

最適化・シミュレーション演習

第3回動的計画法

- ・ 授業サポートページ
<http://www.shiina.mgmt.waseda.ac.jp/ora/>
- ・ 数理計画による最適化と(離散事象型)シミュレーションに関する演習を行う。使用するソフトウェアは、AMPL(+ GurobiまたはCPLEX), および, Simul8を想定している。
- ・ 演習では, 数理計画による最適化やシミュレーションの実践的能力を身につけることを目指す。履修者は, Cを使用できる環境を有するPCを持参すること。受講者は, 実験室にて, 演習で使用する C, AMPL, Simul8をダウンロードできる。

ナップサック問題に対する動的計画法

$$\begin{aligned} \text{(KP) 最大化 } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{制約 } \sum_{j=1}^n a_j x_j &\leq b \\ x_j &\in \{0,1\}, \forall j \end{aligned}$$

$$f_k(\lambda) = \max \{ \sum_{j=1}^k c_j x_j \mid \sum_{j=1}^k a_j x_j \leq \lambda, x_j \in \{0,1\}, j=1,\dots,k \}$$

$f_k(\lambda)$: n 個の品物のうち、 $j=1,\dots,k$ 個までの 品物を容量 λ の ナップサックに入れる問題の最適目的関数値

最終的に $f_n(b)$ を求めればよい

漸化式 $f_k(\lambda) = \max \{ f_{k-1}(\lambda), c_k + f_{k-1}(\lambda - a_k) \}$
 $= \max \{ \text{品物}k\text{を入れない利益}, \text{品物}k\text{を入れる利益} \}$

- ・ $f_k(\lambda)$ を定義するナップサック問題の解においては、品物 k が入るかまたは入らないということを考える
- ・ 品物 k が入らない場合: 容量 λ のナップサックに $j=1,\dots,k-1$ 個までの品物を入れるときの利益
- ・ 品物 k が入る場合: 品物 k を入れて、残り容量 $\lambda - a_k$ に $j=1,\dots,k-1$ 個までの品物を入れるときの利益

2

ナップサック問題: 例題

$$\begin{aligned} \text{(KP) 最大化 } z &= 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 \\ \text{制約 } 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_j &\in \{0,1\}, \forall j \end{aligned}$$

最適解を求めよ。ただし、記号を以下のように定義する。

$$f_1(\lambda) = \max \{ 7x_1 \mid 3x_1 \leq \lambda, x_1 \in \{0,1\}, j=1 \}$$

$$f_2(\lambda) = \max \{ 7x_1 + 8x_2 \mid 3x_1 + 4x_2 \leq \lambda, x_j \in \{0,1\}, j=1,2 \}$$

$$f_3(\lambda) = \max \{ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 \mid 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq \lambda, x_j \in \{0,1\}, j=1,2,3 \}$$

$f_1(\lambda)$ の結果から $f_2(\lambda)$ を求め、 $f_2(\lambda)$ の結果から $f_3(\lambda)$

$f_k(\lambda)$ を計算する場合 $f_{k-1}(\lambda)$ は既に計算済

初期設定: $f_k(0)=0$ ($\lambda=0$ のとき), $k=0,1,2,3$, $f_0(\lambda)=0$ ($\lambda>0$ のとき),

f_k (負の数) $= -\infty$ ($\lambda<0$ のとき), $k=0,1,2,3$

実行不可能(容量オーバー)な場合を除外するため

3

ナップサック問題: 解答例

$$\begin{aligned} \text{(KP) 最大化 } z &= 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 \\ \text{制約 } 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 6, x_j \in \{0,1\}, \forall j \\ f_k(\lambda) &= \max \{ f_{k-1}(\lambda), c_k + f_{k-1}(\lambda - a_k) \} \end{aligned}$$

$k=1$ のとき

$$\begin{aligned} f_1(1) &= \max \{ \quad, \quad \} = \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_1(2) &= \max \{ \quad, \quad \} = \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_1(3) &= \max \{ \quad, \quad \} = \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_1(4) &= \max \{ \quad, \quad \} = \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_1(5) &= \max \{ \quad, \quad \} = \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_1(6) &= \max \{ \quad, \quad \} = \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \end{aligned}$$

最終的に、 $f_n(b)$ を求めたい

次の順に計算

$$\begin{aligned} f_1(1) &\Rightarrow f_1(2) \Rightarrow \dots \Rightarrow f_1(b) \\ f_2(1) &\Rightarrow f_2(2) \Rightarrow \dots \Rightarrow f_2(b) \\ &\dots \\ f_n(1) &\Rightarrow f_n(2) \Rightarrow \dots \Rightarrow f_n(b) \end{aligned}$$

$k=2$ のとき

$$\begin{aligned} f_2(1) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_2(2) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_2(3) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_2(4) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_2(5) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_2(6) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \end{aligned}$$

$k=3$ のとき

$$\begin{aligned} f_3(1) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_3(2) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_3(3) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_3(4) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_3(5) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \\ f_3(6) &= \max \{ \quad, \quad \} = \quad, \end{aligned}$$

4

ナップサック問題: 解答例

(KP) 最大化 $z = 7x_1 + 8x_2 + 3x_3$
 制約 $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6, x_j \in \{0, 1\}, \forall j$
 $f_k(\lambda) = \max \{f_{k-1}(\lambda), c_k + f_{k-1}(\lambda - a_k)\}$

$k=1$ のとき

$$\begin{aligned} f_1(1) &= \max \{f_0(1), 7 + f_0(1-3)\} = \max \{0, -\infty\} = 0, \\ f_1(2) &= \max \{f_0(2), 7 + f_0(2-3)\} = \max \{0, -\infty\} = 0, \\ f_1(3) &= \max \{f_0(3), 7 + f_0(3-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(4) &= \max \{f_0(4), 7 + f_0(4-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(5) &= \max \{f_0(5), 7 + f_0(5-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(6) &= \max \{f_0(6), 7 + f_0(6-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \end{aligned}$$

最終的に、 $f_n(b)$ を求めたい
次の順に計算

$$\begin{array}{l} f_1(1) \Rightarrow f_1(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_1(b) \\ f_2(1) \Rightarrow f_2(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_2(b) \\ \vdots \\ f_n(1) \Rightarrow f_n(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_n(b) \end{array}$$

$k=2$ のとき

$$\begin{array}{llll} f_2(1)=\max\{ & , & \} = & , & f_3(1)=\max\{ & , & \} = & , \\ f_2(2)=\max\{ & , & \} = & , & f_3(2)=\max\{ & , & \} = & , \\ f_2(3)=\max\{ & , & \} = & , & f_3(3)=\max\{ & , & \} = & , \\ f_2(4)=\max\{ & , & \} = & , & f_3(4)=\max\{ & , & \} = & , \\ f_2(5)=\max\{ & , & \} = & , & f_3(5)=\max\{ & , & \} = & , \\ f_2(6)=\max\{ & , & \} = & , & f_3(6)=\max\{ & , & \} = & , \end{array}$$

$k=3$ のとき

$$\begin{array}{lll} f_3(1)=\max\{ & , & \} = , \\ f_3(2)=\max\{ & , & \} = , \\ f_3(3)=\max\{ & , & \} = , \\ f_3(4)=\max\{ & , & \} = , \\ f_3(5)=\max\{ & , & \} = , \\ f_3(6)=\max\{ & , & \} = , \end{array}$$

ナップサック問題: 解答例

(KP) 最大化 $z = 7x_1 + 8x_2 + 3x_3$
 制約 $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6, x_j \in \{0,1\}, \forall j$
 $f_k(\lambda) = \max \{f_{k-1}(\lambda), c_k + f_{k-1}(\lambda - a_k)\}$

$k=1$ のとき

$$\begin{aligned} f_1(1) &= \max \{f_0(1), 7 + f_0(1-3)\} = \max \{0, -\infty\} = 0, \\ f_1(2) &= \max \{f_0(2), 7 + f_0(2-3)\} = \max \{0, -\infty\} = 0, \\ f_1(3) &= \max \{f_0(3), 7 + f_0(3-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(4) &= \max \{f_0(4), 7 + f_0(4-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(5) &= \max \{f_0(5), 7 + f_0(5-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(6) &= \max \{f_0(6), 7 + f_0(6-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \end{aligned}$$

最終的に、 $f_n(b)$ を求めたい
次の順に計算

$$\begin{array}{l} f_1(1) \Rightarrow f_1(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_1(b) \\ f_2(1) \Rightarrow f_2(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_2(b) \\ \vdots \\ f_n(1) \Rightarrow f_n(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_n(b) \end{array}$$

$k=2$ のとき

$$\begin{array}{ll} f_2(1)=\max\{f_1(\mathbf{1}), 8+f_1(1-4)\}=0, & f_3(1)=\max\{\quad, \quad\}=\quad, \\ f_2(2)=\max\{f_1(\mathbf{2}), 8+f_1(2-4)\}=0, & f_3(2)=\max\{\quad, \quad\}=\quad, \\ f_2(3)=\max\{f_1(\mathbf{3}), 8+f_1(3-4)\}=7, & f_3(3)=\max\{\quad, \quad\}=\quad, \\ f_2(4)=\max\{f_1(4), 8+f_1(\mathbf{4-4})\}=8, & f_3(4)=\max\{\quad, \quad\}=\quad, \\ f_2(5)=\max\{f_1(5), 8+f_1(\mathbf{5-4})\}=8, & f_3(5)=\max\{\quad, \quad\}=\quad, \\ f_2(6)=\max\{f_1(6), 8+f_1(\mathbf{6-4})\}=8, & f_3(6)=\max\{\quad, \quad\}=\quad \end{array}$$

 $k=3$ のとき

$$\begin{aligned} f_3(1) &= \max \{ & , & \} = , \\ f_3(2) &= \max \{ & , & \} = , \\ f_3(3) &= \max \{ & , & \} = , \\ f_3(4) &= \max \{ & , & \} = , \\ f_3(5) &= \max \{ & , & \} = , \\ f_3(6) &= \max \{ & , & \} = , \end{aligned}$$

ナップサック問題: 解答例

(KP) 最大化 $z = 7x_1 + 8x_2 + 3x_3$
 制約 $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6, x_j \in \{0, 1\}, \forall j$
 $f_k(\lambda) = \max \{f_{k-1}(\lambda), c_k + f_{k-1}(\lambda - a_k)\}$

$k=1$ のとき

$$\begin{aligned} f_1(1) &= \max \{f_0(1), 7 + f_0(1-3)\} = \max \{0, -\infty\} = 0, \\ f_1(2) &= \max \{f_0(2), 7 + f_0(2-3)\} = \max \{0, -\infty\} = 0, \\ f_1(3) &= \max \{f_0(3), 7 + f_0(3-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(4) &= \max \{f_0(4), 7 + f_0(4-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(5) &= \max \{f_0(5), 7 + f_0(5-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(6) &= \max \{f_0(6), 7 + f_0(6-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \end{aligned}$$

最終的に、 $f_n(b)$ を求めたい
次の順に計算

$$\begin{array}{l} f_1(1) \Rightarrow f_1(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_1(b) \\ f_2(1) \Rightarrow f_2(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_2(b) \\ \vdots \\ f_n(1) \Rightarrow f_n(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_n(b) \end{array}$$

$k=2$ のとき

$$\begin{aligned} f_2(1) &= \max \{f_1(1), 8 + f_1(1-4)\} = 0, \\ f_2(2) &= \max \{f_1(2), 8 + f_1(2-4)\} = 0, \\ f_2(3) &= \max \{f_1(3), 8 + f_1(3-4)\} = 7, \\ f_2(4) &= \max \{f_1(4), 8 + f_1(4-4)\} = 8, \\ f_2(5) &= \max \{f_1(5), 8 + f_1(5-4)\} = 8, \\ f_2(6) &= \max \{f_1(6), 8 + f_1(6-4)\} = 8, \end{aligned}$$

$k=3$ のとき

$$\begin{aligned} f_3(1) &= \max \{f_2(\mathbf{1}), 3 + f_2(1-2)\} = 0, \\ f_3(2) &= \max \{f_2(2), 3 + f_2(\mathbf{2-2})\} = 3, \\ f_3(3) &= \max \{f_2(3), 3 + f_2(3-2)\} = 7, \\ f_3(4) &= \max \{f_2(4), 3 + f_2(4-2)\} = 8, \\ f_3(5) &= \max \{f_2(5), 3 + f_2(\mathbf{5-2})\} = 10, \\ f_3(6) &= \max \{f_2(6), 3 + f_2(\mathbf{6-2})\} = 11, \end{aligned}$$

ナップサック問題：解答例

(KP) 最大化 $z = 7x_1 + 8x_2 + 3x_3$
 制約 $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6, x_j \in \{0,1\}, \forall j$
 $f_k(\lambda) = \max \{f_{k-1}(\lambda), c_k + f_{k-1}(\lambda - a_k)\}$

$k=1$ のとき

$$\begin{aligned} f_1(1) &= \max \{f_0(1), 7 + f_0(1-3)\} = \max \{0, -\infty\} = 0, \\ f_1(2) &= \max \{f_0(2), 7 + f_0(2-3)\} = \max \{0, -\infty\} = 0, \\ f_1(3) &= \max \{f_0(3), 7 + f_0(3-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(4) &= \max \{f_0(4), 7 + f_0(4-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(5) &= \max \{f_0(5), 7 + f_0(5-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \\ f_1(6) &= \max \{f_0(6), 7 + f_0(6-3)\} = \max \{0, 7\} = 7, \end{aligned}$$

最終的に、 $f_n(b)$ を求めたい
次の順に計算

$$\begin{array}{l} f_1(1) \Rightarrow f_1(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_1(b) \\ f_2(1) \Rightarrow f_2(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_2(b) \\ \vdots \\ f_n(1) \Rightarrow f_n(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_n(b) \end{array}$$

$k=2$ のとき

$$\begin{aligned} f_2(1) &= \max \{f_1(1), 8 + f_1(1-4)\} = 0, \\ f_2(2) &= \max \{f_1(2), 8 + f_1(2-4)\} = 0, \\ f_2(3) &= \max \{f_1(3), 8 + f_1(3-4)\} = 7, \\ f_2(4) &= \max \{f_1(4), 8 + f_1(4-4)\} = 8, \\ f_2(5) &= \max \{f_1(5), 8 + f_1(5-4)\} = 8, \\ f_2(6) &= \max \{f_1(6), 8 + f_1(6-4)\} = 8, \end{aligned}$$

 $k=3$ のとき

$$\begin{aligned} f_3(1) &= \max \{f_2(1), 3 + f_2(1-2)\} = 0, \\ f_3(2) &= \max \{f_2(2), 3 + f_2(2-2)\} = 3, \\ f_3(3) &= \max \{f_2(3), 3 + f_2(3-2)\} = 7, \\ f_3(4) &= \max \{f_2(4), 3 + f_2(4-2)\} = 8, \\ f_3(5) &= \max \{f_2(5), 3 + f_2(5-2)\} = 10, \\ f_3(6) &= \max \{f_2(6), 3 + f_2(6-2)\} = 11, \end{aligned}$$

$k \lambda$	1	2	3	4	5	6
$f_1(\lambda)$						
x_1						
$f_2(\lambda)$						
x_2						
$f_3(\lambda)$						
x_3						

9

$k \lambda$	1	2	3	4	5	6
$f_1(\lambda)$	0	0	7	7	7	7
x_1	0	0	1	1	1	1
$f_2(\lambda)$	0	0	7	8	8	8
x_2	0	0	0	1	1	1
$f_3(\lambda)$	0	3	7	8	10	11
x_3	0	1	0	0	1	1

- $f_3(6) = \max \{f_2(6), 3 + f_2(6-2)\} = 11$, より逆算 $x_3 = 1$
- $f_2(4) = \max \{f_1(4), 8 + f_1(4-4)\} = 8$, $x_2 = 1$
- $f_1(0) = 0$, $x_1 = 0$

10

AMPLによるナップサック問題

```
#knapsack.mod
param Nitem;
param weight{i in 1..Nitem};
param value{i in 1..Nitem};
param l{i in 1..Nitem};
param u{i in 1..Nitem};
param capacity;

var x{i in 1..Nitem} binary;

maximize Profit: sum{i in 1..Nitem} value[i]*x[i];

subject to Capacity_Constraint:
sum{i in 1..Nitem} weight[i]*x[i] <= capacity;
subject to Upper_Lower_Bound {i in 1..Nitem}:
l[i] <= x[i] <= u[i];

#knapsack.dat
param Nitem:=3;
param:value weight:=
1 7 3
2 8 4
3 3 2;
param capacity:=6;
param l :=
1 0 2 0 3 0;
param u :=
1 1 2 1 3 1;

#knapsack.run
model knapsack.mod ;
data knapsack.dat ;
option display_round 6;
option solver cplexamp;
solve;
display Profit > knapsack.sol;
display x > knapsack.sol;
```

11

AMPLによるナップサック問題:DP

```
#knapsack-dp.run
param Nitem;
param value{i in 1..Nitem};
param weight{i in 1..Nitem};
param capacity;
param l{i in 1..Nitem};
param u{i in 1..Nitem};
param f{k in 0..Nitem, la in -capacity..capacity};

data knapsack.dat;
option display_transpose -20; #行列表示
for{k in 0..Nitem, la in -capacity..-1} #laはλを表す
{
    let f[k,la]:=-1000; #初期設定
}
for{la in 0..capacity}
{
    let f[0,la]:=0; #初期設定
}
for{k in 1..Nitem}
{
    let f[k,0]:=0; #初期設定

    #左から続く
    for{k in 1..Nitem}
    {
        for{la in 1..capacity}
        {
            if(f[k-1,la] >=
                value[k]+f[k-1,la-weight[k]])then
            {
                let f[k,la]:=f[k-1,la];
            }
            if(f[k-1,la] <
                value[k]+f[k-1,la-weight[k]])then
            {
                let f[k,la]:=value[k]+f[k-1,la-weight[k]];
            }
        }
    }
}
display f > knapsack-dp.sol;
```

12

動的ロットサイズ決定問題 Wagner-Whitin (WW)モデル

期(月)	1	2	3
需要 d_t	10	10	10
固定費 a_t	100	120	100
製造変動費 v_t	20	30	10
在庫費 h_t	8	2	(3)

- 計画期間 $T=3$, 各期の需要 d_t
- t 期に生産する場合の製造固定費は生産量に関係なく a_t (万円)
- t 期に生産する場合の製造変動費は常に製品あたり v_t (万円)
- t 期末の在庫に対する、製品1個当たりの在庫保管費 h_t (万円)
- 生産は瞬時; 品切れは不許可
- 総費用を最小にする生産計画を決めたい

WWモデルの定式化1

最小化 $z = \sum_{t=1, \dots, T} (p_t(x_t) + h_t I_t)$

制約 $I_{t-1} + x_t - d_t = I_t, \forall t$ (流量保存)

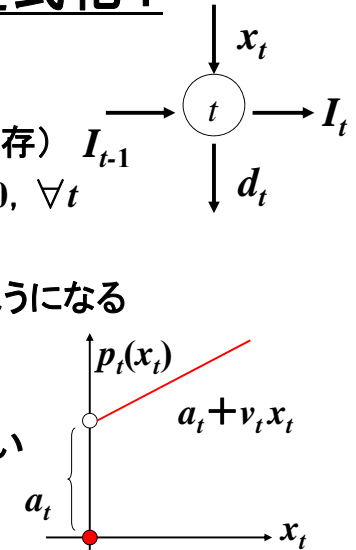
$I_t \geq 0$ (品切れ不許可), $x_t \geq 0, \forall t$

$I_0 = 0, I_T = 0$ 変数は x, I

製造費を表す関数 $p_t(x_t)$ は以下ようになる

$$p_t(x_t) = \begin{cases} a_t + v_t x_t & x_t > 0 \text{ のとき} \\ 0 & x_t = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

このような関数を取り扱うのは難しい



WWモデルの定式化2

最小化 $z = \sum_{t=1, \dots, T} (a_t y_t + v_t x_t + h_t I_t)$

制約 $I_{t-1} + x_t - d_t = I_t, \forall t$ (流量保存)

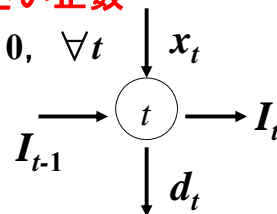
($x_t > 0 \Rightarrow y_t = 1, y_t = 0$ 期に製造を行うとき1,
製造を行わないとき0)

ここで $y_t = 0 \Rightarrow x_t = 0$ を表すようにするには)

$x_t \leq M y_t$ ただし M は十分大きい正数

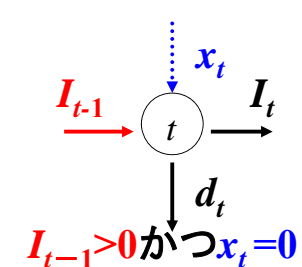
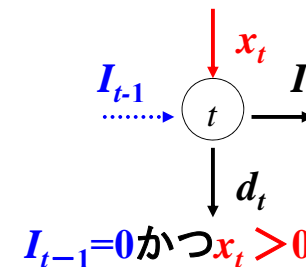
$I_t \geq 0$ (品切れ不許可), $x_t \geq 0, \forall t$

$I_0 = 0, I_T = 0$



WWモデルの最適解の性質(1)

- WWモデルの最適解は、 $I_{t-1} x_t = 0$ という性質を満足する。 $T-1$ 期末在庫 I_{T-1} 、または、 t 期生産量 x_t のいずれか一方が0
- $I_{t-1} x_t = 0$: 2通りの場合がある
- 第 $t-1$ 期末に $I_{t-1} = 0$ かつ $x_t > 0$ (在庫がない場合製造する)
- 第 $t-1$ 期末に $I_{t-1} > 0$ かつ $x_t = 0$ (在庫がある場合製造しない)
- 在庫があり同時に生産するとコスト的に無駄である



WWモデルの最適解の性質(2)

Zero-Inventory Property

- 性質1 t 期に生産する($x_t > 0$)ということは、 $t-1$ 期末在庫が0 ($I_{t-1} = 0$) である。
- 性質2 t 期に生産する場合、 t 期の生産量 x_t は t 期に始まり、向こう何期分かの需要に見合う量である。
 – t 期の生産量 x_t は $d_t, d_t + d_{t+1}, d_t + d_{t+1} + d_{t+2}, \dots, d_t + d_{t+1} + d_{t+2} + \dots + d_T$ のいずれか(ただし、 T は計画期間の長さ)

動的計画法(DP)による解法

- t 期の生産量 x_t は $d_t, d_t + d_{t+1}, d_t + d_{t+1} + d_{t+2}, \dots, d_t + d_{t+1} + d_{t+2} + \dots + d_T$ のいずれか
- $c_{t,k-1}$ = t 期から $k-1$ 期の需要に見合う量を t 期の生産量 $x_t = d_t + d_{t+1} + d_{t+2} + \dots + d_{k-1}$ としたときの t 期から $k-1$ 期の総費用($c_{t,k}$ は計算可能)
- f_t = ($t-1$ 期末在庫 I_{t-1} が0のときに) t 期以降最終 T 期末までを最適に決定したときの t 期以降の最小費用(f_t を求めたい)
- $f_t = \min_{k=t+1, \dots, T+1} \{c_{t,k-1} + f_k\}$ (DPの漸化式 $f_{T+1} = 0$)

$$= \min_{k=t+1, \dots, T+1} \{(c_{t,t} + f_{t+1}), (c_{t,t+1} + f_{t+2}), (c_{t,t+2} + f_{t+3}), \dots, (c_{t,T-1} + f_T), (c_{t,T} + f_{T+1}), \}$$
- f_t を求めるとき、 $f_{t+1}, f_{t+2}, \dots, f_T, f_{T+1}$ は既に計算済
- $f_{T+1} = 0$ として $f_T, \dots, f_{t+2}, f_{t+1}$ の順に計算する

動的計画法(DP)の漸化式

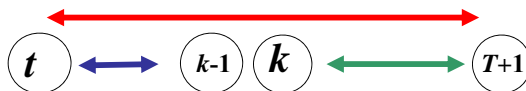
- $c_{t,k-1}$ = t 期から $k-1$ 期の需要に見合う量を t 期の生産量 x_t としたときの t 期から $k-1$ 期の総費用

$$c_{t,k-1} = a_t + v_t(d_t + d_{t+1} + \dots + d_{k-1}) + h_t(d_{t+1} + \dots + d_{k-1}) + h_{t+1}(d_{t+2} + \dots + d_{k-1}) + \dots + h_{k-2}(d_{k-1})$$

$$= a_t + v_t \sum_{j=t}^{k-1} d_j + \sum_{i=t}^{k-2} h_i \sum_{j=i+1}^{k-1} d_j$$

$$f_t = \min_{k=t+1, \dots, T+1} \{c_{t,k-1} + f_k\} \quad (\text{DPの漸化式})$$

ただし、 $f_{T+1} = 0$ (境界条件)



解答: $f_t = \min_{k=t+1, \dots, T+1} \{c_{t,k-1} + f_k\}$
 ただし、 $f_{T+1} = 0$ (境界条件)

- $f_{T+1} = 0$ より、 $f_4 = 0$ と定める。
- $f_3 = 100 + 10 \times 10 + f_4 = 200^*$ (3月に3月分生産)
- $f_2 = \min\{2\text{月分のみ生産}, 2-3\text{月分同時生産}\}$

$$= \min\{120 + 30 \times 10 + f_3, 120 + 30 \times 20 + 2 \times 10 + f_4\}$$

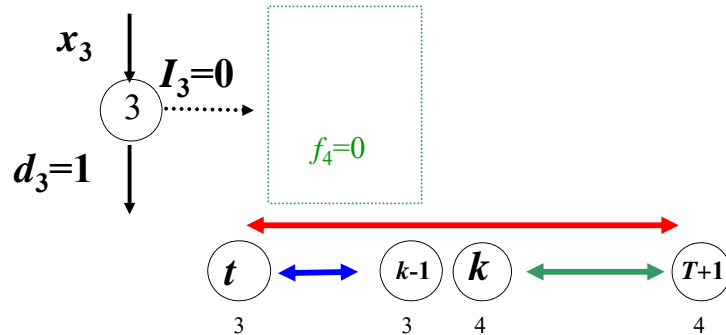
$$= \min\{620^*, 740\} = 620$$
 (2月分のみ生産)
- $f_1 = \min\{1\text{月分のみ生産}, 1-2\text{月分同時生産}, 1-3\text{月分同時生産}\}$

$$= \min\{100 + 20 \times 10 + f_2, 100 + 20 \times 20 + 8 \times 10 + f_3, 100 + 20 \times 30 + 8 \times 20 + 2 \times 10 + f_4\}$$

$$= \min\{920, 780^*, 880\} = 780$$
 (1月に1-2月分生産)
- これより、総費用は780、最適解は $x_1 = 20, I_1 = 10, x_3 = 10$

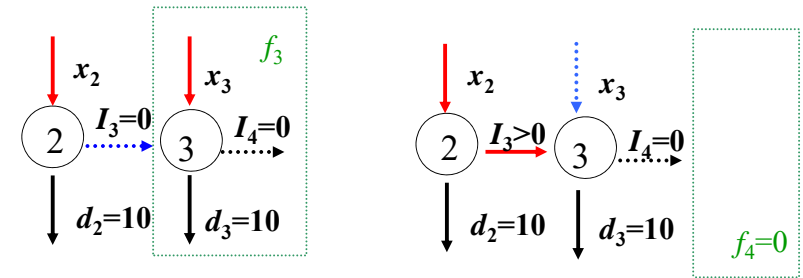
解答1: $f_t = \min_{k=t+1, \dots, T+1} \{c_{t,k-1} + f_k\}$
 ただし、 $f_{T+1} = 0$ (境界条件)

- $T=3, f_{T+1}=0$ より、 $f_4=0$
- $t=3$ の場合 (3期から後を考える) $k=4$ のみを計算
 $c_{3,3}=100+10 \times 10=200, f_4=0$
- $f_4=\min\{200+0\}=200$ * 3期に第3期分生産



解答2: $f_t = \min_{k=t+1, \dots, T+1} \{c_{t,k-1} + f_k\}$

- $t=2$ の場合 (2期から後を考える) $k=3, 4$ について計算
- $c_{2,2}=120+30 \times 10=420, f_3=200$, 2期に第2期分のみ生産
- $c_{2,3}=120+30 \times 20+2 \times 10=740, f_4=0$, 2期に第2-3期分を生産
- $f_2=\min\{620^*, 740\}=620$ * 2期に第2期分生産



解答3: $f_t = \min_{k=t+1, \dots, T+1} \{c_{t,k-1} + f_k\}$

- $t=1$ の場合 (1期から後を考える) $k=2, 3, 4$ について計算
- $c_{1,1}=100+20 \times 10=300, f_2=620$, 1期に第1期分のみ生産
- $c_{1,2}=100+20 \times 20+8 \times 10=580, f_3=200$, 1期に第1-2期分を生産
- $c_{1,3}=100+20 \times 30+8 \times 20+2 \times 10=880, f_4=0$, 1期に第1-3期分を生産
- $f_1=\min\{920, 780^*, 880\}=780$ * 2期に第2-4期分生産

