起動停止問題の解法

## Algorithms to solve Unit Commitment Problem

椎名 孝之 Takayuki SHIINA

The electric power industry is undergoing restructuring and deregulation. This paper reviews mathematical programming models for the unit commitment. The unit commitment problem consists of determining the schedules for power generating units and the generating level of each unit. The decisions concern which units to commit during each time period and at what level to generate power to meet the electricity demand. The problem is a typical scheduling problem in an electric power system. For the stochastic unit commitment problem, it is assumed that demand and price uncertainty can be represented by a scenario tree. Various types of optimization methods can be applied to solve the problems.

キーワード: 確率計画法、起動停止問題、多段階確率計画問題、シナリオ、ラグランジュ緩和法

### 1 はじめに

多段階確率計画問題の応用として、起動停止問題を取り上げる。この問題は電気事業におけるスケジューリング問題であるが、生産分野などの他分野にも応用可能である。電気事業においては、電力自由化や規制緩和の進展 (Shahidehpour [10]) により、不確実な状況下での意思決定やリスク管理手法が重要となるため、確率計画法の理論、手法のより一層の進展が求められている。電力系統 (power system) の計画と運用の問題 (関根-林-芹澤-豊田-長谷川 [9], Delson-Shahidehpour [3], Sheble-Fahd [11], Wood-Wollenberg[23], Momoh[6]) は、数理計画法が適用される代表的なシステムといえる。電気エネルギーは、照明・動力源・コンピュータや通信など家庭から産業・交通などの様々な分野にわたり用いられ、現代社会の活動を支える基盤を成している。電力系統とは、電気エネルギーを発生してから、輸送しそれを消費するまでの一連の過程とそれを構成する要素からなるシステムである (田村 [22])。これらに加え、電力系統は運用に必要な保護・制御・監視設備・通信設備などの諸施設を備えている。電力系統に対しては、各要素となる設備のサービスレベルを確保した上で、系統全体を安定的かつ効率的に運用することが求められる。これらの問題には不確実性が含まれているために、確率計画法を適用することが可能である (椎名 [16])。

### 2 起動停止問題

本論文では、設備 (unit) の電力供給への関与 (commitment) を決定する起動停止問題 (unit commitment problem) を考える。この問題は、時間帯ごとに与えられた電力需要を満たすように、各設備の起動停止スケジュールおよび出力を求めるスケジューリング問題である (Sheble-Fahd [11])。従来は電力需要を確定値で与えたモデル (Bard [1], Muckstadt-Koenig [7]) が用いられていたが、これらを拡張した電力需要の変動を考慮したモデル Takriti-Birge-Long [20], Takriti-Birge [18] が示された。椎名 [15] は、これらのモデルを改良して現実のシステムの運用を反映させ、かつ電力需要の不確実性を考慮した確率計画モデルを示した。この問題を解くための解法では、ラグランジュ緩和法 (Lagrangian relaxation method) (Bertsekas [2]) によって各発電設備毎に問題を分割することにより、効率的にスケジュールを生成し、同時に電力需要を満たすようにスケジュールを合成する。本手法により、需要変動による供給費用コスト上昇のリスクを回避することができる。

### 3 シナリオツリーによる需要変動の表現

起動停止の運用を  $t = 1, \dots, T$  の離散的な時間で考える。時間帯  $t$  における電力需要  $\tilde{d}_t$  を確率変数であると定義し、その実現値を  $d_t$  と表す。確率変数  $\tilde{d}_t$  はとりうる値の個数が有限の離散分布に従うと仮定する。  $T$  時間にわたる確率変数の実現値の組  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_T)$  をシナリオ (scenario) と呼ぶ。分布の離散有限性から、シナリオの個数を  $S$  個と定義し、 $s$  番目のシナリオ  $d^s = (d_1^s, \dots, d_T^s)$  が生起する確率を  $p_s$  ( $\sum_{s=1}^S p_s = 1$ ) とする。シナリオは図1の有向グラフ (directed graph) であるシナリオツリー (scenario tree) において、ツリーの根ノードから末端のノードへの路として表される。

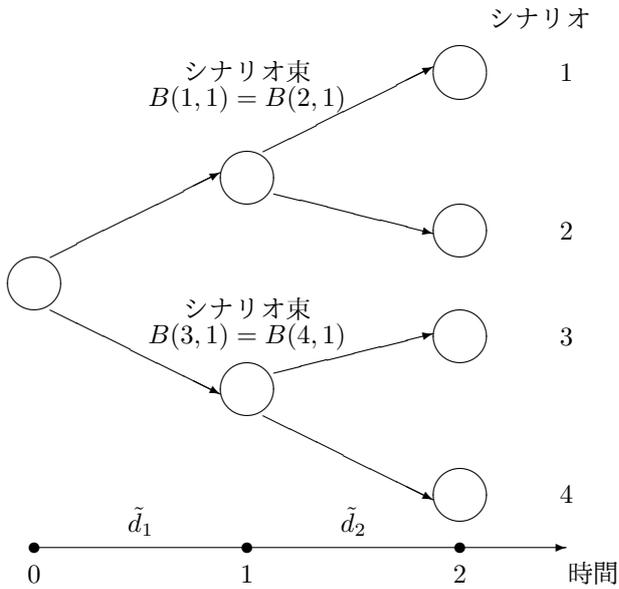


図1: シナリオツリーとシナリオ束

2つのシナリオ  $d^{s_1}, d^{s_2}$  ( $s_1 \neq s_2$ ) がある時間帯  $t$  までの履歴において、 $(d_1^{s_1}, \dots, d_t^{s_1}) = (d_1^{s_2}, \dots, d_t^{s_2})$  を満たす場合、これらは時間帯  $t$  までツリー上の同じ路をたどる。2つのシナリオ  $d^{s_1}, d^{s_2}$  に対する意思決定は、時間帯  $t$  まで等しくなければならない。意思決定者は、時間  $t$  の段階ではシナリオ  $d^{s_1}$  と  $d^{s_2}$  が将来2つの異なるシナリオに分岐することを見越して決定を行うことができない。時間  $t$  では  $t+1$  時間以降の将来に関する情報が意思決定者には与えられておらず、時間  $t$  までの  $d_t$  の履歴に従って決定をしなければならないためである。この条件を予測不可能性条件 (nonanticipativity) と呼ぶ。シナリオの添字集合  $\{1, \dots, S\}$  は各時間において、互いに素な部分集合に分割できる。時間  $t$  までの履歴においてシナリオ  $s$  と等しいシナリオの添字集合を  $B(s, t)$  で表し、これをシナリオ束 (scenario bundle) とよぶ。図1においては、 $B(1, 1) = B(2, 1) = \{1, 2\}$ ,  $B(3, 1) = B(4, 1) = \{3, 4\}$  となる。条件  $B(s', t) = B(s, t)$  かつ  $B(s', t+1) \neq B(s, t+1)$ ,  $s' < s$ , が満たされるならば、シナリオ  $s$  とシナリオ  $s'$  は時間  $t+1$  にツリー上で分岐する。シナリオ  $s$  が全ての  $s' < s$  と過去の履

歴を共有しない最初の時間を  $\mathcal{T}(s)$  で表し、シナリオ  $s$  の分岐点 (split point) と呼ぶ。シナリオ1に対しては、 $\mathcal{T}(1) = 1$  とおく。図1では、 $\mathcal{T}(2) = \mathcal{T}(4) = 2, \mathcal{T}(3) = 1$  である。

電力需要データ  $d_t^s, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S$  は記憶領域の節約のため、図2のようなリスト (list) を用いる (Takriti-Krasenbrink-Wu [21])。シナリオ  $s$  については、ツリーの分岐点以降の需要データ  $d_{\mathcal{T}(s)}^s, \dots, d_T^s$  のみを保持する。需要データ  $d_{\mathcal{T}(s)}^s$  が保存されるアドレスを  $\mathcal{B}(s)$  とすると、データ  $d_{\mathcal{T}(s)}^s, \dots, d_T^s$  は次のアドレス  $\mathcal{B}(s), \dots, \mathcal{B}(s+1) - 1$  に保存される。

シナリオ 1				シナリオ $s$		シナリオ $s+1$	
1	2	$\dots$	$T$	$\dots$	$\mathcal{B}(s)$	$\dots$	$\mathcal{B}(s+1)$
$d_1^1$	$d_2^1$	$\dots$	$d_T^1$	$\dots$	$d_{\mathcal{T}(s)}^s$	$\dots$	$d_{\mathcal{T}(s+1)}^{s+1}$

図2: 電力需要に対するデータ構造

椎名 [15] のアルゴリズムでは、発電機の出力の予測不可能性条件を満たすために、各出力についても需要データと同様  $x_{it}^s, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S$  ではなく、 $x_{it}^s, t = \mathcal{T}(s), \dots, T, s = 1, \dots, S$  のみを考慮する。その場合、時間  $t$  におけるシナリオ  $s$  の生起確率  $p_s$  を  $\sum_{s' \in \mathcal{B}(s,t)} p_{s'}$  と置き換える。

### 4 確率計画法による定式化

確率計画法に基づく起動停止問題モデルを以下の問題 (SUC) に示す。従来の確率計画モデル (Takriti-Birge-Long [20], Takriti-Birge [18]) では、起動停止に関わる0-1変数はシナリオ毎に変動するものであった。現実の電力システムにおける運用では、発電機の起動停止スケジュールは需要予測に基づいて固定され、需要変動は発電機の出力的によって対応するものである。

$I$  個の発電機による電力供給を考える。なお、実際に稼動可能な発電機は補修計画 (Yamayee [24], 椎名-久保 [17]) により、あらかじめ決められているものとする。変数  $u_{it}$  は発電機  $i$  の時間  $t$  における状態を表す0-1変数である。変数  $x_{it}^s$  は発電機  $i$  のシナリオ  $s$  における時間  $t$  の出力である。起動・停止を表す0-1変数  $u_{it}$  は全シナリオを通じて固定であるが、出力を表す変数  $x_{it}^s$  はシナリオに応じて変動することに注意されたい。関数  $f_i(x_{it}^s)$  は発電機  $i$  の燃料費を表す  $x_{it}^s$  の凸2次関数である。関数  $g_i(u_{i,t-1}, u_{i,t})$  は発電機  $i$  の起動費用を表し、 $(u_{i,t-1}, u_{i,t}) = (0, 1)$  の時に正の起動費用となり、それ以外の場合には0となる関数である。

(SUC):

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{s=1}^S p_s \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T f_i(x_{it}^s) u_{it} + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T g_i(u_{i,t-1}, u_{i,t}) \\
& \text{subject to} \\
& \sum_{i=1}^I x_{it}^s \geq d_t^s, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S \\
& u_{it} - u_{i,t-1} \leq u_{i\tau}, \\
& \quad \tau = t + 1, \dots, \min\{t + L_i - 1, T\}, \\
& \quad i = 1, \dots, I, t = 2, \dots, T \\
& u_{i,t-1} - u_{it} \leq 1 - u_{i\tau}, \\
& \quad \tau = t + 1, \dots, \min\{t + l_i - 1, T\}, \\
& \quad i = 1, \dots, I, t = 2, \dots, T \\
& q_i u_{it} \leq x_{it}^s \leq Q_i u_{it}, \\
& \quad i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S \\
& x_{it}^{s_1} = x_{it}^{s_2}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, \\
& \quad \forall s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\}, s_1 \neq s_2, B(s_1, t) = B(s_2, t) \\
& u_{it} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

目的関数は、供給コストの最小化である。供給コストは、燃料費の全てのシナリオに対する期待値と起動費用の総和となる。第1制約は、出力の総和が電力需要を満たすための条件である。第2制約は、発電機  $i$  は一旦起動したら  $L_i$  時間連続で運転しなければならないことを表す。同様に第3制約は、発電機  $i$  は一旦停止したら  $l_i$  時間連続で停止しなければならないことを表す。第4制約は発電機の出力の上下限を与える。  $Q_i, q_i$  はそれぞれ発電機  $i$  の出力の上限値、下限値である。第5制約は予測不可能性条件を表す。

## 5 ラグランジュ緩和法による解法のアルゴリズム

需要変動の下での起動停止問題を扱った従来の確率計画モデル Takriti–Birge–Long [20], Takriti–Birge [18] らの解法では、予測不可能性制約を緩和した後に起動停止問題をシナリオ毎に解く。これらのアプローチは、シナリオ集約法 (Rockafellar–Wets [8]) に基づいている。椎名 [15] の確率計画モデルでは起動停止に関わる変数  $u_{it}$  はシナリオに対して変動しないため、従来のアプローチを直接用いることはできない。まず、問題 (SUC) の需要充足条件  $\sum_{i=1}^I x_{it}^s \geq d_t^s$  をラグランジュ乗数 (Lagrangean multiplier)  $\lambda_t^s (\geq 0)$  を用いて緩和したラグランジュ緩和問題 (Lagrangean relaxation problem) (LSUC) を考える。

(LSUC):

$$\begin{aligned}
L(\lambda) = \min & \sum_{s=1}^S p_s \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T f_i(x_{it}^s) u_{it} + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T g_i(u_{i,t-1}, u_{i,t}) \\
& - \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T \lambda_t^s (\sum_{i=1}^I x_{it}^s - d_t^s) \\
& \text{subject to} \\
& u_{it} - u_{i,t-1} \leq u_{i\tau}, \tau = t + 1, \dots, \min\{t + L_i - 1, T\}, \\
& \quad i = 1, \dots, I, t = 2, \dots, T \\
& u_{i,t-1} - u_{it} \leq 1 - u_{i\tau}, \tau = t + 1, \dots, \min\{t + l_i - 1, T\}, \\
& \quad i = 1, \dots, I, t = 2, \dots, T \\
& q_i u_{it} \leq x_{it}^s \leq Q_i u_{it}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S \\
& x_{it}^{s_1} = x_{it}^{s_2}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, \\
& \quad \forall s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\}, s_1 \neq s_2, B(s_1, t) = B(s_2, t) \\
& u_{it} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

この問題 (LSUC) は発電機  $i = 1, \dots, I$  に対して分離可能であるため、 $I$  個の子問題 (LSUC( $i$ )),  $i = 1, \dots, I$  に分解できる。

(LSUC( $i$ )) :

$$\begin{aligned}
\min & \sum_{s=1}^S p_s \sum_{t=1}^T f_i(x_{it}^s) u_{it} + \sum_{t=1}^T g_i(u_{i,t-1}, u_{i,t}) - \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T \lambda_t^s x_{it}^s \\
& \text{subject to} \\
& u_{it} - u_{i,t-1} \leq u_{i\tau}, \tau = t + 1, \dots, \min\{t + L_i - 1, T\}, \\
& \quad t = 2, \dots, T \\
& u_{i,t-1} - u_{it} \leq 1 - u_{i\tau}, \tau = t + 1, \dots, \min\{t + l_i - 1, T\}, \\
& \quad t = 2, \dots, T \\
& q_i u_{it} \leq x_{it}^s \leq Q_i u_{it}, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S \\
& x_{it}^{s_1} = x_{it}^{s_2}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, \\
& \quad \forall s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\}, s_1 \neq s_2, B(s_1, t) = B(s_2, t) \\
& u_{it} \in \{0, 1\}, t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

子問題 (LSUC( $i$ )) を解くことを考える。子問題の目的関数を最小化する  $x_{it}^s$  を求めるために、次の問題 (GO( $i, s, t$ ): generation optimization for unit  $i$  under scenario  $s$  at time  $t$ ) を  $s = 1, \dots, S, t = \mathcal{T}(s), \dots, T$  について解く。(LSUC( $i$ )) は需要充足条件  $\sum_{i=1}^I x_{it}^s \geq d_t^s$  (4) を緩和しているため、目的関数値を最小化する発電機の出力  $x_{it}^s$  は、発電機の起動停止  $u_{it}$  とは独立に求められるためである。問題 (GO( $i, s, t$ )) は2次計画問題であり、その解を  $x_{it}^{*s}$  とする。解  $x_{it}^{*s}$  はシナリオ  $s$  の分岐点以降の  $t \geq \mathcal{T}(s)$  において、時間  $t$  におけるシナリオ  $s$  の生起確率を  $p_s = \sum_{s' \in B(s,t)} p_{s'}$  と置き換えて求めているため予測不可能性条件を満たしていることに注意されたい。

$$\begin{aligned}
& \text{(GO}(i, s, t)\text{):} \min \left( \sum_{s' \in B(s,t)} p_{s'} \right) f_i(x_{it}^s) - \lambda_t^s x_{it}^s \\
& \text{subject to } q_i \leq x_{it}^s \leq Q_i
\end{aligned}$$

続いて、最適な起動停止スケジュール  $u_{it}^*$  を  $x_{it}^{*s}$  を用いて動的計画法 (dynamic programming) により (1) から求める。

について解いて実行可能解を生成する。

$$C_i(t, k) = \begin{cases} C_i(t+1, k+1) + \sum_{s \in \{s'' | \mathcal{T}(s'') \leq t\}} \left\{ \left( \sum_{s' \in B(s, t)} p_{s'} \right) f_i(x_{it}^{*s}) - \lambda_t^s x_{it}^{*s} \right\} & \text{if } 1 \leq k < L_i \\ \min \left[ C_i(t+1, k) + \sum_{s \in \{s'' | \mathcal{T}(s'') \leq t\}} \left\{ \left( \sum_{s' \in B(s, t)} p_{s'} \right) f_i(x_{it}^{*s}) - \lambda_t^s x_{it}^{*s} \right\}, \right. \\ \left. C_i(t+1, k+1) + \sum_{s \in \{s'' | \mathcal{T}(s'') \leq t\}} \left\{ \left( \sum_{s' \in B(s, t)} p_{s'} \right) f_i(x_{it}^{*s}) - \lambda_t^s x_{it}^{*s} \right\} \right] & \text{if } k = L_i \\ C_i(t+1, k+1) & \text{if } L_i < k < L_i + l_i \\ \min \{ C_i(t+1, k), C_i(t+1, 1) + g_i(0, 1) \} & \text{if } k = L_i + l_i \end{cases} \quad (1)$$

発電機  $i$  がとり得る状態  $k$  の個数は  $L_i + l_i$  であり、 $k = 1, \dots, L_i$  は稼働状態、残りの  $k = L_i + 1, \dots, L_i + l_i$  は停止状態を表す。  $C_i(t, k)$  を、発電機  $i$  が時間  $t$  において状態  $k$  である時、時間  $t$  から時間  $T$  までにかかる最小費用と定義する。平均燃料費の計算には、 $t$  が分岐点以降となるシナリオ  $s \in \{s'' | \mathcal{T}(s'') \leq t\}$  のみに関して、 $p_s = \sum_{s' \in B(s, t)} p_{s'}$  と置き換えて計算していることにより、予測不可能性条件が満たされる。この関係式を  $t = T$  から  $t = 1$  まで計算することにより、子問題 (LSUC( $i$ )) の最適解が求められる。図3に動的計画法の計算の過程を図示する。黒丸と白丸はそれぞれ、発電機が起動中であることと停止中であることを示す。矢印は時間  $t$  から時間  $t+1$  への時間的な推移を表す。最も下にある黒丸は、その時点において発電機が起動することを表し、逆に最も下にある白丸は、その時点において発電機が停止し始めることを表す。時間  $t$  において起動する発電機は、次の時間  $t+1$  において、起動して2時間を表す下から2番目の黒丸に移る。

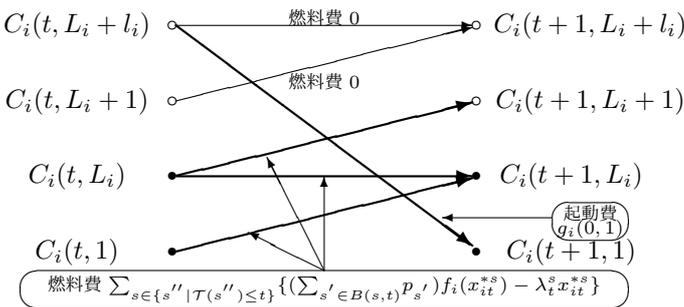


図 3: 動的計画法の計算 ( $L_i = l_i = 2$  の場合)

このようなラグランジュ緩和問題 (LSUC) とその子問題 (LSUC( $i$ )) を解いて求められた解は需要充足条件を満たすとは限らないため、次の経済負荷配分問題 (ELD: economic load dispatching problem) を  $s = 1, \dots, S, t = \mathcal{T}(s), \dots, T$

$$\begin{aligned} \text{(ELD): } \min \quad & \sum_{i=1}^I f_i(x_{it}^s) u_{it}^* \\ \text{subject to } \quad & \sum_{i=1}^I x_{it}^s = d_t^s \\ & q_i u_{it}^* \leq x_{it}^s \leq Q_i u_{it}^*, i = 1, \dots, I \end{aligned}$$

出力の上下限制約  $q_i u_{it}^* \leq x_{it}^s \leq Q_i u_{it}^*, i = 1, \dots, I$  がない場合、(ELD) はラグランジュの未定乗数法 (Lagrange's method of undetermined multipliers) を用いて解くことができる。未定乗数を  $\lambda$  とし (後述するラムダ反復法の名前に合わせるため、緩和問題を導くために用いたラグランジュ乗数と同じ記号の  $\lambda$  を用いていることに注意されたい)、 $L = \sum_{i=1}^I f_i(x_{it}^s) u_{it}^* - \lambda (\sum_{i=1}^I x_{it}^s - d_t^s)$  と定めると、 $f_i(x_{it}^s)$  は凸関数であるため、最適解は (2) と (3) を満たす。

$$\frac{\partial L}{\partial x_{it}^s} = \frac{df_i(x_{it}^s)}{dx_{it}^s} u_{it}^* - \lambda = 0, i = 1, \dots, I \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^I x_{it}^s - d_t^s = 0 \quad (3)$$

式 (2) は、 $u_{it}^* = 1$  である稼働中の全ての発電機の増分燃料費 (incremental fuel cost)  $\frac{df_i(x_{it}^s)}{dx_{it}^s}$  が等しいことを表す。最適解を与える  $\lambda$  を 2 分探索 (binary search) を利用して求めるのがラムダ反復法 (lambda iteration method) である。ラムダ反復法のアルゴリズムと 2 分探索の概要を図 4 と図 5 に示す。

- **ステップ 0.**  $\sum_{i=1}^I q_i \hat{u}_{it} - d_t^s < 0$  と  $\sum_{i=1}^I Q_i \hat{u}_{it} - d_t^s > 0$  が満たされると仮定する。  $\underline{\lambda} = f'_i(q_i) u_{it}^*$ ,  $\bar{\lambda} = f'_i(Q_i) u_{it}^*$  とする。
- **ステップ 1.**  $\hat{x}_{it}^s$  を  $f'_i(x_{it}^s) u_{it}^* - \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} = 0$  の解とする。  $\hat{x}_{it}^s < q_i$  ならば、 $\hat{x}_{it}^s = q_i$  とし、 $\hat{x}_{it}^s > Q_i$  ならば、 $\hat{x}_{it}^s = Q_i$  とする。
- **ステップ 2.**  $\sum_{i=1}^I \hat{x}_{it}^s - d_t^s < 0$  ならば  $\lambda = \underline{\lambda} + \frac{\bar{\lambda} - \underline{\lambda}}{2}$ ,  $\sum_{i=1}^I \hat{x}_{it}^s - d_t^s > 0$  ならば  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda} - \frac{\bar{\lambda} - \underline{\lambda}}{2}$  とする。ステップ 1 へ。

図 4: ラムダ反復法のアルゴリズム

問題 (LSUC) の解は元問題 (SUC) の最適目的関数値の下界を与える。続いて、(LSUC) の解から劣勾配法により下界値を上昇させる。反復  $l$  から  $l+1$  へと進むとき、ラグランジュ乗数は次の式により更新される。

$$\lambda^{l+1} = \lambda^l + \alpha_l \xi^l \quad (4)$$

$\alpha_l$  はステップサイズである。  $\xi^l$  は  $L(\lambda)$  の  $\lambda = \lambda^l$  における劣勾配であり、次の不等式を満たす。

$$L(\lambda) \leq L(\lambda^l) + (\lambda - \lambda^l) \xi^l \quad (5)$$

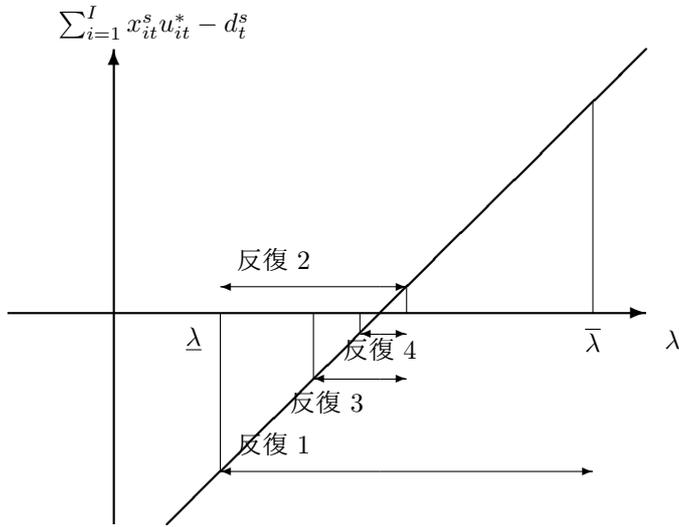


図 5: ラムダ反復法における 2 分探索

$L(\lambda)$  は凹関数であることに注意されたい. 問題 (LSUC) においては,

$$\xi_t^l = -\left(\sum_{i=1}^I x_{it}^{*s} - d_t^s\right) \quad (6)$$

である. 大域的な収束のためには, 次の関係を満たさなければならない.

$$\alpha_l \|\xi^l\| \rightarrow 0 \text{ かつ } \sum_l \alpha_l \|\xi^l\| \rightarrow 0 \quad (7)$$

ステップサイズの設定には次の公式が用いられることが多い.

$$\alpha_l = \frac{L^* - L(\lambda^l)}{\|\xi^l\|^2} \quad (8)$$

ただし,  $L^*$  は (LSUC) の最適解であるため, あらかじめその値を知ることはできない. そのため, 理論的な収束性は保証できないが次の公式によりステップサイズを設定する.

$$\alpha_l = \frac{\theta^l (UB - L(\lambda^l))}{\|\xi^l\|^2} \quad (9)$$

ここで  $UB$  は (SUC) の最適目的関数値の上界値であり,  $\theta^l$  は  $0 < \theta^l < 2$  を満たすように選ばれる. 問題 (SUC) を解くアルゴリズムを図 6 に示す.

## 6 起動停止問題に対する数値実験

設備数  $I = 10$ , 運用時間数  $T = 168$  時間 (7 日) のシステムを対象として数値実験を行った. 1 時間毎の 1 週間の想定需要データをもとに, 表 1 のようにシナリオを与えた.

比較のため,  $S = 1$  である確定的な発電機起動停止問題についても解を求める. 確定的数理計画モデルでは, 16 シナリオの需要の期待値に需要の上昇分を加えた 1 つのシナリオが確率 1 で発生するものとする. 確定的問題から得られた起動停止 0-1 スケジュール  $\bar{u}_{it}$  を用いて, 費用の期待値を求めるという比較方法を行う. 費用の期待値は以下の 2 次計画問題 (ASCOP: average supply cost optimization problem)

- ステップ 0. 反復回数  $l = 0$  とし, 初期ラグランジュ乗数  $\lambda_t^{s^l}, s = 1, \dots, S, t = T(s), \dots, T$  が与えられている.
- ステップ 1. (LSUC( $i$ )),  $i = 1, \dots, I$  を解く. (GO( $i, s, t$ )),  $i = 1, \dots, I, s = 1, \dots, S, t = T(s), \dots, T$  より  $x_{it}^{*s}, i = 1, \dots, I, s = 1, \dots, S, t = T(s), \dots, T$  を求め, 動的計画法 (1) により  $u_{it}^*, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T$  を求める.
- ステップ 2. ラムダ反復法により出力  $x_{it}^{*s}, t = T(s), \dots, T, s = 1, \dots, S$  を修正する.
- ステップ 3. ラグランジュ乗数更新公式 (4) により, 乗数を更新する.
- ステップ 4. 反復回数  $l = l + 1$  とする. ステップ 1. へ.

図 6: ラグランジュ緩和法のアルゴリズム

の最適解として求められる. 椎名 [15] では, 問題 (ASCOP) を AMPL [4] を用いて記述し, ILOG CPLEX10.0 を用いて解を求めた.

(ASCOP):

$$\min \sum_{s=1}^S p_s \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T f_i(x_{it}^s) \bar{u}_{it} + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T g_i(\bar{u}_{i,t-1}, \bar{u}_{i,t})$$

subject to

$$\sum_{i=1}^I x_{it}^s \geq d_t^s, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S$$

$$q_i \bar{u}_{it} \leq x_{it}^s \leq Q_i \bar{u}_{it}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S$$

$$x_{it}^{s_1} = x_{it}^{s_2}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T,$$

$$\forall s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\}, s_1 \neq s_2, B(s_1, t) = B(s_2, t)$$

シナリオの個数は  $S = 16$  であり, 図 7 の構造を持つ.

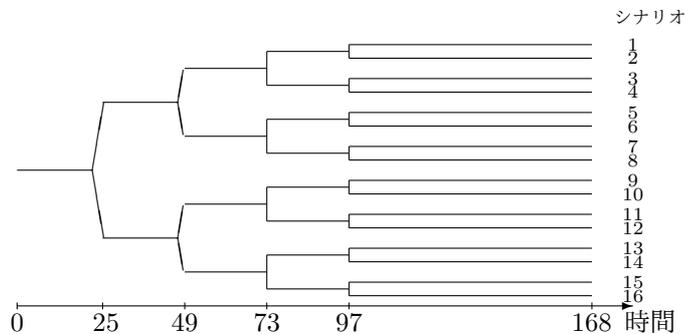


図 7: 需要変動シナリオツリー

確定的問題としては, 月火水木の各曜日の需要に対応する需要上昇率を供給予備率として (5%, 10%, 10%, 5%) (表 1 の 16 個のシナリオにおける需要の平均値に対応) から

表 1: 需要変動シナリオ

シナリオ	確率	時間			
		25-48 月曜	49-72 火曜	73-96 水曜	97-120 木曜
1	0.0625	0	0	0	0
2	0.0625	0	0	0	+10%
3	0.0625	0	0	+20%	0
4	0.0625	0	0	+20%	+10%
5	0.0625	0	+20%	0	0
6	0.0625	0	+20%	0	+10%
7	0.0625	0	+20%	+20%	0
8	0.0625	0	+20%	+20%	+10%
9	0.0625	+10%	0	0	0
10	0.0625	+10%	0	0	+10%
11	0.0625	+10%	0	+20%	0
12	0.0625	+10%	0	+20%	+10%
13	0.0625	+10%	+20%	0	0
14	0.0625	+10%	+20%	0	+10%
15	0.0625	+10%	+20%	+20%	0
16	0.0625	+10%	+20%	+20%	+10%

(10%, 20%, 20%, 10%) (表 1 において最も需要の大きい第 16 シナリオに対応) まで幅 (1%, 2%, 2%, 1%) で上昇させた 6 個の問題について考える。数値実験の結果を表 2 に示す。確率計画問題 (SUC) は完全にコースを持たないため、確定的な数理計画問題を解いて得られた 0-1 スケジュールに対しては、問題 (ASCOP) の解は必ずしも存在しないということに注意されたい。以下の結果は全て 10000 回のラグランジュ緩和法の反復を繰り返したものである。ギャップの値は以下のように定義される。

$$\text{ギャップ} = \frac{\text{暫定最良目的関数値} - \text{下界値}}{\text{暫定最良目的関数値}} \times 100 \quad (10)$$

確定的な数理計画モデルにおいては、需要に対する予備率が (5%, 10%, 10%, 5%) から (8%, 16%, 16%, 8%) まで上昇させた 4 つの問題を解いて得られる起動停止スケジュールからは問題 (ASCOP) の実行可能解は得られない。すなわち、16 個のシナリオで需要の満たされないものが存在することになる。需要上昇率を (9%, 18%, 18%, 9%), (10%, 20%, 20%, 10%) とした残りの 2 つの問題の解を用いると、問題 (ASCOP) は実行可能になる。これらの (ASCOP) の目的関数値と確率計画モデルの目的関数値を比較する。確率計画法によると従来の確定的数理計画モデルに比べ、約  $4.89\% = 100 \times (1 - 3669641/3858235)$  安い費用の発電機の起動停止スケジュールを求めることが可能となった。得られた起動停止スケジュールを以下の図 8 に示す。

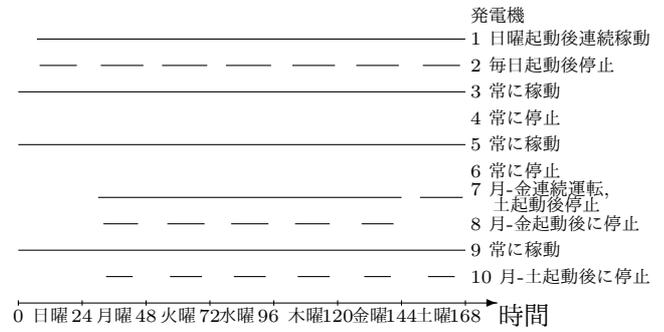


図 8: 起動停止スケジュール

## 7 解法とモデルの拡張

本論文では、発電機起動停止問題に対して現実のシステムの運用を反映させ、かつ電力需要の不確実性を考慮した確率計画モデルを示した。本モデルにより、需要変動による供給費用コスト上昇のリスクを回避することができる。ラグランジュ緩和法による解法によると、同じ性能の発電機に対しては同じ起動停止スケジュールが得られてしまうということが指摘されている (Takriti-Birge [19])。Shiina-Birge [13] は、列生成法 (column generation) を用いてスケジュールを生成する方法を示した。列生成法によると、同性能の発電機に対しても異なるスケジュールが得られる。Shiina [12] では、ラグランジュ緩和法と列生成法を 2 段階に適用する方法を示した。

電力市場は競争市場へと移行しつつあり、電力自由化以降の電力取引の形態は、次の 2 つに大別される (横山 [25])。

- 電力会社—顧客との相対契約による従来と同様の電力供給
- 電力プールによる取引

プール取引とは、ある地域内の供給事業者が、プールと呼ばれる電力市場から電力を購入するものである。プール市場では、発電側と需要側の入札を受けて、取引量と取引価格が決定される。

電力自由化後には、多くの発電事業者が新たに市場に参加すると予想されるが、その場合既存の電気事業者は、新規参入した発電事業者の発電機を制御することができない。このような状況を取り扱う起動停止問題は、今後の研究課題として重要であり、詳しくは Hobbs-Rothkopf-O'Neill-Chao [5] などを参照されたい。例えば、前日市場と呼ばれる電力市場では翌日の 24 時間の 1 時間毎の電力価格と市場に参加している電気事業者の発電割当が決定される。この市場での取引の結果、電気事業者に割り当てられる発電割当分と電気事業者が市場に売却できる電力量は不確実となる。Shiina-Watanabe [14] は、市場での取引を考慮した確率計画モデルを示したが、モデルの更なる発展が望まれる。

エネルギー分野においては、元来安定的な供給を目指して数理計画法 (mathematical programming) が用いられる。電気事業者が自ら計画的に供給を停止するようなことはあってはならない。自らの失策による供給停止を計画停電と呼ぶことは、誤りであるということをつけ加えておきたい。

表 2: 数値実験の結果

モデル	暫定最良 目的関数値	下界値	ギャップ (%)	(ASCOP)
確率計画 (提案法)	3669641	3574354	2.60	-
確定的 (5%,10%,10%,5%)	3661903	3565734	2.63	実行不可能
確定的 (6%,12%,12%,6%)	3690471	3599839	2.46	実行不可能
確定的 (7%,14%,14%,7%)	3723632	3634030	2.40	実行不可能
確定的 (8%,16%,16%,8%)	3752530	3668190	2.25	実行不可能
確定的 (9%,18%,18%,9%)	3788842	3702357	2.28	3858235
確定的 (10%,20%,20%,10%)	3829294	3735353	2.45	3858235

## 参考文献

- [1] J. F. Bard. Short-term scheduling of thermal-electric generators using Lagrangian relaxations. *Operations Research*, Vol. 36, pp. 756–766, 1988.
- [2] D. P. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, 1982.
- [3] J. K. Delson and S. M. Shahidehpour. Linear programming applications to power system economics, planning and operations. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 7, pp. 1155–1163, 1992.
- [4] R. Fourer, D. M. Gay, and B. W. Kernighan. *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. Scientific Press, 1993.
- [5] B. F. Hobbs, M. H. Rothkopf, R. P. O’Neill, and H.-P. Chao, editors. *The Next Generation of Electric Power Unit Commitment Models*. Kluwer Academic, 2001.
- [6] J. A. Momoh. *Electric Power Applications of Optimization*. Marcel Dekker, New York, NY, 2001.
- [7] J. A. Muckstadt and S. A. Koenig. An application of lagrangian relaxation to scheduling in power-generation systems. *Operations Research*, Vol. 25, pp. 387–403, 1977.
- [8] R. T. Rockafellar and R.J.-B. Wets. Scenarios and polycy aggregation in optimization under uncertainty. *Mathematics of Operations Research*, Vol. 16, pp. 119–1147, 1991.
- [9] 関根泰次, 林宗明, 芹澤康夫, 豊田淳一, 長谷川淳. 電力系統工学. コロナ社, 東京, 1979.
- [10] M. Shahidehpour, H. Yamin, and Z. Li. *Market Operations in Electric Power Systems -forecasting, scheduling and risk management-*. John Wiley & Sons, 2002.
- [11] G. B. Sheble and G. N. Fahd. Unit commitment literature synopsis. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 11, pp. 128–135, 1994.
- [12] T. Shiina. A Lagrangian relaxation and column generation algorithm for stochastic unit commitment problem. *Journal of Statistics & Management Systems*, Vol. 7, pp. 519–535, 2004.
- [13] T. Shiina and J. R. Birge. Stochastic unit commitment problem. *International Transactions in Operational Research*, Vol. 11, pp. 19–32, 2004.
- [14] T. Shiina and I. Watanabe. Lagrangian relaxation method for price-based unit commitment problem. *Engineering Optimization*, Vol. 36, pp. 705–719, 2004.
- [15] 椎名孝之. 確率計画法による発電機起動停止問題. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 13, pp. 181–190, 2003.
- [16] 椎名孝之. 電気事業への確率計画法の応用. 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会誌), Vol. 16, pp. 528–539, 2004.
- [17] 椎名孝之, 久保幹雄. 電力設備補修計画に対する切除平面/分枝限定法. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 8, pp. 157–168, 1998.
- [18] S. Takriti and J. R. Birge. Lagrangian solution techniques and bounds for loosely coupled mixed-integer stochastic programs. *Operations Research*, Vol. 48, pp. 91–98, 2000.
- [19] S. Takriti and J. R. Birge. Using integer programming to refine lagrangian-based unit commitment solutions. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 15, pp. 151–156, 2000.
- [20] S. Takriti, J. R. Birge, and E. Long. A stochastic model for the unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 11, pp. 1497–1508, 1996.
- [21] S. Takriti, B. Krasenbrink, and L. S. Y. Wu. Incorporating fuel constraints and electricity spoy prices into the stochastic unit commitment problem. *Operations Research*, Vol. 48, pp. 268–280, 2000.
- [22] 田村康男 (編). 電力システムの計画と運用. オーム社, 1991.
- [23] A. J. Wood and B. J. Wollenberg. *Power Generation, Operation and Control*. John Wiley & Sons, New York, NY, second edition, 1996.
- [24] Z. A. Yamayee. Maintenance scheduling: Description, literature survey and interface with overall operations scheduling. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS101, pp. 2770–2779, 1982.
- [25] 横山隆一 (編). 電力自由化と技術開発. 東京電機大学出版社, 2001.