

最適化シミュレーション演習

第6回 最短路問題 ラグランジュ緩和問題

- ・ 授業サポートページ
<http://www.shiina.mgmt.waseda.ac.jp/>
- ・ ネットワーク問題の基礎
- ・ 最短路問題Dijkstra法
- ・ ラグランジュ緩和問題

1

ネットワークに関する定義

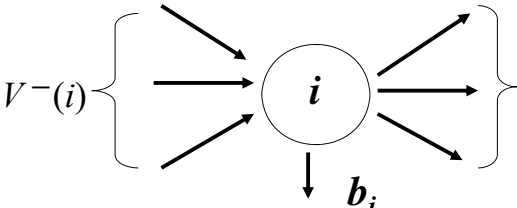
- ・ 有向グラフ $G=(V, A)$ を考える (V : 点集合、 A : 辺集合)
- ・ 各辺 $(i, j) \in A$ に対して辺容量 h_{ij} が与えられている
- ・ 各点 $i \in V$ に対して b_i が与えられている ($b_i > 0$ ならば需要量、 $b_i < 0$ ならば供給量)
- ・ x_{ij} は辺 (i, j) 上のフロー (流量) を表す
- ・ $V^+(i) = \{k: (i, k) \in A\}$ 点 i から出る辺の終点集合
- ・ $V^-(i) = \{k: (k, i) \in A\}$ 点 i に接続する辺の始点集合
- ・ 参考文献: Ahuja, Magnanti, Orlin, NETWORK FLOWS, Prentice Hall, 1993.

2

最小費用流問題

- ・ 定式化
$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

subject to
$$\sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} - \sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} = b_i, \forall i \in V$$

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij}, \forall (i, j) \in A$$
- $V^-(i)$  $V^+(i)$
流量保存則

3

ネットワークの例

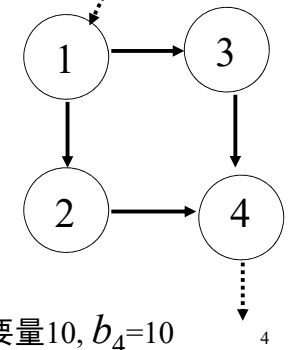
- ・ 流量保存則

$$\begin{aligned} -x_{12} - x_{13} &= -10, \text{点1への供給量10} \\ x_{12} - x_{24} &= 0, \text{点2への流入量=流出量} \\ x_{13} - x_{34} &= 0, \text{点3への流入量=流出量} \\ x_{24} + x_{34} &= 10, \text{点4での需要量10} \end{aligned}$$

供給量10, $b_1 = -10$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{24} \\ x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

接続行列



4

接続行列の性質

- 線形計画問題として定式化
- b, h が整数ベクトルならば最適解は必ず整数解
- 接続行列: 完全単模性を持つ(任意の小行列式が0, -1, 1のどれかに等しい (totally unimodular))
- クラメル公式:
基底解 $x_B = B^{-1}b = (1/\det B)(\text{adj } B)b$ の分母が-1または1 \Rightarrow 整数性

5

最短路問題 (Shortest Path Problem)

- ネットワーク上の点 s (始点; ソース) から点 t (終点; シンク) までの最短路
- 辺 (i, j) の距離: c_{ij}

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{subject to } \sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} - \sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} = -1, \quad i = s$$

$$\sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} - \sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} = 0, \quad \forall i \in V \setminus \{s, t\}$$

$$\sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} - \sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} = 1, \quad i = t$$

$$0 \leq x_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A \quad \text{最適解は } x_{ij} \in \{0, 1\}$$

6

最短路問題の双対問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi_t - \pi_s \\ \text{subject to} \quad & \pi_j - \pi_i \leq c_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A \end{aligned}$$

- 任意の a について π_i を $\pi_i + a$ と置き換えても実行可能 \Rightarrow 始点で $\pi_s = 0$ と定めてよい
- π_i とは? \Rightarrow 始点 s から点 i への最短距離 (の下界)
- π_i を s から i への最短距離と定めると双対問題の実行可能解なので、双対問題を解いても s から t への最短距離が求められることがわかる

7

Dijkstra (ダイクストラ) 法

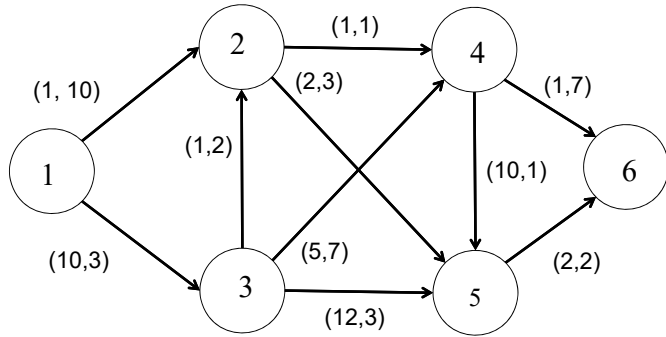
- ステップ1: $\pi_s = 0, \pi_i = \infty \quad (i \in V - \{s\}),$
 $M = \{2, \dots, n\}, i = 0$
- ステップ2: $M \neq \emptyset$ (空集合) でない場合 (i)(ii)(iii) を繰り返す
 - (i) $j \in M$ に対し $\pi_j > \pi_i + c_{ij}$ ならば $\pi_j = \pi_i + c_{ij}, p_j = i$
 - (ii) $\min_{j \in M} \pi_j = \pi_k$ となる k を求める
 - (iii) k を M から除く、 $i = k$ とする

- M : 最短路未確定な点の集合
- 集合 M から削除されると最短路確定
- p_j : 点 j への最短路の直前点 (終了時)

8

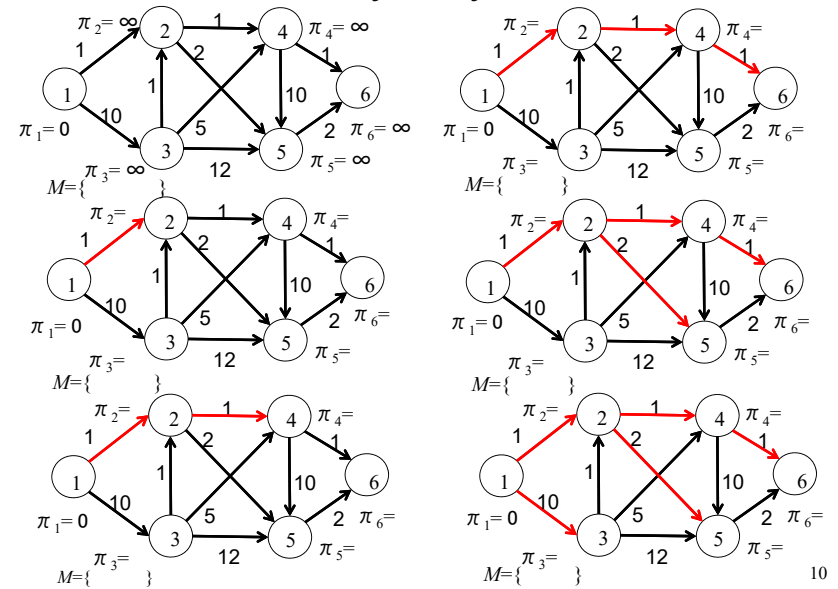
最短路問題: 演習

- 辺上の数字は (c_{ij}, t_{ij}) =(辺の長さ, 時間)



9 9

費用 $c_{ij} + \mu t_{ij}$ ($\mu=0$)



最短路問題: 時間制約付

- 辺 (i,j) の距離: c_{ij} , 辺 (i,j) を移動するために要する時間: t_{ij}
- 制約(総移動時間 $\leq T$)を考慮 \Rightarrow 難しい問題
- 制約(総移動時間 $\leq T$)に乗数 λ を掛けて目的関数に入れる
- ラグランジュ緩和問題
- 以下の目的関数値は、時間制約付問題の最適目的関数値の下界

$$L(\mu) = \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \mu \left(\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij} - T \right)$$

$$\text{subject to } \sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} - \sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} = -1, \quad i = s$$

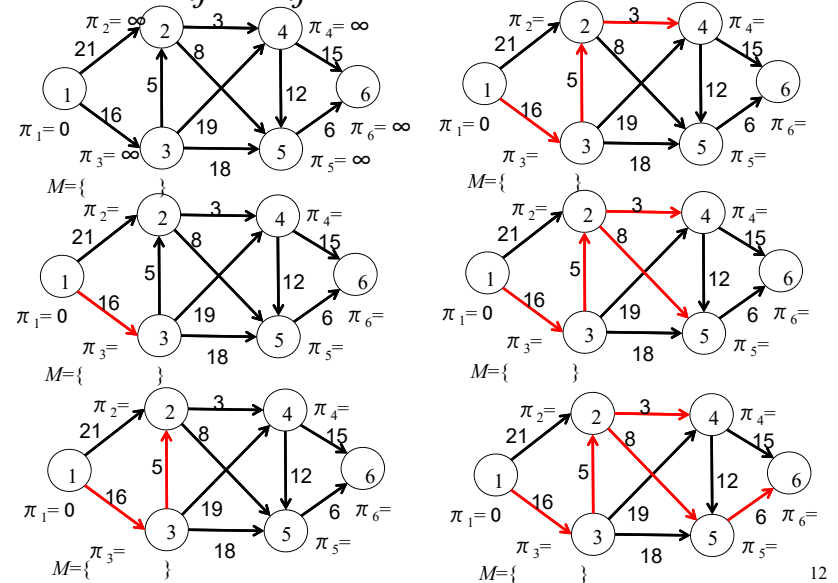
$$\sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} - \sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} = 0, \quad \forall i \in V \setminus \{s, t\}$$

$$\sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} - \sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} = 1, \quad i = t$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A$$

11

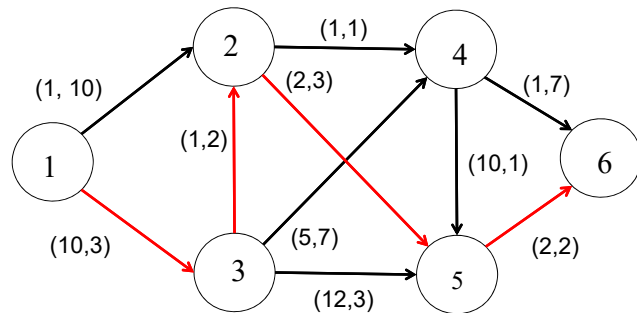
費用 $c_{ij} + \mu t_{ij}$ ($\mu=2$) 課題: Dijkstraプログラム修正



12

緩和問題($\mu=2$ の場合)の最適解

- $T=10$ の場合、 $L(2)=15+2(10-T)=15$ (最適目的関数値の下界)
- 13256とたどるパスの時間は10時間(時間制約を満たす実行可能解)
- 13256とたどるパスの距離は15(下界と等しい)
- よって、13256は時間制約付最短路問題の最適解



13

ラグランジュ緩和法

- 元問題(最適目的関数値を z^*) $\min cx$
subject to $Ax=b, x \in X$

- 難しい制約 $Ax=b$ を緩和(ラグランジュ乗数 μ)

- ラグランジュ緩和問題 $L(\mu)=\min_x cx+\mu(Ax-b)$
(最小値を $L(\mu)$ 、明らかに $L(\mu) \leq z^*$) subject to $x \in X$
- ラグランジュ関数 $L(\mu)$ の μ に関する最大値 $L^*=\max_{\mu \geq 0} L(\mu)$
- $L(\mu) \leq L^* \leq z^* \leq cx$

- 等号制約の場合の最適性テスト:(a)元問題の実行可能解 x^* が、ラグランジュ乗数 μ に対し、 $L(\mu)=cx^*$ を満たすとき、 x^* は元問題の最適解であり、 $L^*=L(\mu)$.
- (b)ラグランジュ乗数 μ に対して $L(\mu)$ を与える x^* が元問題の実行可能解ならば、 x^* は元問題の最適解であり、 $L^*=L(\mu)$. 14

関数 $L(\mu)$ の性質

- 不等号制約の場合の最適性テスト(不等号制約 $Ax \leq b$ を緩和):ある $\mu \geq 0$ に対して $L(\mu)$ を与える x^* が元問題の実行可能解であり、かつ $\mu(Ax^*-b)=0$ のとき、 x^* は元問題の最適解であり、 $L^*=L(\mu)$. (これは十分条件にすぎないことに注意。)

- ラグランジュ緩和問題 $L(\mu)=\min cx+\mu(Ax-b)$
(最小値を $L(\mu)$) subject to $x \in X$
- $X=\{x^1, x^2, \dots, x^K\}$ の場合、 $L(\mu)=\min_{k=1, \dots, K} cx^k+\mu(Ax^k-b)$
- 最大の下界を求める
 $L^*=\max_{\mu \geq 0} L(\mu)=\max \{w | w \leq cx^k+\mu(Ax^k-b), k=1, \dots, K, \mu \geq 0\}$

- 時間制約付最短路問題の場合、 X は始点と終点を結ぶパスの集合(理論的には列挙できる)
- 最大の下界 L^* を求める問題は線形計画問題

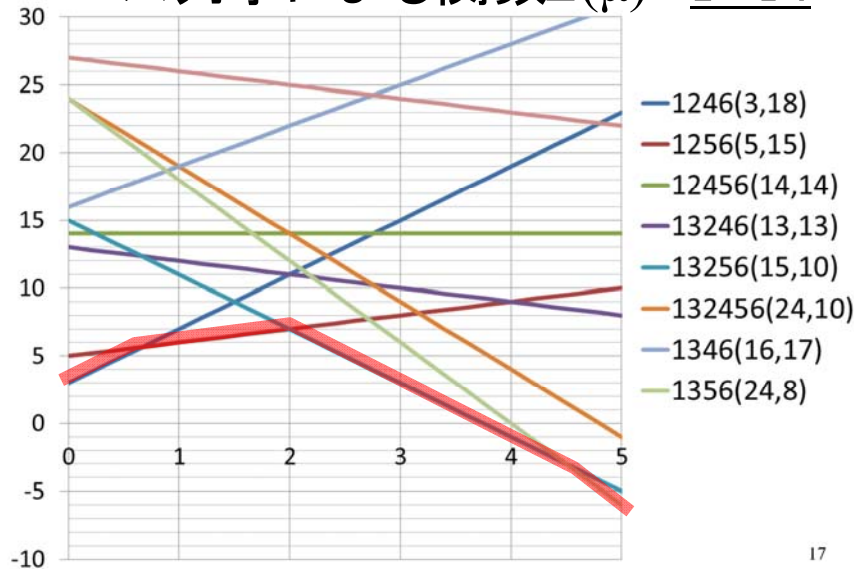
15

全ての1-6パスを列挙: $T=14$ の場合

パス	距離 c_p	時間 t_p	$c_p+\mu(t_p-T)$
1246	3	18	$3+4\mu$
1256	5	15	$5+\mu$
12456	14	14	14
13246	13	13	$13-\mu$
13256	15	10	$15-4\mu$
132456	24	9	$24-5\mu$
1346	16	17	$16+3\mu$
13456	27	13	$27-\mu$
1356	24	8	$24-6\mu$

- $T=14$ の場合、最適距離は13、そのときの時間は13(パス13246)
- $L(2)=5+2 \times (15-14)=7$ (最適目的関数値13の下界)
- ラグランジュ緩和問題の解1256の時間は15時間(実行不可能)
- ラグランジュ緩和問題の解1256の距離は5(実行不可能) 16

パス列挙による関数 $L(\mu) : T=14$



17

下界の最大値 L^* を求める

- 関数 $L(\mu)$ の最大化: 関数 $f(x)$ への勾配法
- Taylor展開 $f(x+\theta d) = f(x) + \theta \nabla f(x)d + o(\|\theta d\|)$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x+\theta d) - f(x)}{\theta} = \nabla f(x)d \quad \text{解} x \text{ から } d \text{ 方向にステップサイズ } \theta$$

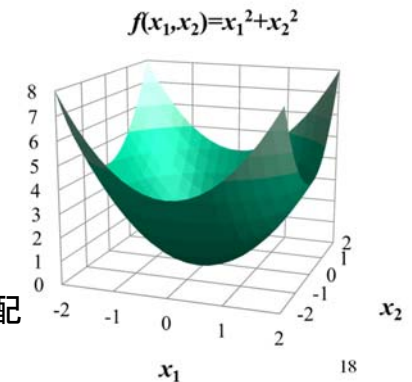
$d = \nabla f(x)$ 最急上昇方向

$d = -\nabla f(x)$ 最急降下方向

右の例

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2x_1, 2x_2)$$

$f(x)$ が微分不可能ならば劣勾配



18

列勾配法

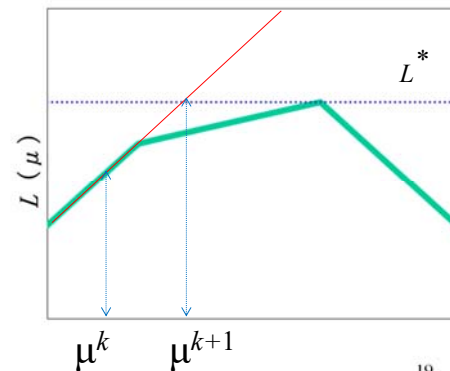
- 関数 $L(\mu) = cx + \mu(Ax - b)$ の場合、 $d = Ax - b$
- $\mu^{k+1} = \mu^k + \theta_k(Ax - b)$ と更新
- L^* がわかっているならば、 $cx^k + \mu^{k+1}(Ax^k - b) = L^*$ となるようにする

$$\theta_k = \frac{L^* - L(\mu^k)}{\|Ax^k - b\|^2},$$

$$\text{実際には } \theta_k = \frac{UB - L(\mu^k)}{\|Ax^k - b\|^2}$$

$$\text{または } \theta_k = \frac{\lambda_k (UB - L(\mu^k))}{\|Ax^k - b\|^2}$$

ただし $0 < \lambda_k < 2$



19

列勾配法の例

- 例: $\mu^0 = 0$ のとき、パス1246が最適解

$$Ax^0 - b = 18 - 14 = 4$$

$$\theta_0 = \frac{L^* - L(\mu^0)}{\|Ax^0 - b\|^2} = \frac{7 - 3}{4^2},$$

$$\mu^1 = \mu^0 + \theta_0(Ax^0 - b)$$

$$= 0 + 1/4 \times 4 = 1$$

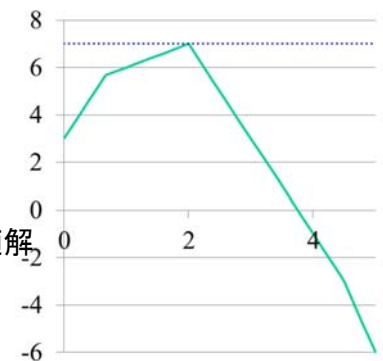
- 例: $\mu^1 = 1$ のとき、パス1256が最適解

$$Ax^1 - b = 15 - 14 = 1$$

$$\theta_1 = \frac{L^* - L(\mu^1)}{\|Ax^1 - b\|^2} = \frac{7 - (5 + 1)}{1^2},$$

$$\mu^2 = \mu^1 + \theta_1(Ax^1 - b)$$

$$= 1 + 1 \times 1 = 2$$



- 課題: $T=12$ のときラグランジュ緩和法により問題を解け。
- 得られた解は最適解であるかどうか検討せよ。

20