最適化・シミュレーション演習

補足：切除平面法

- 授業サポートページ
  http://www.shiina.mgmt.waseda.ac.jp/ora/
- 数理計画による最適化と（離散事象型）シミュレーションに関する演習を行う．使用するソフトウェアは，AMPL（＋GurobiまたはCPLEX)，および，Simul8を想定している．
- 演習では，数理計画による最適化やシミュレーションの実践的能力を身につけることを目指す。履修者は，Cを使用できる環境を有するPCを持参すること。受講者は，実験室にて，演習で使用する C，AMPL，Simul8をダウンロードできる。

整数計画法と妥当不等式

$$(\mathrm{IP}):\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{subject to } x \in X$$

$$X = \{x \mid Ax \le b, x \in Z_+^n\}$$

整数計画問題（IP)の実行可能集合をXとする。
すべての $x \in X$に対して $\pi x \leqq \pi_0$が成立するとき、
$\pi x \leqq \pi_0$をXに対する妥当不等式という。

問題(IP)の連続緩和問題 $\max\{cx|Ax \leqq b, x \in R^n\}$の最適解$x'$ が $x' \in X$ とならない場合、x'を排除したい。
すべての $x \in X$に対して $\pi x \leqq \pi_0$ を満たし、
$x' \notin X$に対して $\pi x \geqq \pi_0$ となる妥当不等式を切除平面という。

(IP)と(LP)の実行可能領域

$$(\mathrm{IP}):\max\ 2x_1 + x_2$$

$$\text{subject to } x \in X$$

$$X = \{x \mid 2x_1 + 2x_2 \le 3, x \in \{0,1\}^2\}$$

最適解は$x = (1,0)$

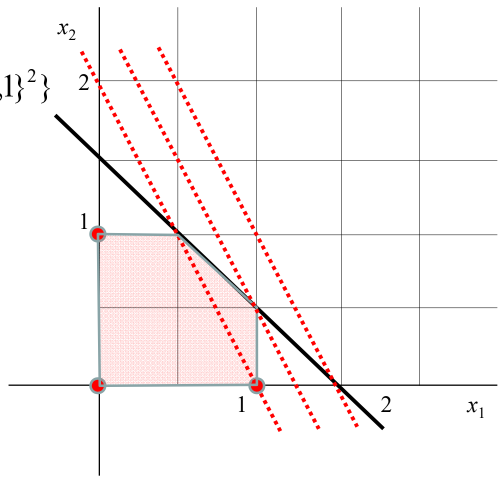
$$(\mathrm{LP}):\max\ 2x_1 + x_2$$

$$\text{subject to } 2x_1 + 2x_2 \le 3,$$

$$0 \le x_1, x_2 \le 1\}$$

最適解は

$$x^* = (1, \tfrac{1}{2})$$



ナップサック問題に対する妥当不等式

（KP）最大化 $z = \Sigma^n_{j=1}\ c_j x_j$
制約 $\Sigma^n_{j=1}\ a_j x_j \ \leqq b$
$x_j \in \{0,1\},\ \forall j$

<u>被覆</u>：集合$C \subseteq N = \{1,2,\ldots,n\}$に対して
$\Sigma_{j\in C}\, a_j > b$が成立するとき、$C$を$b$に対する被覆という。
（容量bを上回る品物の組合せ）

<u>妥当不等式</u>：$\Sigma_{j\in C}\, x_j \leqq |C| - 1$
被覆Cに含まれる品物を全てナップサックに入れることはできない。
（容量bを上回る品物の組合せに対し、ナップサックに入れられる品物の個数は、多くてもCに属する品物の数－1）

実行可能領域と妥当不等式

(IP): $\max\ 2x_1 + x_2$

subject to $x \in X$

$X = \{x \mid 2x_1 + 2x_2 \le 3, x \in \{0,1\}^2\}$

(LP): $\max\ 2x_1 + x_2$

subject to $2x_1 + 2x_2 \le 3,$

$0 \le x_1, x_2 \le 1\}$

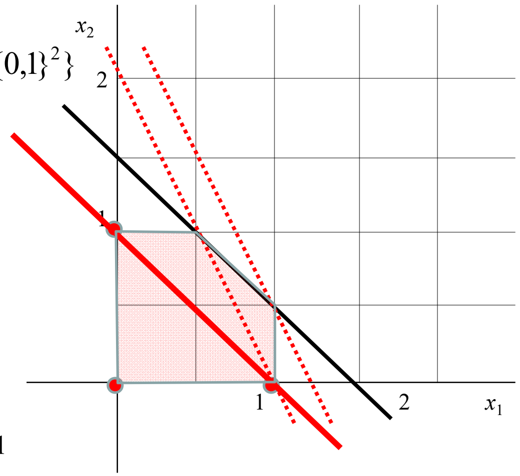
$\sum_{j \in C} x_j \le |C| - 1,\ \sum_{j \in C} a_j > b$

$C = \{1,2\}$とすると

$\sum_{j \in C} a_j = 2 + 2 > b = 3$

妥当不等式は$x_1 + x_2 \le 2 - 1 = 1$

$x_1^* + x_2^* = 1 + 1/2 = 3/2 > 1$



妥当不等式と分離問題

(KP) 最大化 $z = \Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j$

制約 $\Sigma_{j=1}^{n} a_j x_j \leqq b$

$x_j \in \{0,1\},\ \forall j$

問題(KP)の連続緩和問題(KLP)の最適解 x^*に対して

$\Sigma_{j \in C} x_j^* > |C| - 1$

を満たすような被覆Cを求めたい。変形すると、以下を満たすCを求めればよい。

$\Sigma_{j \in C} (x_j^* - 1) > -1$

各品物jが被覆Cに属するか否かを示す0-1変数z_jを用いると、緩和LP最適解x_j^*を分離する妥当不等式を求める問題(分離問題)は以下のようになる。

分離問題: max violation$= \Sigma_{j \in N} (x_j^* - 1)\, z_j$

subject to $\Sigma_{j \in N} a_j z_j > b$

$z_j \in \{0,1\},\ \forall j$

分離問題と貪欲解法

分離問題: max violation$= \Sigma_{j \in N} (x_j^* - 1)\, z_j$

subject to $\Sigma_{j \in N} a_j z_j \geqq b + \varepsilon$

$z_j \in \{0,1\},\ \forall j$

先のデータを用いると、

$\max\ (x_1^* - 1)\, z_1 + (x_2^* - 1)\, z_2 = -(1/2)\ z_2$

subject to $2z_1 + 2z_2 \geqq 3 + \varepsilon$

$z_j \in \{0,1\},\ \forall j$

この0-1整数計画問題の最適解は$z=(1,1)$

貪欲解法: $(x_j^* - 1) / a_j$ の大きい順にCに加えていく

この例では、a_1, a_2 の順に加える。