多段階確率計画問題の解法

Algorithms to solve Multistage Stochastic Programming Problem

椎名 孝之　Takayuki SHIINA

This paper describes a multistage stochastic programming problem. The multistage stochastic programming model is quite useful for a variety of design and operational problems. By utilizing the special property of the problem, block separable recourse, the problem is transformed into a two-stage stochastic program with recourse. The electric power capacity expansion problem is reformulated as a problem with first stage integer variables and continuous second stage variables. We propose an L-shaped algorithm to solve the problem. We also, consider the problems which do not have a block separable recourse. The scenario aggregation method can be applied to solve those problems. The mehods described in this paper promise to be useful in solving a variety of multistage problems.

キーワード: 確率計画法、リコースを有する確率計画問題、多段階確率計画問題、シナリオ集約法

1　確率計画問題

現実の生産計画などの問題を数理計画法によって最適化問題として定式化する場合，たとえば需要量などのような不確実要素を伴うパラメータを定数として扱うのが好ましくない場合がある．不確実な状況下での最適化を取り扱う確率計画法 [3, 5] は, Dantzig [4] の研究に起源を有する．罰金に対するリコースを含む確率計画問題 (SPR: stochastic program with recourse) を次のように定義する．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(SPR): min} & c^\top x + \mathcal{Q}(x) & \\
\text{subject to} & Ax = b, x \geq 0 & \\
& \mathcal{Q}(x) = E_{\tilde{\xi}}[Q(x, \tilde{\xi})] & \\
& Q(x,\xi) = \min\{q(\xi)^\top y(\xi) \mid & \\
& Wy(\xi) = h(\xi) - T(\xi)x, y(\xi) \geq 0\}, \xi \in \Xi &
\end{array}
$$

ただし，$m_1 \times n_1$ 次元行列 A，n_1 次元ベクトル c，m_1 次元ベクトル b は確定値として与えられている．これらに関連する n_1 次元変数ベクトル x は, 第 1 段階変数と呼ばれる．l 次元ベクトル $\tilde{\xi}$ は確率変数であり, その台を Ξ とし, ξ を $\tilde{\xi}$ の実現値とする．$\tilde{\xi}$ の実現値 ξ に対し，n_2 次元ベクトル $q(\xi)$, $m_2 \times n_1$ 次元行列 $T(\xi)$, m_2 次元ベクトル $h(\xi)$ の値が定まる．n_2 次元変数ベクトル $y(\xi)$ は, 第 2 段階変数と呼ばれる．$m_2 \times n_2$ 次元行列 W は, リコース行列と呼ばれる．リコース関数 $Q(x, \xi)$ を定義する線形計画問題は第 2 段階問題あるいはリコース問題と呼ばれ, 関数 $\mathcal{Q}(x)$ はリコース関数の期待値を表す．このようなリコースを有する確率計画問題は多段階確率計画問題へ拡張することができる．

本論文の目的は, 多段階の確率計画問題に対する分解原理に基づく解法を示すことである．現実の問題における決定は, 多段階にわたって繰り返されるものが多いため, 多段階確率計画問題の実用的な重要性は高い．第 2 節では, 多段階確率計画問題における意思決定の流れについて説明する．第 3 節では, 多段階確率的線形計画問題について, 部分問題への分解が可能である場合に問題が満たすべき性質を明らかにし, 電源計画への応用例と問題の解法を示す．第 4 節では別の分解法である, シナリオ集約法を紹介する．

2　多段階確率計画問題における決定の流れ

前節で示した 2 段階のリコースを有する確率計画問題 (SPR) を多段階確率計画問題へ拡張する．2 段階モデルでは, 第 1 段階に 1 段階変数 x を決定し, 第 2 段階において確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値 ξ に応じて 2 段階変数 $y(\xi)$ を決定するものであった．2 段階モデルを拡張して, $H+1$ 段階にわたる決定 $x^0, x^1, \ldots, x^H$ を行うものとする．第 0 段階の決定 x^0 を行った後, 第 1 段階において, 台 Ξ^1 をもつ確率変数 $\tilde{\xi}^1$ が値 ξ^1 をとるとき, 決定 $x^1(\xi^1)$ を行う．同様に, 第 $t(1 \le t \le H)$ 段階において, 台 Ξ^t をもつ確率変数 $\tilde{\xi}^t$ が値 ξ^t をとるとき, 決定 $x^t(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^t)$ を行う．すなわち, 第 $t(1 \le t \le H)$ 段階の決定 x^t は, 確率変数 $\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^t$ の履歴 $\xi^1, \ldots, \xi^t$ と過去の決定 $x^0, x^1, \ldots, x^{t-1}$ に依存する．多段階確率計画問題における決定の流れを図 1 に示す．

第 0 段階 決定 x^0 を行う．
第 1 段階 確率変数 $\tilde{\xi}^1$ が値 ξ^1 をとるとき, 決定 $x^1(\xi^1)$ を行う．
第 2 段階 確率変数 $\tilde{\xi}_2$ が値 ξ_2 をとるとき, 決定 $x^2(\xi^1, \xi^2)$ を行う．
$\vdots$
第 H 段階 確率変数 $\tilde{\xi}^H$ が値 ξ^H をとるとき, 決定 $x^H(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^H)$ を行う．

図 1: 多段階確率計画問題における決定の流れ

目的関数は, 第 0 段階費用 $q^0(x^0)$ と第 1 段階から第 H 段階までのリコース費用の総和である．第 t 期のリコース関数 $Q^t(x^0, \ldots, x^{t-1}, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^t), 1 \le t \le H$ を, 以下のように定義する．

$$Q^t(x^0, \ldots, x^{t-1}, \xi^1, \ldots, \xi^t)$$
$$= \min_{x^t}\{q^t(x^t) \mid g^t(x^0, \ldots, x^{t-1}, x^t, \xi^1, \ldots, \xi^t) \le 0\}$$

ただし, $g^t(x^0, \ldots, x^t, \xi^1, \ldots, \xi^t) \le 0$ は, 第 t 期の決定変数 x^t が満たすべき制約条件である．多段階確率計画問題 (MSP) を以下のように定義する．

(多段階確率計画問題 MSP)
$$\min q^0(x^0)$$
$$+\sum_{t=1}^{H} E_{\tilde{\xi}^1 \ldots \tilde{\xi}^t}[Q^t(x^0, \ldots, x^{t-1}, \tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^t)]$$
subject to
$$g^0(x^0) \le 0$$
$$Q^t(x^0, \ldots, x^{t-1}, \xi^1, \ldots, \xi^t)$$
$$= \min_{x^t}\{q^t(x^t) \mid g^t(x^0, \ldots, x^t, \xi^1, \ldots, \xi^t) \le 0\},$$
$$\xi^1 \in \Xi^1, \ldots, \xi^t \in \Xi^t, 1 \le t \le H$$

多段階問題の基礎的な定式化に関しては, Kall–Mayer [6], Olsen [9, 10, 11] などを参照されたい．目的関数が線形の場合は, Birge [1] により L-shaped 法を多段階確率計画問題に応用した入れ子式分解法 (nested decomposition method) が示されている．Louveaux [7] は, 目的関数が凸 2 次関数である多段階確率計画問題を取り扱った．Birge–Donohue–Holmes–Svintsitski [2] は, 並列計算による入れ子式分解法のアルゴリズムを示した．

3　多段階確率的線形計画問題

3.1　2 段階問題への変形

以下の多段階確率的線形計画問題 (MSLP: multistage stochastic linear programming problem) を考える．なお, 本節では Birge–Donohue–Holmes–Svintsitski [2] の記法に従い, ボールド体で表される記号は確率変数に従うパラメータまたは決定変数を表し, 通常のローマン体で表される記号は確率変数に依存しないパラメータまたは決定変数を表すものとする．

(MSLP): $\min c^{0\top} x^0$
$$+E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}^1}[\min \boldsymbol{c}^{1\top} \boldsymbol{x}^1 + \cdots + E_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}^H}[\min \boldsymbol{c}^{H\top} \boldsymbol{x}^H] \cdots]$$
subject to
$$W^0 x^0 = h^0$$
$$\boldsymbol{T}^0 x^0 + W^1 \boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{h}^1$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{T}^{H-1} \boldsymbol{x}^{H-1} + W^H \boldsymbol{x}^H = \boldsymbol{h}^H$$
$$x^0 \ge 0, \boldsymbol{x}^t \ge 0, t = 1, \ldots, H$$

問題に含まれる c^0, h^0, W^0 はそれぞれ, n_0, m_0 次元定数ベクトル, および $m_t \times n_t$ 次元定数行列である．第 t 段階の目的関数と制約に含まれる $\boldsymbol{c}^t, \boldsymbol{h}^t, \boldsymbol{T}^{t-1}$ はそれぞれ, n_t, m_t 次元確率変数ベクトル, および $m_t \times n_{t-1}$ 次元確率変数行列であり, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^t = (\boldsymbol{c}^t, \boldsymbol{h}^t, \boldsymbol{T}^t)$ と定める．確率変数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^t$ はとりうる値の個数が有限である離散分布に従うと仮定し,

確率空間 $(\Xi^t, \sigma(\Xi^t), P)$ は与えられているものとする．ただし, Ξ^t は $\tilde{\xi}^t$ の台であり, $\sigma(\Xi^t)$ は Ξ^t の部分集合の集まりを表す．$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^t = (\boldsymbol{T}^t, \boldsymbol{h}^t, \boldsymbol{c}^t)$ の実現値を $\xi_s^t = (T_s^t, h_s^t, c_s^t)$ とすると, $\Xi^t = \{\xi_s^t = (T_s^t, h_s^t, c_s^t), s = 1, \ldots, k_t\}$ と表すことができる．ただし k_t は $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^t$ のとりうる値の個数を表す．

段階 t までのシナリオ (stage t scenario) を第 1 段階から第 t 段階にわたる確率変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^t (1 \leq t \leq H)$ の実現値の組 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_t)$ と定義する．図 2 における通常の意味でのシナリオ (scenario) は, 最終段階 H までのシナリオとなることに注意されたい．段階 t までのシナリオは, 有向グラフであるシナリオツリー上の根から長さ t の有向道に対応する．これより, シナリオツリー上の段階 t におけるノードは, 段階 t までのシナリオとみなすことができる．

図 2 において, 第 1 段階までのシナリオの数は 2 個であり, 第 2 段階までのシナリオの数は 4 個である．第 $t-1$ 段階における s 番目のノードの子の集合を $D^t(s)$ と表す．集合 $D^t(s)$ に含まれる添字のノードは, 段階 t までのシナリオに相当する．逆に, 第 t 段階における s 番目のノードの親を $\alpha(s,t)$ と表す．添字 $\alpha(s,t)$ を持つノードは, 第 $t-1$ 段階までのシナリオに相当する．この関係を図 3 に示す．

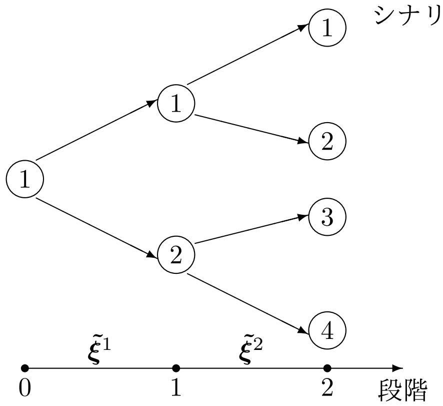

図 2: 段階 t までのシナリオ

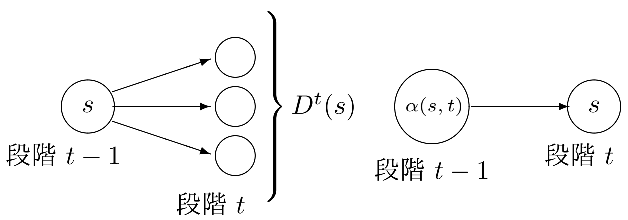

図 3: シナリオツリーにおける親子関係

このように段階数が増えるに従って, シナリオ数が増大するため, 問題 (MSLP) に対して L-shaped 法を直接応用すると, 計算時間が非常に長くなるおそれがある．そのため, 問題の特殊構造を考慮した解法が考えられている．ここでは, Louveaux [8] によって示されたブロック分解可能リコース (block separable recourse) という性質を紹介する．

定義 1. 多段階確率的線形計画問題 (MSLP) において, 第 t 段階の決定変数 $\boldsymbol{x}^t$ を $\boldsymbol{x}^t = (\boldsymbol{w}^t, \boldsymbol{y}^t)$ と 2 つの成分に分け, $\boldsymbol{w}^t$ を総合決定 (aggregate level decision) $\boldsymbol{y}^t$ を詳細決定 (detailed level decision) とよぶ．このとき, 次の 3 つの条件が満たされるとき, 問題 (MSLP) はブロック分解可能リコースを有するという．

1. 第 t 段階の目的関数は総合決定 $\boldsymbol{w}^t$ と詳細決定 $\boldsymbol{y}^t$ の項に分離可能である．${\boldsymbol{c}^t}^\top \boldsymbol{x}^t = {\boldsymbol{r}^t}^\top \boldsymbol{w}^t + {\boldsymbol{q}^t}^\top \boldsymbol{y}^t$.

2. 第 t 期のリコース行列に相当する W^t がブロック対角 (block diagonal) である．$W^t = \begin{pmatrix} A^t & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix}$, ただし A^t は総合決定 $\boldsymbol{w}^t$ に対応し, B^t は詳細決定 $\boldsymbol{y}^t$ に対応する．

3. 制約に含まれる行列 $\boldsymbol{T}^t$ と右辺ベクトル $\boldsymbol{h}^t$ は以下のように表すことができる．$\boldsymbol{T}^t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}^t & 0 \\ \boldsymbol{S}^t & 0 \end{pmatrix}$ かつ $\boldsymbol{h}^t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}^t \\ \boldsymbol{d}^t \end{pmatrix}$ ただし, 各要素は $\boldsymbol{x}^t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}^t \\ \boldsymbol{y}^t \end{pmatrix}$ の各成分への分割に対応する．

総合決定は, 次段階以降の決定に影響を及ぼす決定であり, 詳細決定は, 当該期のみの決定で次段階以降の決定に影響を及ぼさない．問題 (MSLP) がブロック分解可能リコースを有するとき, 問題は以下の (MSLP-BSR) と表すことができる．

$$
\left|
\begin{array}{l}
\textbf{(MSLP-BSR)} : \min {r^0}^\top w^0 + {q^0}^\top y^0 \\
+E_{\tilde{\xi}^1}[\min({\boldsymbol{r}^1}^\top \boldsymbol{w}^1 + {\boldsymbol{q}^1}^\top \boldsymbol{y}^1) \\
\vdots \\
+E_{\tilde{\xi}^H}[\min({\boldsymbol{r}^H}^\top \boldsymbol{w}^H + {\boldsymbol{q}^H}^\top \boldsymbol{y}^H)] \cdots] \\
\text{subject to} \\
A^0 w^0 = b^0 \\
B^0 y^0 = d^0 \\
\boldsymbol{R}^0 w^0 + A^1 \boldsymbol{w}^1 = \boldsymbol{b}^1 \\
\boldsymbol{S}^0 w^0 + B^1 \boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{d}^1 \\
\vdots \\
\boldsymbol{R}^{H-1} \boldsymbol{w}^{H-1} + A^H \boldsymbol{w}^H = \boldsymbol{b}^H \\
\boldsymbol{S}^{H-1} \boldsymbol{w}^{H-1} + B^H \boldsymbol{y}^H = \boldsymbol{d}^H \\
w^0 \geq 0, \boldsymbol{w}^t \geq 0, t = 1, \ldots, H \\
y^0 \geq 0, \boldsymbol{y}^t \geq 0, t = 1, \ldots, H
\end{array}
\right.
$$

Louveaux [8] は, (MSLP-BSR) は 2 段階の確率的線形計画問題に帰着できることを示した．

定理 1. 問題 (MSLP-BSR) は, 全ての総合決定に含まれる変数を第 1 段階変数, 全ての詳細決定に含まれる変数を第 2 段階変数と定め, 第 t 期までのシナリオに関するリコース関数の期待値を $t = 1, \ldots, H$ に対して与えることにより, 2 段階確率的線形計画問題と等価になる.

問題 (MSLP-BSR) の展開形による定式化を以下に示す. 定理 1 より, この問題は 2 段階確率計画問題と等価である. ただし, 第 0 段階の決定を $w^{1,0} \equiv w^0, y^{1,0} \equiv y^0$ と定めた. また Q_1^0 は線形計画問題 $\min\{q^{1,0\top} y^{1,0} \mid B^0 y^{1,0} = d^0, y^{1,0} \geq 0\}$ の最適値を表す. 他の記号は, 表 1 のように定義した.

(MSLP-BSR): 展開形

$$
\begin{aligned}
&\min r^{1,0\top} w^{1,0} \\
&+\sum_{s=1}^{K_1} p_s^1 r^{s1\top} w^{s1} + \ldots + \sum_{s=1}^{K_H} p_s^H r^{sH\top} w^{sH} \\
&+Q_1^0 + \sum_{s=1}^{K_1} p_s^1 Q_s^1(w^{1,0}) + \ldots + \sum_{s=1}^{K_H} p_s^H Q_s^H(w^{\alpha(s,H),H-1}) \\
&\text{subject to} \\
&A^0 w^{1,0} = b^0 \\
&R^{\alpha(s,1),0} w^{s0} + A^1 w^{s1} = b^{s1}, s = 1, \ldots, K_1 \\
&\vdots \\
&R^{\alpha(s,H),H-1} w^{s,H-1} + A^H w^{sH} = b^{sH}, s = 1, \ldots, K_H \\
&w^0 \geq 0, w^{st} \geq 0, s = 1, \ldots, K_t, t = 1, \ldots, H \\
&Q_1^0 = \min\{q^{1,0} y^{1,0} \mid B^0 y^{1,0} = d^0, y^{1,0} \geq 0\} \\
&Q_s^t(w^{\alpha(s,t),t-1}) \\
&\quad = \min\{q^{st} y^{st} \mid \\
&\quad S^{\alpha(s,t),t-1} w^{\alpha(s,t),t-1} + B^t y^{st} = d^{st}, y^{st} \geq 0\}, \\
&\qquad s = 1, \ldots, K_t, t = 1, \ldots, H,
\end{aligned}
$$

表 1: 問題 (MSLP-BSR) における記号の定義

K_t	第 t 段階までのシナリオ数, $K_t = k_0 \times k_1 \times \cdots \times k_t, t = 1, \ldots, H, k_0 = 1$
(r^{st}, q^{st})	第 t 段階までのシナリオ s における目的関数の係数ベクトル
(R^{st}, S^{st})	第 t 段階までのシナリオ s における係数行列
p_s^t	第 t 段階までのシナリオ s が起こる確率

3.2 電源計画への応用

多段階確率的線形計画問題を応用した電源計画に対する多段階確率計画モデル (Shiina–Birge [13]) を示し, 前述の性質を利用した解法を示す.

計画の経済性を示す費用は, 次の 2 つの要素に分けられる. 最初の要素は, 発電設備を所有するために必要な固定費である. 固定費は, 設備の償却費, 発電所を維持するための人件費などから構成される. 2 つめは, 発電に要する経費 (変動費) である. 燃料費が変動費の主な構成要素となっている.

目的関数における固定費と変動費, さらに電力需要を確率変数と定義し, さらにこれらの確率変数はとりうる値の個数が有限の離散分布に従うものと仮定する. 発電所の建設を行うか否かの決定は, 0-1 変数で示される. 計画期間 (段階), 発電所の種類, 負荷持続曲線における負荷領域に対する添字を以下のように定義する.

- $t = 0, 1, \ldots, H$ 計画期間 (段階);
- $i = 1, \ldots, n$ 発電所の種類;
- $j = 1, \ldots, m$ 負荷持続曲線における負荷領域.

電源計画におけるパラメータ, 決定変数をそれぞれ, 表 2, 表 3 に示す.

表 2: 電源計画におけるパラメータ

a_i	発電所 i の利用率
g_i^t	段階 t における発電所 i に追加される容量 (段階 $t = 0$ 以前に決定済)
C_i^t	段階 t における発電所 i に拡張される容量の最大値
$\boldsymbol{r}_i^t$	段階 t における発電所 i の容量拡張費用
$\boldsymbol{f}_i^t$	段階 t における発電所 i の建設費
$\boldsymbol{q}_i^t$	段階 t における発電所 i の変動費
$\boldsymbol{d}_j^t$	段階 t における需要領域 j における電力需要
$\boldsymbol{\tau}_j^t$	段階 t における需要領域 j の持続時間

表 3: 電源計画における決定変数

$\boldsymbol{x}_i^t$	発電所 i への段階 t における追加容量
$\boldsymbol{w}_i^t$	発電所 i の段階 t における総容量
$\boldsymbol{v}_i^t$	$\begin{cases} 1, & \text{発電所 } i \text{ に段階 } t \text{ で容量が拡張} \\ 0, & \text{それ以外の場合} \end{cases}$
$\boldsymbol{y}_{ij}^t$	発電所 i の段階 t, 負荷領域 j における出力

多段階確率的電源計画問題において, $v_i^0, \boldsymbol{v}_i^t, w_i^0, \boldsymbol{w}_i^t, x_i^0, \boldsymbol{x}_i^t, i = 1, \ldots, n, t = 1, \ldots, H$ は総合決定であり, $\boldsymbol{y}_{ij}^t, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m, t = 1, \ldots, H$ は詳細決定である.

確率変数ベクトル $\tilde{\xi}^t = (\boldsymbol{r}_i^t, \boldsymbol{f}_i^t, \boldsymbol{q}_i^t, \boldsymbol{d}_j^t, \boldsymbol{\tau}_j^t)$ はとりうる値の個数が有限である離散分布に従うと仮定し, 確率空間 $(\Xi^t, \sigma(\Xi^t), P)$ は与えられているものとする. ただし, Ξ^t は $\tilde{\xi}^t$ の台であり, $\sigma(\Xi^t)$ は Ξ^t の部分集合の集まりを表す. $\tilde{\xi}^t = (\boldsymbol{r}_i^t, \boldsymbol{f}_i^t, \boldsymbol{q}_i^t, \boldsymbol{d}_j^t, \boldsymbol{\tau}_j^t)$ の実現値を $\xi_s^t = (r_i^{st}, f_i^{st}, q_i^{st}, d_j^{st}, \tau_j^{st})$ とすると, $\Xi^t = \{\xi_s^t = (r_i^{st}, f_i^{st}, q_i^{st}, d_j^{st}, \tau_j^{st}), s = 1, \ldots, k_t\}$ と表すことができる. ただし k_t は $\tilde{\xi}^t$ のとりうる値の個数を表す. ただし $(r^{1,0}, f^{1,0}) \equiv (r^0, f^0)$ と定めた.

定理 1 より, この問題は 2 段階確率計画問題に帰着できる. 次の多段階確率的電源計画問題に対する主問題を考える. ただし, 添字 s は段階 t までのシナリオ s を表し, θ_s^t は変動費であるリコース関数 $Q_s^t(w^{\alpha(s,t),t-1})$ の上界を表すものとする.

(多段階確率的電源計画問題に対する主問題)

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{n} (r_i^{1,0} w_i^{1,0} + f_i^{1,0} v_i^{1,0}) \\
&+ \sum_{s=1}^{K_1} p_s^1 \sum_{i=1}^{n} (r_i^{s1} w_i^{s1} + f_i^{s1} v_i^{s1}) \\
&\cdots + \sum_{s=1}^{K_H} p_s^H \sum_{i=1}^{n} (r_i^{sH} w_i^{sH} + f_i^{sH} v_i^{sH}) \\
&+ \sum_{s=1}^{K_1} p_s^1 \theta_s^1 + \ldots + \sum_{s=1}^{K_H} p_s^H \theta_s^H \\
&\text{subject to} \\
&w_i^{1,0} = x_i^{1,0}, \forall i \\
&w_i^{st} = w_i^{\alpha(s,t),t-1} + x_i^{st}, \forall i, s = 1, \ldots, K_t, t = 1, \ldots, H \\
&x_i^{st} \le C_i^t v_i^{st}, \forall i, s = 1, \ldots, K_t, t = 0, 1, \ldots, H \\
&v_i^{st} \in \{0, 1\}, \forall i, s = 1, \ldots, K_t, t = 0, 1, \ldots, H \\
&w_i^{st} \ge 0, \forall i, s = 1, \ldots, K_t, t = 0, 1, \ldots, H \\
&x_i^{st} \ge 0, \forall i, s = 1, \ldots, K_t, t = 0, 1, \ldots, H
\end{aligned}
$$

この定式化では, リコース関数 $Q_s^t(w^{\alpha(s,t),t-1})$ はあらかじめ与えられていない. そのため, $\theta_s^t \ge Q_s^t(w^{\alpha(s,t),t-1})$ を近似する最適性カットを加える. 多段階確率的電源計画問題に対する主問題は, 混合 0-1 整数計画問題であるため, 分枝限定法などの解法により解くことができる. 主問題の解を $v_i^{*st}, w_i^{*st}, x_i^{*st}$, θ_s^{*t} とする. すると, 主問題の解である $w_i^{*\alpha(s,t),t-1}$ に対して, 段階 t までのシナリオ s に対するリコース問題を以下のように定義することができる.

(段階 t までのシナリオ s に対するリコース問題)

$$
\begin{aligned}
&Q_s^t(w^{\alpha(s,t),t-1}) \\
&= \min \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} q_i^{st} \tau_j^{st} y_{ij}^{st} \mid \sum_{i=1}^{n} y_{ij}^{st} = d_j^{st}, j = 1, \ldots, m \\
&\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^{st} \le a_i(g_i^t + w_i^{\alpha(s,t),t-1}), i = 1, \ldots, n \\
&y_{ij}^{st} \ge 0, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m \Big\}
\end{aligned}
$$

段階 t までのシナリオ s に対するリコース問題が実行不可能であれば, 実行可能性カットが主問題に追加される. また, 段階 t までのシナリオ s に対するリコース問題が実行可能でありかつ $\theta_s^{*t} \ge Q_s^t(w^{*\alpha(s,t),t-1})$ が成立しない場合, $Q_s^t(w^{\alpha(s,t),t-1})$ を近似する最適性カットが追加される. 段階 t までのシナリオ s に対するリコース問題の双対問題を以下に示す.

(段階 t までのシナリオ s における双対問題)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{m} d_j^{st} \lambda_j^{st} - \sum_{i=1}^{n} a_i (g_i^t + w_i^{\alpha(s,t),t-1}) \mu_i^{st} \\
\text{subject to} \quad & \lambda_j^{st} - \mu_i^{st} \le q_i^{st} \tau_j^{st}, j = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, n \\
& \mu_i \ge 0, i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

もし, $Q_s^t(w^{*\alpha(s,t),t-1}) = +\infty$ ならば, 主問題の解 $w^{*\alpha(s,t),t-1}$ は元問題の実行可能解ではない. この場合, 双対理論より $\sum_{j=1}^{m} d_j^{st} \hat{\lambda}_j^{st} - \sum_{i=1}^{n} a_i (g_i^t + w_i^{*\alpha(s,t),t-1}) \hat{\mu}_i^{st} > 0$ かつ $\hat{\lambda}_j^{st} - \hat{\mu}_i^{st} \le 0$ を満たす双対解 $\hat{\lambda}_j^{st}(j = 1, \ldots, m), \hat{\mu}_i^{st}(\ge 0, i = 1, \ldots, n)$ が存在する. 元問題で実行可能な $w^{\alpha(s,t),t-1}$ に対しては, $\sum_{i=1}^{n} y_{ij}^{st} = d_j^{st}(j = 1, \ldots, m), \sum_{j=1}^{m} y_{ij}^{st} \le a_i(g_i^t + w_i^{\alpha(s,t),t-1})(i = 1, \ldots, n)$ を満たす $y^{st} \ge 0$ が存在する. これらの制約に対しそれぞれ, $\hat{\lambda}_j^{st}(j = 1, \ldots, m)$, $-\hat{\mu}_i^{st}(i = 1, \ldots, n)$ をかけて加えることにより, 次の不等式が得られる.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{m} d_j^{st} \hat{\lambda}_j^{st} - \sum_{i=1}^{n} a_i (g_i^t + w_i^{\alpha(s,t),t-1}) \hat{\mu}_i^{st} \\
\le \quad & \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_j^{st} y_{ij}^{st} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \hat{\mu}_i^{st} y_{ij}^{st} \\
= \quad & \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (\hat{\lambda}_j^{st} - \hat{\mu}_i^{st}) y_{ij}^{st} \le 0
\end{aligned}
$$

実行不可能な $w^{*\alpha(s,t),t-1}$ はこの不等式を満たさない. なぜなら, $\sum_{j=1}^{m} d_j^{st} \hat{\lambda}_j^{st} - \sum_{i=1}^{n} a_i (g_i^t + w_i^{*\alpha(s,t),t-1}) \hat{\mu}_i^{st} > 0$ であるからである. よって, 実行可能性カットは次のようになる.

$$
\sum_{j=1}^{m} d_j^{st} \hat{\lambda}_j^{st} - \sum_{i=1}^{n} a_i (g_i^t + w_i^{\alpha(s,t),t-1}) \hat{\mu}_i^{st} \le 0 \tag{1}
$$

もし, $Q_s^t(w^{*\alpha(s,t),t-1})$ が有界な値をとるならば, リコース問題の最適解 $y_{ij}^{*st}(i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$ と双対問題の最適解 $\lambda_j^{*st}(j = 1, \ldots, m), \mu^{*st}(i = 1, \ldots, n)$ が得られ

る. 次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}\theta_s^t &\geq Q_s^t(w^{*\alpha(s,t),t-1})\\ &= \max\{\sum_{j=1}^m d_j^{st}\lambda_j^{st} - \sum_{i=1}^n a_i(g_i^t + w_i^{*\alpha(s,t),t-1})\mu_i^{st} \mid \\ &\quad \lambda_j^{st} - \mu_i^{st} \leq q_i^{st}\tau_j^{st}, j = 1,\ldots,m, i = 1,\ldots,n\\ &\quad \mu_i \geq 0, i = 1,\ldots,n\}\\ &= \sum_{j=1}^m d_j^{st}\lambda_j^{*st} - \sum_{i=1}^n a_i(g_i^t + w_i^{*\alpha(s,t),t-1})\mu_i^{*st}\end{aligned}$$

リコース関数を近似するため, $\theta_s^{*t} < Q_s^t(w^{*\alpha(s,t),t-1})$ となる $(w^{*\alpha(s,t),t-1}, \theta_s^{*t})$ を排除する最適性カットを主問題に追加する.

$$\theta_s^t \geq \sum_{j=1}^m d_j^{st}\lambda_j^{*st} - \sum_{i=1}^n a_i(g_i^t + w_i^{\alpha(s,t),t-1})\mu_i^{*st} \quad (2)$$

多段階確率的電源計画問題に対する L-shaped 法のアルゴリズムを図 4 に示す.

ステップ 1. 主問題を解き, 解 $w_i^{*st}(i = 1,\ldots,n, s = 0,1,\ldots,K_t, t = 1,\ldots,H)$, $\theta_s^{*t}(s = 1,\ldots,K_t, t = 1,\ldots,H)$ を得る.
ステップ 2. 段階 t までのシナリオ s $(s = 1,\ldots,K_t, t = 1,\ldots,H)$ に対するリコース問題を解く.
ステップ 3. 段階 t までのシナリオ s に対するリコース問題が実行不可能ならば, 実行可能性カット (1) を主問題に追加する. ステップ 1 へ.
ステップ 4. リコース関数 $Q_{s'}^t(w^{*s,t-1})(\forall s' \in D^t(s)$, $s = 1,\ldots,K_t, t = 0,\ldots,H-1)$ をの値を求め, $\theta_{s'}^{*t} < (1-\varepsilon)$ $Q_{s'}^t(w^{*s,t-1})(s' \in D^t(s))$, ならば, 最適性カット (2) を主問題に追加する ($\varepsilon > 0$: 許容誤差). ステップ 1 へ.
ステップ 5. 最適性カットが追加されない場合は終了.

図 4: L-shaped 法のアルゴリズム

4 シナリオ集約法

本節では, 前節で考慮したような性質を持たない確率計画問題に対する解法として, Rockafellar–Wets [12] によるシナリオ集約法 (scenario aggregation method) またはプログレッシブヘッジ法 (progressive hedging method) について紹介する.

T 段階にわたる計画問題を考える. $t = 1,\ldots,T$ の各期においては, 離散分布に従う確率変数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ の実現値 $\boldsymbol{\xi}_t$ が与えられるものとする. 各期における確率変数の実現値の集合 $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_T)$ がシナリオである. 全てのシナリオに対する添字集合を S とし, $\boldsymbol{\xi}^s = ({\boldsymbol{\xi}_1}^s,\ldots,\boldsymbol{\xi}_T^s)(s \in S)$ を第 s シナリオとよぶ. 2 節とは異なり, 上側添字, 下側添字はそれぞれ, シナリオ番号, 段階に相当することに注意されたい. 第 s シナリオが生起する確率 $p_s > 0, \sum_{s\in S} p_s = 1$ は与えられているものとする. シナリオ s に対する第 t 段階の決定を $X_t(s) \in \mathbb{R}^{n_t}(t = 1,\ldots,T)$ とし, T 段階にわたる決定をまとめて $X(s) = (X_1(s),\ldots,X_T(s))$ と表す. 決定 $X(s)$ はシナリオ $s \in S$ から $\mathbb{R}^n(n = n_1 + \cdots + n_T)$ への写像とみなされる. このとき, 各シナリオ $s \in S$ に対して, シナリオ部分問題 (scenario subproblem) が次のように定義できる. ただし $f_s(X(s)), C_s$ をそれぞれ第 s シナリオにおける目的関数, 第 s シナリオにおける実行可能解集合とする.

(シナリオ部分問題) $\min \quad f_s(X(s))$
subject to $\quad X(s) \in C_s \subset \mathbb{R}^n$

全シナリオに対する総合的な決定を考えると, 目的関数としては, $E_{s\in S}[f_s(X(s))]$ を考えることができるが, 各シナリオ $s \in S$ についてシナリオ部分問題を解いてシナリオ毎に解 $X(s)$ を求めればよいわけではない. 2 つのシナリオ s と s' が段階 τ まで識別不可能 (indistinguishable) すなわち $(\boldsymbol{\xi}_1^s,\ldots,\boldsymbol{\xi}_\tau^s) = (\boldsymbol{\xi}_1^{s'},\ldots,\boldsymbol{\xi}_\tau^{s'})$ であれば, τ 段階までの決定は $(X_1(s),\ldots,X_\tau(s)) = (X_1(s'),\ldots,X_\tau(s'))$ を満たすように等しくなければならないためである. 全てのシナリオの添字集合 S は, 各段階 $t(t = 1,\ldots,T)$ において, 各要素が識別不可能な互いに素である集合に分割される. この集合をシナリオ束 (scenario bundle) とよぶ. 段階 t におけるシナリオ束の集合を $\mathcal{A}_t$ とすると, シナリオ束 $A \in \mathcal{A}_t$ に含まれる異なるシナリオは段階 t において識別不可能である.

全シナリオに対する総合的な決定 $X(s), s \in S$ をまとめて $X \in \mathbb{R}^{n|S|}$ とし, $\mathbb{R}^{n|S|}$ に次の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を定義した空間を $\mathcal{E}$ と定める.

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle &= E_{s\in S}[X(s)\cdot Y(s)]\\ &= \sum_{s\in S} p_s X(s)\cdot Y(s), \ X, Y \in \mathcal{E}\end{aligned} \quad (3)$$

空間 $\mathcal{E}$ に含まれる $X \in \mathcal{E}$ において, 同じシナリオ束に対して等しい決定 X からなる空間を $\mathcal{N}$ とする.

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{X \in \mathcal{E} \mid \text{同じシナリオ束 } A \in \mathcal{A}_t \text{に属する}\\ &\qquad s \in A \text{ に対する決定 } X_t(s) \text{ は等しい.}\}\end{aligned} \quad (4)$$

決定 $X \in \mathcal{N}$ は実施可能 (implementable) とよばれる. また次の集合 $\mathcal{C}$ に含まれる決定 $X \in \mathcal{E}$ を許容的 (admissible) とよぶ.

$$\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{E} \mid X(s) \in C_s, s \in S\} \quad (5)$$

シナリオ部分問題を解いて得られる解は, 許容的であるが実施可能であるとは限らない. そこで実施可能な決定 X を求める方法を示す. 第 t 段階のシナリオ束集合 $\mathcal{A}_t$ に属する $A \in \mathcal{A}_t$ に対して, 次のように $X_t(A)$ を定義する.

$$X_t(A) = \frac{\sum_{s\in A} p_s X_t(s)}{\sum_{s\in A} p_s} \tag{6}$$

新たな決定 $\hat{X}$ を次のように定める.

$$\hat{X}_t(s) = X_t(A), \forall s \in A \tag{7}$$

明らかに $\hat{X} \in \mathcal{N}$ であり, $\hat{X}$ は実施可能である. 決定 X の空間 $\mathcal{E}$ から $\mathcal{N}$ への直交射影 J を集約作用素とよぶが, J は $J^2 = J$ をみたす. また $K = I - J$ は, $\mathcal{E}$ の $\mathcal{N}$ に対する補空間 $\mathcal{M}$ への直交射影となる.

$$\mathcal{M} \quad = \quad \{W \in \mathcal{E} \mid JW = 0\} \tag{8}$$

次は明らかである.

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \quad &= \quad \{X \in \mathcal{E} \mid KX = 0\} \\ &= \quad \{X \in \mathcal{E} \mid X = \hat{X}\} \end{aligned} \tag{9}$$

よって, 全シナリオを考慮して次の問題 $(\mathcal{P})$ を解くことが目標である.

$$\left| \begin{array}{ll} (\mathcal{P}) : \min & F(X) = E_{s\in S}[f_s(X(s))] \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{C}, KX = 0 \end{array} \right.$$

問題 $(\mathcal{P})$ に対するラグランジュ緩和問題は, Y をラグランジュ乗数とすると, 次のようになる.

$$\left| \begin{array}{rl} \min & F(X) + \langle KX, Y\rangle \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{E} \end{array} \right.$$

K は直交射影であるから, 次の関係が成り立つ.

$$\langle KX, Y\rangle = \langle X, KY\rangle = \langle KX, KY\rangle \tag{10}$$

ここで, $Y \in \mathcal{N}$ となる Y は $KY = 0$ となるため, ラグランジュ乗数として意味をもたない. よって, $W = KY \in \mathcal{M}$ となる W を考え, ラグランジュ関数を $L(X, W) = F(X) + \langle X, W\rangle$ $(X \in \mathcal{C}, W \in \mathcal{M})$ とする. さらに, 2 次のペナルティ項を加えた $L_r(X, W)$ を定義する.

$$\begin{aligned} L_r(X, W) \quad &= \quad F(X) + \langle X, W\rangle + \frac{1}{2} r\|KX\|^2 \\ &= \quad F(X) + \langle X, W\rangle + \frac{1}{2} r\|X - \hat{X}\|^2 \\ &\quad\quad \text{for } X \in \mathcal{C}, W \in \mathcal{M}, r > 0 \end{aligned} \tag{11}$$

シナリオ集約法のアルゴリズムを以下に示す.

ステップ 0. 反復回数を $\nu = 0$ とし, 初期解 $X^0(s), s \in S, W^0 = 0$ が与えられている. $(X^0(s) \in \mathcal{C}, W^0 \in \mathcal{M})$
ステップ 1. 集約作用素 J により, $\hat{X}^\nu = JX^\nu$ を求める. $\hat{X}^\nu$ は実施可能であるが, 必ずしも許容的でない.
ステップ 2. 拡張ラグランジュ緩和問題 $(\mathcal{P}^\nu)$ を考える.

$$\left| \begin{array}{ll} (\mathcal{P}^\nu) : \min & L_r(X, W) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{C} \end{array} \right.$$

問題 $(\mathcal{P}^\nu)$ をシナリオ部分問題 $(\mathcal{P}_s^\nu), s \in S$ に分解し, シナリオ s に対する解 $X^{\nu+1}(s)$ を求める.

$$\left| \begin{array}{ll} (\mathcal{P}_s^\nu) : \min & f_s(X(s)) + X(s) \cdot W^\nu(s) \\ & + \frac{1}{2} r|X(s) - \hat{X}^\nu(s)|^2 \\ \text{subject to} & X \in C_s \end{array} \right.$$

解 $X^{\nu+1}$ は許容的であるが, 実施可能とは限らない.
ステップ 3. $W^{\nu+1} \in \mathcal{M}$ を満たすように, $W^{\nu+1} = W^\nu + rKX^{\nu+1}$, $\nu = \nu + 1$ としてステップ 1 へ.

図 5: シナリオ集約法のアルゴリズム

5 おわりに

本論文では, 多段階の確率計画問題を考えた. 特に問題がブロック分解可能リコースという性質を有している場合は, 多段階の問題を 2 段階問題へ変換することが可能である. 各段階までのシナリオに応じて近似を行うという L-shaped 法に基づく解法を適用することができる. 問題がそのような性質を有していない場合は, シナリオ集約法を適用することが可能である. シナリオ集約法では, 最終段階までのシナリオのみを考えているため, 識別不可能なシナリオに対する決定も等しくなければならないという条件を考慮しなければならない. 多段階問題における段階数が多い場合などは, ブロック分解可能リコースの性質を有していても, 規模の大きい主問題を解く必要があるため, シナリオ集約法などの適用も有効であると考えられる. 数値実験による手法の比較が今後の課題である.

参考文献

[1] J. R. Birge, Decomposition and partitioning methods for multistage stochastic linear programs, *Operations Research*, **33**(1985), 989-1007.

[2] J. R. Birge, C. J. Donohue, D. F. Holmes, and O. G. Svintsitski, A parallel implementation of

the nested decomposition algorithm for multistage stochastic linear programs, *Mathematical Programming*, **75**(1996), 327-352.

[3] J.R. Birge and F.V. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[4] G.B. Dantzig, Linear Programming under uncertainty, *Management Science*, **1**(1955), 197-206.

[5] P. Kall and S.W. Wallace, *Stochastic Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1994.

[6] P. Kall and J. Mayer, *Stochastic Linear Programming -Models, Theory, and Computation*, Springer-Verlag, 2005.

[7] F. V. Louveaux, A solution method for multistage stochastic programs with recourse with application to an energy investment, *Operations Research*,**28**(1980), 889-902.

[8] F. V. Louveaux, Multistage stochastic programs with block-separable recourse, *Mathematical Programming Study*, **28**(1986), 48-62.

[9] P. Olsen, Multistage stochastic programming with recourse: The equivalent deterministic problem, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **14**(1976), 495-517.

[10] P. Olsen, When is a multistage stochastic programming problem well defined?, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **14**(1976), 518-527.

[11] P. Olsen, Discretizations of multistage stochastic programming problems, *Mathematical Programming Study*, **6**(1976), 111-124.

[12] R. T. Rockafellar and R.J.-B. Wets, Scenarios and polycy aggregation in optimization under uncertainty, *Mathematics of Operations Research*, **16**(1991), 119-1147.

[13] T. Shiina and J. R. Birge, Multistage stochastic programming model for electric power capacity expansion problem, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **20**(2003), 379-397.