最適化・シミュレーション演習

第7回 Benders分解

- 授業サポートページ
  http://www.shiina.mgmt.waseda.ac.jp/
- 数理計画による最適化と(離散事象型)シミュレーションに関する演習を行う．使用するソフトウェアは，AMPL（＋GurobiまたはCPLEX)，および，Simul8を想定している．
- 凸解析の基礎、凸集合、凸関数
- Benders分解による施設配置問題
- Benders分解の一般論

凸結合、凸集合

- 凸結合の定義（2点を結ぶ線分上の点）

$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in \Re^n, 0 \leq \lambda \leq 1$ であるとき，

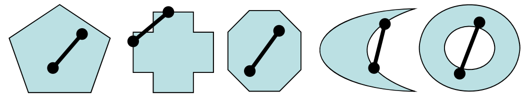
$\lambda \boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2$ を $\boldsymbol{x}^1$ と $\boldsymbol{x}^2$ の凸結合という．

- 凸集合の定義（凹んでいない集合）

$S \subset \Re^n$ は, S の任意の 2 点 $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$ の凸結合を含むとき，すなわち

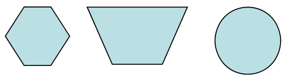
$$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in \Re^n, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2 \in S$$

を満たすとき，凸集合であるという．



実行可能集合
LP：凸集合
MIP, IP: 非凸集合

端点（頂点）



- 端点（頂点）の定義（端の点は異なる2点の間にない）

凸集合S上の点xはSに含まれる相異なる2点x^1, $x^2 \in S$を結ぶ線分上の中間点とならないとき、Sの端点であるという。

$x=\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$, $0< \lambda<1 \Rightarrow x= x^1 = x^2$

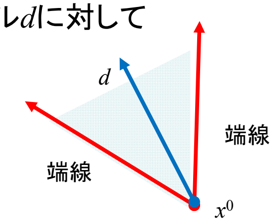
- 無限端線と端線

凸集合S上の点x^0と0でないベクトルdに対して

$x^0+\lambda d \in S$, $\forall \lambda \geqq 0$となるとき

$\{x| x^0+\lambda d, \forall \lambda \geqq 0\}$を起点とする

方向dの無限射線という



- 端線

並行でない異なる2つの無限射線ベクトルの和として表せない無限射線を端線という

凸関数（下に凸となる関数）

定義　凸関数(convex function)

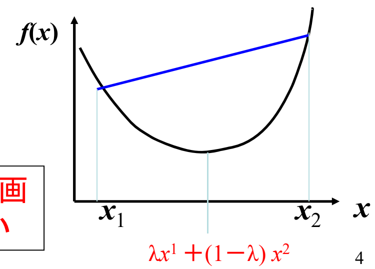
凸集合$S \subseteq R^n$に対して定義される関数$f: S \to R^1$を考える。関数$f(x)$はS上の2点x^1, $x^2 \in S$に対して

$f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2) \leqq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$

$\lambda \in R^1$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$

のときS上の凸関数という

(－fが凸関数のとき、fを凹関数)



凸集合上で凸関数を最小化：凸計画
凸計画は容易に解ける場合が多い

今回扱う数理計画問題

$$\begin{aligned} \min \quad & cx + qy \\ \text{subject to} \quad & Ax = b,\ x \ge 0,\ x \in X \\ & Tx + Wy = h,\ y \ge 0 \end{aligned}$$

異なる性質の変数を含む

x:0−1変数,施設配置など

y:連続変数,輸送量など

多くの変数(特にyの次元が高い場合)を含む⇒変数yを消去

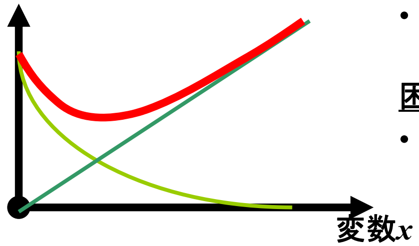
$$\begin{aligned} \min \quad & cx + Q(x) \\ \text{subject to} \quad & Ax = b,\ x \ge 0,\ x \in X \end{aligned}$$

- 変数x, yを含む大規模問題
- 変数yのみを含む小規模問題へ分解
- 目的関数:線形⇒凸計画

yに関わるコストを$Q(x)$

困難な ポイント

- 変形の方法、凸計画(非線形)の取り扱い



施設配置問題の変形

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_{ij} y_{ij} \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i \in I} y_{ij} = d_j,\ j \in J \\ & \sum_{j \in J} y_{ij} \le C_i x_i,\ i \in I \\ & x_i \in \{0,1\},\ i \in I,\quad y_{ij} \ge 0,\ i \in I, j \in J \end{aligned}$$

通常の定式化
(固定費+輸送費)
最小化

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in I} f_i x_i + Q(x) \\ \text{subject to} \quad & x_i \in \{0,1\},\ i \in I \end{aligned}$$

$$\text{where } Q(x) = \min \Big\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_{ij} y_{ij} \ \Big|\ \sum_{i \in I} y_{ij} = d_j, j \in J;\ \sum_{j \in J} y_{ij} \le C_i x_i, i \in I;\ y_{ij} \ge 0, i \in I, j \in J \Big\}$$

Benders分解
による定式化
輸送費を
施設配置変数x
の関数$Q(x)$と変形

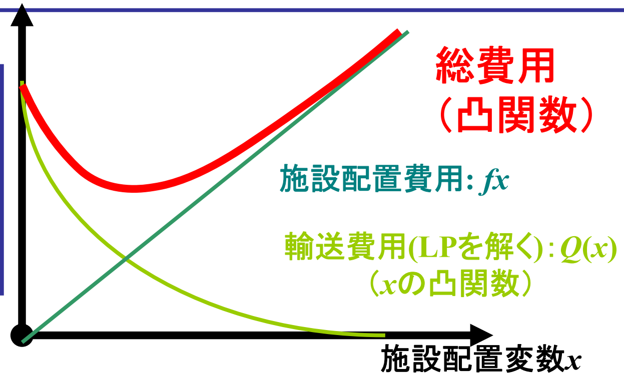
2段階最適化:($Q(x)$)が最小化問題
を解いて定義される(困難なポイント)
最小化の中に最小化が入っている

問題の取り扱いにおける難しさ

$$Q(x) = \min \Big\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_{ij} y_{ij} \ \Big|\ \sum_{i \in I} y_{ij} = d_j, j \in J,\ \sum_{j \in J} y_{ij} \le C_i x_i, i \in I, y_{ij} \ge 0, i \in I, j \in J \Big\}$$

- 輸送費用関数$Q(x)$は陽に与えられていない(非線形)
- 施設配置変数xが与えられた後に輸送費最小化問題を解くことによって定義される(困難なポイント)

- 設置施設数が少ないと輸送費用大
- 逆に設置施設数が多いと施設配置費用大



例題:施設配置問題

- 1施設, 設置費用100, 容量20
- 1需要地, 需要4, 輸送費用2
- 需要制約、容量制約、総需要≦総容量
- 輸送費用を$Q(x)$と表す
- $Q(x)$は施設配置xの値が与えられた場合、LPを解いて計算可能
- 最小化して得られる目的関数を最小化できるか?

$$\begin{aligned} \min \quad & 100x + 2y \\ \text{subject to} \quad & y = 4,\ y \le 20x, 4 \le 20x, \\ & y \ge 0, x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 100x + Q(x) \\ \text{subject to} \quad & 4 \le 20x, x \in \{0,1\} \\ & Q(x) = \min\{2y \mid y = 4,\ y \le 20x, y \ge 0\} \end{aligned}$$

- 問題MASTER
- $Q(x)$を消去(困難なポイントの解消)
- θ≧ $Q(x)$ (θは$Q(x)$の上界)となるθを導入

$$\begin{aligned} \text{(MASTER)} \min \quad & 100x + \theta \\ \text{subject to} \quad & 4 \le 20x,\ x \in \{0,1\}, \theta \ge 0 \end{aligned}$$

現時点ではθ≧$Q(x)$ を満たしていないが後から満たされるように制約を追加する(困難なポイントの解消)

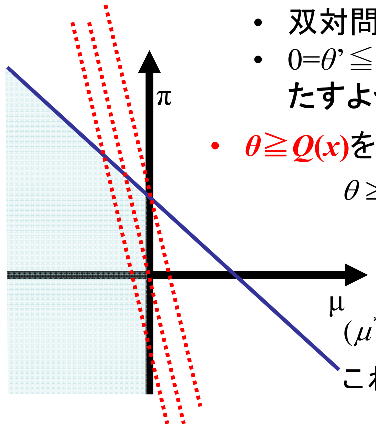
例題:最適性カット(困難なポイントの解消)

$$\begin{array}{|l|}\hline (\text{MASTER})\min \quad 100x+\theta \\ \text{subject to} \quad 4 \le 20x,\ x \in \{0,1\}, \theta \ge 0 \\ \hline \end{array}$$

- 主問題の最適解は$x'=1, \theta'=0$

$$Q(x') = \min\{2y \mid y = 4, y \le 20x', y \ge 0\}$$
$$= \max\{20x'\mu + 4\pi \mid \mu + \pi \le 2, \mu \le 0\}$$

- 双対問題の最適解$(\mu^*, \pi^*)=(0,2)$
- $0=\theta' \leqq Q(x')=8$となる($\boldsymbol{\theta \geqq Q(x)}$**を満たすようにしたい**)



- $\theta \geqq Q(x)$を満たすために**最適性カットを追加**

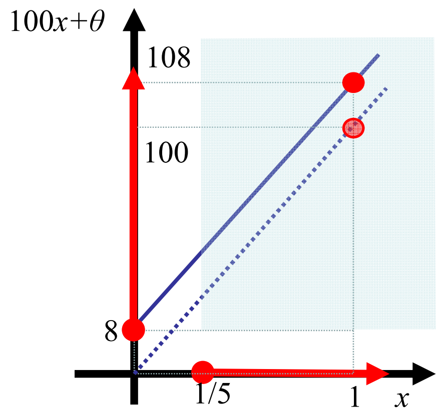
$$\theta \ge Q(x) = \max\{20x\mu + 4\pi \mid \mu + \pi \le 2, \mu \le 0\}$$
$$\ge 20x\mu^* + 4\pi^* = 8$$

(μ^*, π^*)はx'に対する双対最適解だから

これは$x'=1, \theta'=0$を排除

例題:問題MASTER(最適性カット追加後)

$$(\text{MASTER}) \min \quad 100x+\theta$$
$$\text{subject to} \quad x \in \{0,1\}, \theta \ge 0, 20x \ge 4$$
$$\theta \ge 8$$



- マスター問題
- 最適性カット$\theta \geqq 8$を追加
- 最適性カットは、需要を満たすためには輸送費が8以上となることを示す
- 最適解$x=1$, $\theta=8$
- 最適目的関数値108

施設配置問題への応用:定式化

$$\min \sum_{i \in I} f_i x_i + Q(x)$$

(固定費+輸送費)最小化

$$\text{subject to} \quad x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I$$

施設配置変数∈{0,1}

$$\sum_{i \in I} C_i x_i \ge \sum_{j \in J} d_j$$

総容量≧総需要

$$\text{where} \quad Q(x) = \min \{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_{ij} y_{ij} \mid$$

$Q(x)$の定義:輸送費

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = d_j, j \in J$$

制約:需要充足

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \le C_i x_i, i \in I$$

制約:設備容量

$$y_{ij} \ge 0, i \in I, j \in J\}$$

施設配置変数 x
輸送量変数 y
輸送費用$Q(x)$

施設配置xに応じて輸送費$Q(x)$を決定
$LB \leqq z^*$(本問題の最適目的関数値)$\leqq UB$

Benders分解による施設配置問題

$$(\text{MASTER}): \min \sum_{i \in I} f_i x_i + \theta$$
$$\text{subject to} \quad x_i \in \{0,1\}, i \in I, \theta \ge 0,$$
$$\sum_{i \in I} C_i x_i \ge \sum_{j \in J} d_j$$

$$Q(x') = \min \{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_{ij} y_{ij} \mid$$
$$\sum_{j \in J} y_{ij} \le C_i x_i', i \in I$$
$$\sum_{i \in I} y_{ij} = d_j, j \in J, y_{ij} \ge 0, i \in I, j \in J\}$$
$$= \max\{\sum_{i \in I} C_i x_i' \mu_i + \sum_{j \in J} d_j \pi_i \mid$$
$$\mu_i + \pi_j \le q_{ij}, i \in I, j \in J$$
$$\mu_i \le 0, i \in I\}$$

- **MASTER問題を解く($Q(x)$を含まないことに注意)**
- **最適目的関数値=LB**
- **MASTER問題から得られたx'を用いて$Q(x')$を求める**
- **$UB=LB-\theta+Q(x')$**
- **<u>双対問題の定式化を確認</u>(制約行列の形より)**

設備1,設備2,　　設備m,スラック

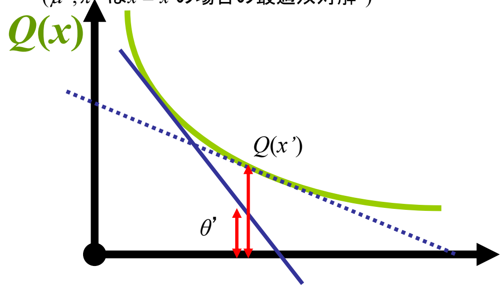
$$\begin{array}{cccccccccccccccc} y_{11} & y_{12} & & y_{1n} & y_{21} & y_{22} & & y_{2n} & & y_{m1} & y_{m2} & & y_{mn} & s_1 & & s_m \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & \cdots & & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \end{pmatrix}$$

Benders分解:最適性カット

$$Q(x) \ge \max\{ \sum_{i \in I} C_i x_i \mu_i + \sum_{j \in J} d_j \pi_i \mid \mu_i + \pi_j \le q_{ij},\ i \in I, j \in J,\ \mu_i \le 0,\ i \in I \}$$

$$= \sum_{i \in I} C_i x_i \mu_i^* + \sum_{j \in J} d_j \pi_i^*$$

(μ^*, π^*は$x = x'$の場合の最適双対解)



- マスター問題を解いて得られた解について $\theta' < Q(x')$ のとき、$\theta \geqq Q(x)$となるように近似
- ***Q*(*x*)**は凸関数であるため、***Q*(*x*)**の線形近似は常に***Q*(*x*)**の下界となる
- 最適性カット
- *x'* ではなく、*x*は変数として不等式を主問題に追加

$$\theta \ge \sum_{i \in I} C_i x_i \mu_i^* + \sum_{j \in J} d_j \pi_i^*$$

例題2:施設配置問題

$$\min\ 150x_1 + 150x_2 + \theta$$
$$\text{subject to}\ 96x_1 + 66x_2 \ge 40, x \in \{0,1\}, \theta \ge 0$$
$$Q(x) = \min\{49y_{11} + 79y_{12} + 44y_{13} + 51y_{21} + 79y_{22} + 37y_{23} \mid y_{11} + y_{12} + y_{13} \le 96x_1, y_{21} + y_{22} + y_{23} \le 66x_2,\ y_{11} + y_{21} = 10, y_{12} + y_{22} = 15, y_{13} + y_{23} = 15, y \ge 0\}$$

- 2施設, 3需要地
- x=(0,1), θ=0
- LB=150,UB=2485

- 反復1
- x=(0,1), θ=0
- LB=150,UB=2485
- 反復2
- x=(0,1), θ=1873
- LB=2023,UB=2400
- 反復3
- x=(1,1), θ=2058
- LB=2358,UB=2400
- 反復4
- x=(0,1), θ=2250
- LB=2400,UB=2400

```
subject to optcut[1]:
        462*x[2] + theta >= 2335;

subject to optcut[2]:
        192*x[1] + theta >= 2250;

subject to optcut[3]:
        theta >= 2230;

subject to optcut[4]:
        192*x[1] + theta >= 2250;
```


異なる種類の変数を含む数理計画問題

$$\min\ cx + qy$$
$$\text{subject to}\ Ax = b,\ x \ge 0,\ x \in X$$
$$Tx + Wy = h,\ y \ge 0$$

異なる性質の変数を含む
x:第1段階,0－1変数など
y:第2段階変数,連続変数など

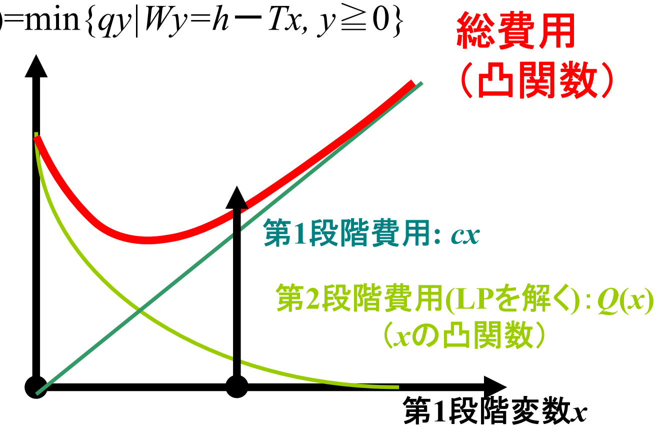
次のように問題を変形: Benders decomposition Method

$$\min\ cx + Q(x)$$
$$\text{subject to}\ Ax = b,\ x \ge 0,\ x \in X$$
$$Q(x) = \min\{qy \mid Tx + Wy = h, y \ge 0\}$$

- 決定xに対して、制約 $Tx+Wy=h$ が満たされるように変数 $y \geqq 0$ に関連する費用$Q(x)$を目的関数に含める

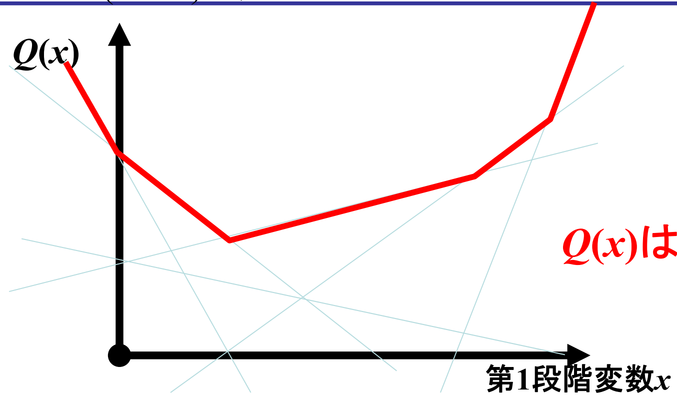
解法のアウトライン

- 関数$Q(x)$は陽に与えられていない
- 第1段階変数xが与えられた後に第2段階のLPを解くことによって定義される
- $Q(x)=\min\{qy \mid Wy=h-Tx,\ y \geqq 0\}$



関数$Q(x)$の性質（詳しい証明は補足資料）

- $Q(x)=\min\{qy \mid Wy=h-Tx,\ y\geqq 0\}$
  $=\max\{\pi(h-Tx) \mid \pi W\leqq q\}$
- 双対問題の制約のすべての端点 $\pi^1,\pi^2,\ldots,\pi^K$について$\pi(h-Tx)$を表示



$Q(x)$は凸関数

マスター問題(Master Problem)

$$\min\quad cx+\theta$$
$$\text{subject to}\quad Ax=b,\ x\geq 0,\ x\in X$$
$$\theta\geq 0(\text{下界値})\ \left(\theta\geq Q(x)\text{を省略}\right)$$

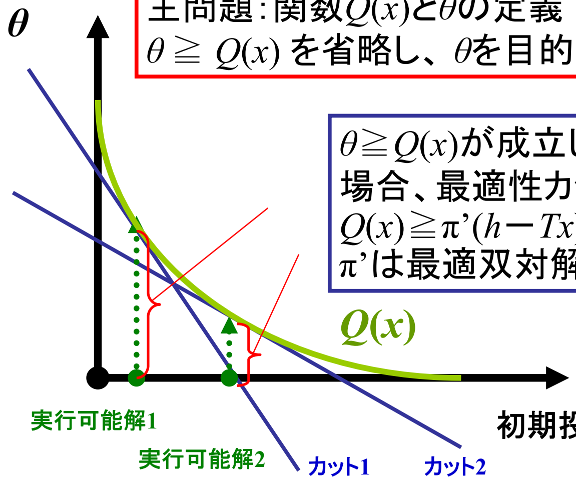
θは関数$Q(x)$の上界となる変数

主問題：リコース関数とθの定義$\theta\geqq Q(x)$を省略
リコース関数$Q(x)$を近似する最適性カットを追加

- 関数$Q(x)$を定義する主問題が実行不可能である場合、
$Q(x)=\min\{qy \mid Wy=h-Tx,\ y\geqq 0\}$
$=\max\{\pi(h-Tx) \mid \pi W\leqq q\}=+\infty$
- $\pi'(h-Tx)>0$かつ$\pi' W\leqq 0$となる方向ベクトルπ'が存在
これを除外するため実行可能性カット$\pi'(h-Tx)\leqq 0$を追加
$(\pi_0+\theta\pi')(h-Tx)\to\infty$, $(\pi_0+\theta\pi')W\leqq q$は明らか

解法のアルゴリズム：区分線形近似

θ:関数$Q(x)$の上界となる変数
主問題：関数$Q(x)$とθの定義
$\theta\geqq Q(x)$ を省略し、θを目的関数に追加



$\theta\geqq Q(x)$が成立していない場合、最適性カットを追加
$Q(x)\geqq\pi'(h-Tx)$
π'は最適双対解

Benders分解法のアルゴリズム

ステップ0. 初期設定：暫定目的関数値$UB=+\infty$,
最適値に対する下界値$LB=0$.

ステップ1. ($MASTER$)問題を解き、解 $(\hat{x},\hat{\theta},)$ を得る.

ステップ2. $Q(x)$を定義する第2段階問題が実行不可能ならば、
実行可能性カットを追加し、ステップ1へ。

ステップ3. 暫定目的関数値と下界値の更新：
$c\hat{x}+\hat{\theta}>LB$ならば $LB=c\hat{x}+\hat{\theta}$,
$c\hat{x}+Q(\hat{x},\hat{y})<UB$ならば $UB=c\hat{x}+Q(\hat{x},\hat{y})$.

ステップ4. 収束判定
If $LB\geq(1-\varepsilon)UB$ならば終了.(ε：許容誤差)

ステップ5. 最適性カットの追加
$\hat{\theta}<Q(\hat{x})$となれば, 最適性カットを主問題に追加し、ステップ1へ.

補足資料:関数$Q(x)$の凸性

- $Q(x)$=min$\{qy \mid Wy=h-Tx,\ y \geqq 0\}$
  =max$\{\pi(h-Tx) \mid \pi W \leqq q\}$
- 元問題の2つの実行可能解x^1,x^2を考え、$Q(x^1)=qy^1$, $Q(x^2)=qy^2$であると仮定
- $Wy^1=h-Tx^1,\ Wy^2=h-Tx^2$より
  $W(\lambda y^1+(1-\lambda)y^2)=h-T(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)$
- $Q(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)$
  $=\min\{qy \mid Wy=h-T(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2),\ y \geqq 0\}$
  $\leqq \lambda qy^1+(1-\lambda)qy^2$
  $=\lambda Q(x^1)+(1-\lambda)Q(x^2)$

補足Benders分解:実行可能性カット

$$Q(x')=\max\{\sum_{i\in I} C_i x_i' \mu_i + \sum_{j\in J} d_j \pi_i \mid$$
$$\mu_i + \pi_j \le q_{ij},\ i\in I, j\in J$$
$$\mu_i \le 0,\ i\in I\}$$

- 2段階費用$Q(x')=+\infty$ならば、双対問題において、**無限方向（制約の端線）**が存在する

$$\max\{\sum_{i\in I} C_i x_i' \tilde{\mu}_i + \sum_{j\in J} d_j \tilde{\pi}_i \mid$$
$$\tilde{\mu}_i + \tilde{\pi}_j \le 0,\ i\in I, j\in J$$
$$-1 \le \tilde{\mu}_i \le 0,\ i\in I$$
$$-1 \le \tilde{\pi}_j \le 1,\ j\in J\}$$

- **端線生成問題**
- **方向だけが問題なので、各μ, πの成分に制限（長さ1以下）**

実行可能性カット

$$\sum_{i\in I} C_i x_i \tilde{\mu}_i + \sum_{j\in J} d_j \tilde{\pi}_i \le 0$$

- **実行可能性カット**
- **x'ではなく、xは変数として主問題に追加**