基礎オペレーションズリサーチ（上）

森戸晋、逆瀬川浩孝、椎名孝之

2017年秋学期

目次

1 **線形計画法** 1
1.1 はじめに 1
1.2 定式化 2
1.3 グラフ解法 7
1.4 線形計画法のコンピュータ分析 10
1.5 数理計画法の一般的定式化 24
1.6 単体法 28
1.7 双対性と相補性 54

2 **包絡分析法** 70
2.1 はじめに 70
2.2 効率的フロンティア 70
2.3 得意値評価法 74
2.4 ＣＣＲモデル 77
2.5 効率的フロンティア 78
2.6 非効率 DMU の対策 78
2.7 双対問題 80
2.8 包絡分析法の評価例:大学における学部評価 82

3 **ネットワーク計画法** 89
3.1 はじめに 89
3.2 いくつかの例 89
3.3 最短路問題 90
3.4 最大流問題 93
3.5 輸送問題 96
3.6 輸送問題の解法 97
3.7 施設配置問題 104

4 **整数計画法** 108

4.1 はじめに 108
4.2 分割不可能な離散量を変数とする問題例 109
4.3 整数計画の定型モデル ： シナリオの提示 112
4.4 整数計画の定型モデル： 一般的定式化 123
4.5 分枝限定法 130

1 線形計画法

1.1 はじめに

限られた資源を有効活用して最適な計画を立案したい，という状況を考える．ある制約条件の下で，費用，利益のような評価尺度を最大化，あるいは最小化する（つまり，最適化する）ような政策を求める OR の代表的技法に数理計画法 (mathematical programming) がある．

たとえば,

- 限られた原料を組み合わせて複数の製品を作りたいが，製品ごとに利益率が異なるので，利益最大にする製品ごとの生産量を知りたい
- 食品ごとに栄養価が与えられているときに，どのように組み合わせれば，最低栄養価を確保できるか

などなど．最初の問題は「利益」を最大にする問題，二番目の問題は「栄養価」の最低水準を確保する問題，というように，これらの問題は興味のある数量の増減に関心がある．興味のある量を**目的関数**，組み合わせるものを**変数**，（限られた原料，というように）変数の取り得る値を限定する条件を**制約条件**といい，目的関数を与えられた制約条件の下で，ある目的に合うように変数の組合せを決定する問題を**数理計画**という．あるいはもっと一般的に，**最適化問題**ということもある．

数理計画の中でも特に，生産量を 2 倍にすると使用原料，利益とも 2 倍になる，というように，制約条件も目的関数値の変化も比例の関係になっている（線形という）数理計画問題を解く方法論は**線形計画法**と呼ばれている．線形計画法は 20 世紀半ばに開発された手法で，連立方程式を解くことと密接に結びついている．実際の問題を線形計画問題として表現すると，その答えを得るためには何百万，何千万変数の連立方程式を解くことが必要になり，解けそうもないが，アルゴリズムの工夫とコンピュータの能力向上によって，解ける可能性のある問題の範囲が拡がっている．

実際，現在では，多くの企業で，数理計画問題が日々のオペレーションの中で日常的に使われており，そのうちのいくつかを挙げると，以下のようなものがある．

- 宅配便のトラックの巡回経路を決める
- 航空機や鉄道の乗務員のスケジュールを決める
- 機関投資家が資金を分散投資する場合の投資比率を決める
- 電力会社が発電，送電計画を立てる
- 携帯通信網の設備計画を設計する
- 工場のラインで，製品の加工順序を決める

1.2 定式化

初めは簡単な問題から．

例題 1.1 原料 P, Q を使って製品 A, B を作る．製品 A を 1 単位作るためには原料 P, Q をそれぞれ 1 単位ずつ使い，製品 B を 1 単位作るためには原料 P, Q をそれぞれ $1, 3$ 単位使う．製品 A を作れば 1 単位あたり $2yen$，製品 B を作れば 1 単位あたり $3yen$ の利益がある．原料 P, Q はそれぞれ $4, 6$ 単位しか持っていない．製品 A, B をどういう割合で作ったら利益が最大になるか（原油からガソリンを精製するようなもので，原料も製品も取り得る値は連続量とする）．

解答：文章で書かれても全体像を把握することは苦労するので，問題を整理することから始める．データを次のように一覧表にしておくと分かりやすい．

	製品 A	製品 B	原料制約
原料 P	1	1	4
原料 Q	1	3	6
製品利益	2	3	

決めたいのは製品 A, B の生産量なので，変数はそれぞれの生産量で，それらを x, y とする．限られた原料しか使えないという制約を式で表すと，原料 P に対して $x + y \le 4$，原料 Q に対して $x + 3y \le 6$ という制約になる．いずれも一次式であることに注意．生産量，というのだから，当然 $x \ge 0, y \ge 0$ で，これら（の四つの不等式）が制約条件．制約条件の中で特に，変数が非負であるという条件を特に変数の**非負制約**といい，多くの問題で仮定される．目的関数は 1 単位あたりと書いてあるので $2x + 3y(yen)$，利益なのでこれをなるべく大きくしたい，というのが問題の目的．以上のことを次のようにまとめて書く．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 2x + 3y \\
\text{制約} & x + y \le 4 \\
 & x + 3y \le 6 \\
 & x, y \ge 0
\end{array}
$$

変数の数，制約式が増えることを想定して，今のうちに，行列，ベクトル表現をしておく．最初慣れるまで，翻訳するのが大変だが，構造を把握するには欠かせない表記法なのではやく慣れるように．

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

という記号を導入すると，上の問題は次のように表されることを確かめよ．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{制約} & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \ge 0
\end{array}
$$

ただし，上付きの「$\top$」は転置を表す．

練習 1.1 ベクトルを使った式を，スカラーの式に展開して，それらが最初の定式化の式と同じになることを確かめなさい

解答：

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} =$$

$$A\boldsymbol{x} = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

例題 1.2 製品 A を 1 単位量作るには鉄鋼 1 単位，電力 1 単位，労働力を 3 単位必要とし，製品 B を 1 単位量作るには鉄鋼 2 単位，電力 1 単位，労働力を 1 単位必要とする．鉄鋼は 14 単位，電力は 8 単位，労働力は 18 単位利用可能である．製品 A, B を 1 単位量作ると，利益はそれぞれ $2yen, 3yen$ になる．このとき，利益最大とする製品 A, B の生産量を求めたい．この問題を上の例を参考にして定式化しなさい．それらをベクトル表現しなさい．

解答：与えられた条件を一覧表にまとめると次のようになる．

	製品 A	製品 B	リソース許容上限
鉄鋼使用量	1	2	14
電力使用量	1	1	8
労働力使用量	3	1	18
利益	2	3	

製品 A を x 単位，製品 B を y 単位作るとすれば，目的関数は $2x+3y$ の最大化である．そのための条件として，生産量なので $x \geq 0, y \geq 0$ を仮定し，鉄鋼の原料制約から

$$x + 2y \leq 14$$

でなければいけない．同様に，電力，労働力の制約から

$$\begin{aligned} x + y &\leq 8 \\ 3x + y &\leq 18 \end{aligned}$$

以上をまとめると，次のような定式化が得られる．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 2x + 3y \\ \text{制約} & x + 2y \leq 14 \\ & x + y \leq 8 \\ & 3x + y \leq 18 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

これを行列ベクトルを使って表現すると，行列ベクトルの中身は違うが，例題 1 と全く同じになる．これが記号を導入することのメリットでもある．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{制約} & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge 0 \end{array}$$

行列ベクトルは以下のものを使う

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例題 1.3 次の問題を線形計画問題として定式化しなさい（出典：刀根薫「数理計画」）．ある工場で，三つの原料 K, L, M から四つの製品 A, B, C, D を製造している．各製品を 1kg 作るために使用する原料の量，１日に使える原料の量が次の表のように与えられている．製品 A, B, C, D は作っただけ売れ，その利益は $1kg$ あたり，それぞれ $4, 5, 3, 6$ 万円とする．各製品を何 kg ずつ作ると利益が最大になるか

生産計画

原料	製品 A	製品 B	製品 C	製品 D	利用可能量/日
K	5kg/kg	6	3	7	210kg
L	2ℓ/kg	1	3	1	60ℓ
M	3g/kg	4	5	1	60g

解答：四つの製品 A, B, C, D の生産量をそれぞれ x_1, x_2, x_3, x_4 とすると，目的関数は利益で $4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4$，その最大化が目標．原料 K の制約条件は

$$5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 \le 210$$

のように表される．原料 L, M に対しても同様に考えると，次のような定式化が得られる

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 \\ \text{制約} & 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 \le 210 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \le 60 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \le 60 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

この場合も，行列ベクトルを用いた表現は上の例題と同じ．行列ベクトルの中身は以下の通り（空白を埋めなさい）

$$A = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

練習 1.2 次の問題を線形計画問題として定式化しなさい（出典：刀根薫「数理計画」）．食品 A, B の単位量（1g）に含まれる栄養素 K, L, M の量と，それぞれの栄養素の 1 日最低摂取量が次の表のように与えられている．食品 A, B は 1g あたり，それぞれ 2 円，3 円かかるという．このとき，食品 A, B（だけ）をどのように組み合わせたら，もっとも安価で，栄養の必要摂取量を満たすようにできるか.

栄養問題

栄養素	食品 A	食品 B	必要摂取量/日
K	1mg/g	2	8mg/g
L	0.5mg/g	2	6mg/g
M	3mg/g	2	12mg/g

解答：

練習 1.3 次の問題を線形計画問題として定式化しなさい（出典：刀根薫「数理計画」）．三つの金属 K, L, M を使って合金を作る．混合比率（重量）は K が 60%，L が 20% 以下，M が 20% 以上，という制約がある．これらの金属を作るために 5 種類の原料 A, B, C, D, E を用いる．それぞれの原料に含まれる成分比は次の表のように与えられている．原料以外は不純物で（たとえば，原料 A は 30% の不純物を含むと読む)，それを取り除くためにかかる費用も，同じ表の「コスト」欄に与えられている．このとき，1kg の合金を最小コストで作るために，原料をどのように組み合わせて使えばよいか.

混合問題，その１

金属	原料 A	原料 B	原料 C	原料 D	原料 E
K	40%	10	20	0	50
L	10	20	10	20	20
M	20	10	20	10	10
コスト	9 万円/kg	7	5	6	10

（**ヒント**）元素 K に関する制約は等式になるので，これまでの知識では，行列ベクトルで表すことは出来ない.

解答：

練習 1.4 4 種類の鉱石を混ぜて合金を作りたい．必要な成分として，元素 K,L,M の合金単位重量あたりの最低含有量が表のように与えられている．また，各鉱石の各元素含有量も表のように与えられている．鉱石 A, B, C, D の購入単価はそれぞれ $800, 400, 600, 500$ であるとき，購入費用が最小の生産計画を立てなさい．

混合問題，その 2

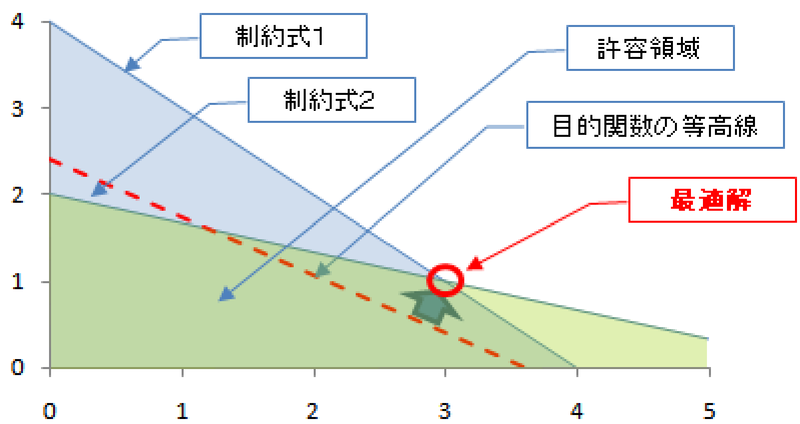
元素	鉱石 A	鉱石 B	鉱石 C	鉱石 D	最低含有量
K	10	3	8	2	5
L	90	150	75	175	100
M	45	25	20	37	30

解答：

1.3 グラフ解法

例題 1.1 のように，線形不等式制約で変数の数が 2 の場合はグラフを使って解くことが出来る．その解き方を注意深く調べることによって，一般の線形計画問題の解き方が見えてくる．制約式をすべて満たしている x, y は実行可能である，あるいは**実行可能解**，という．たとえば，$x = y = 1$ や $x = 4, y = 0$ は実行可能解．制約条件が一次不等式で与えられているから，その実行可能解の存在範囲（解の許容領域ともいう）は容易に見付けることが出来る．

- $x, y \geq 0$ なので，非負領域，すなわち第一象限のみを考えれば十分．
- $x + y \leq 4$ は $x + y = 4$ で平面を二つに分けたとき，その原点を含む側，したがって，$x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ を満たす (x, y) の範囲は，三点 $(0,0), (4,0), (0,4)$ を頂点とする直角三角形の内部と周上
- $x + 3y \leq 6$ に対しても同様に考えると，条件式 $x + 3y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$ を満たす領域は，三点 $(0,0), (6,0), (0,2)$ を頂点とする直角三角形の内部と周上
- 結局，すべての条件式を満たす領域（実行可能解の存在範囲）は二つの三角形の共通部分，すなわち，4 点 $(0,0), (4,0), (3,1), (0,2)$ を結ぶ四辺形の周を含む内部とその周上，となることが分かる
- 条件を満たす点のすべてについて $2x + 3y$ を計算して，その最大となる点を見付ければ良いの．例えば，$2x + 3y = 2$ を満たす点 (x, y) は傾きが $-2/3$，y 切片が $2/3$ の直線上にあり，$2x + 3y = 3$ を満たす点 (x, y) は y 切片が 1 の直線上にある．従って，$2x + 3y$ を最大にするためには，傾きが $-2/3$ の直線を原点からなるべく遠ざければよいということが分かる
- 結局，点 $(3, 1)$ で $2x + 3y$ が 9 となる，それが最大であることが分かる



解の許容領域と最適解

1.3.1 アルゴリズム

発見：実行可能解の許容領域は**凸多角形**になる．

目的関数は線形という条件から，許容領域の内部で目的関数が最大値を取ることはあり得ない．なぜならば，もし内部の点 A で最大となったとすると，上の図の点線の位置で目的関数が最大になるようなものだから，点線より外側に許容領域があり，その任意の実行可能解は点 A における目的関数の値より大きくなってしまうから．また，凸多角形の頂点における目的関数の値の中に最大値があることも分かる．上の例で言えば，四つの頂点 $(0,0),(4,0),(3,1),(0,2)$ のいずれかで，目的関数は最大になる．

目的関数の傾きと，一つの制約式の傾きが等しくなる場合，もしその制約式が許容領域の凸多角形の一辺になっているならば，その一辺のどの点でも目的関数の値は最大になり，最適解はたくさんあるが，最適値そのものは，その辺の両端にある二つの頂点計算したものと同じになる．したがって，「凸多角形の頂点のいずれかで目的関数は最大値を取る」と言っても間違いではない．

凸多角形の頂点の数は有限個しかない．もし，目的関数の値が大きくなるように頂点を順番にたどることが出来れば，有限回の計算で，最大値に到達することが出来ることになる．出発点は原点とすればよい．原点，つまり $x=y=0$ はもちろん実行可能解．

アルゴリズムの実現：

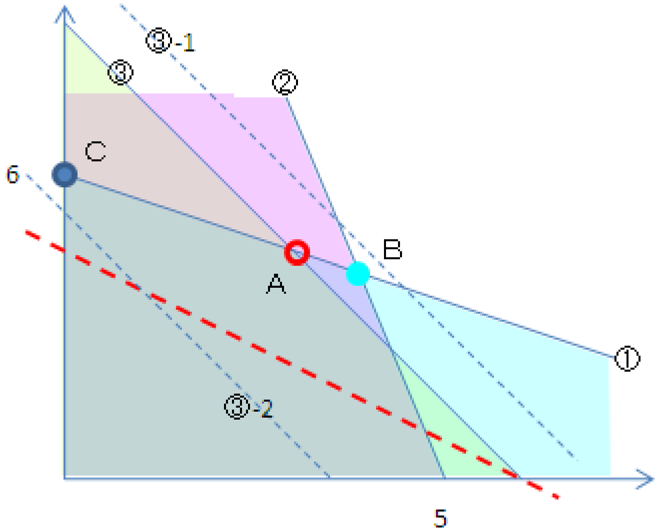
1. $x=0, y=0$ とする．
2. x を最大限（$x \leq 4$）作る．その結果，$x=4, y=0$ で，利益は 8
3. 原料 Q が余っているので，それを使い切るために $x=3, y=1$ として，利益は 9
4. それ以上改善の余地がないので，$x=3, y=1$，利益 9 が最適解

例題 1.4 次の線形計画問題をグラフを使って解け

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & x+2y \\
\text{制約} & \frac{x}{12}+\frac{y}{4} \leq 1 \\
 & \frac{x}{5}+\frac{y}{12} \leq 1 \\
 & \frac{x}{6}+\frac{y}{6} \leq 1 \\
 & x, y \geq 0
\end{array}
$$

３番目の制約式の定数を変えたときに最適解がどうなるか検討せよ．

解答：(x,y) の動く範囲，解の許容領域は次の図のように与えられる



(1)，(2)，(3) がそれぞれ 1 番目，2 番目，3 番目の制約式の上限を与える直線である．太い点線が目的関数の等高線なので，図の A の点，すなわち，1 番目と 3 番目の制約を目一杯使う計画が目的関数を最大にすることが分かる．3 番目の制約が緩くなって図の (3)-1 までずれると，最適解は図の B の点になり，2 番目の制約式が効いてくる．逆に，3 番目の制約がきつくなる場合，(1)，(3) の交点が図の点 A と C の間にある場合は 1 番目と 3 番目が制約になることには変わりがないが，図の点 C を超えて (3)-2 まで移動すると，最適解は 3 番目の制約だけで決まり，$x = 0$ が最適になる．

練習 1.5 次の線形計画問題をグラフを使って解きなさい．ただし，正確な解を求めるために連立方程式を 1 回だけ解く必要がある．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 3x + y \\
\text{制約} & 16x + 5y \leq 80 \\
 & 7x + 6y \leq 42 \\
 & 5x + 8y \leq 40 \\
 & 4.5x + 18y \leq 81 \\
 & x, y \geq 0
\end{array}
$$

解答：

1.4 線形計画法のコンピュータ分析

実際にユーザーが線形計画法の解法を開発したり，計算機プログラムを書かなければならないということはめったにない．そこでまず，例を用いながら，問題を数理モデルに置き換える定式化 (formulation) またはモデル化 (modeling) と呼ばれるプロセスを示し，定式化されたモデルをコンピュータに解かせるとどのような情報が得られるかを明らかにする．

例 1 鉄鋼電力労働力の問題

大久保工場では，鉄鋼，電力，労働力という 3 種類のリソースを使って，3 種類の製品を生産している．この工場では，いま来週の生産計画を立てようとしている．リソースの許容範囲の中で，利益を最大にする生産計画を立てるにはどうしたらよいだろうか．各製品の使用リソース量，リソースの許容上限，製品 1 個当たりの利益などは次の表で与えられるものとする．

表 各製品の利益とリソース許容上限

	製品 1	製品 2	製品 3	リソース許容上限
鉄鋼使用量	1	2	3	14
電力使用量	1	1	2	8
労働力使用量	3	1	2	18
利益	2	3	4	

これをもとに，この生産計画の定式化を始める．定式化にあたってのポイントは，

1. **変数または決定変数**(decision variables) **の決定** 何が制御可能であり，何を決定変数とするか
2. **目的関数**(objective function) **の設定** 最適化 (最大化/最小化) を図る目標が何で，制御可能な変数といかなる関係をもつか
3. **制約条件**(constraints) **の設定** 問題を制約する条件が何で，それらの制約と制御可能な変数とがどう結びついているか

の 3 つである．例題では変数，目的関数，制約条件の決定がおのずと定まってしまうことが多いが，実際の最適化では，問題の境界条件 (boundary condition) が明確に与えられておらず，しかも，何が本当の目的か明らかでないために，定式化の三項目とも簡単に定まらないことも多い．

定式化は，最終的には数式表現されるが，変数，目的関数，制約条件がすべて具体的な意味をもっているので，数式表現する前に「**言葉による定式化**」を心がけるとよい．言葉による定式化は数理モデルを他人に説明するときにも威力を発揮し，わかりやすい形でさえあれば表現形式にこだわる必要はない．たとえば次のような言葉でモデルを表現できる．

- 変数＝各製品の生産数量
- 目的関数＝総利益
- 制約条件＝各リソースの許容上限を満足

今の問題で，言葉によるモデルを数式モデルに書き表すために，変数，すなわち，各製品の生産数量を x_1, x_2, x_3 と定義すると，以下の定式化が自然に出てくる．

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\text{最大化} & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & \text{（総利益）} \\
\text{制約} & & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 14 & \text{（鉄鋼）} \\
& & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 & \text{（電力）} \\
& & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 18 & \text{（労働力）} \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array} \tag{1}
$$

定式化されたモデルを解くためには，線形計画法を解くパッケージを使う．ここでは，誰でも簡単に手に入れられる EXCEL のソルバーを用いることを想定して説明する．

1.4.1　EXCEL による線形計画問題の解き方

手順 1　まず EXCEL シート上に，問題として与えられるデータ（定数部分）を適当に配置する．変数の値 x_j に依存して定まる目的関数値 z や，各制約条件の左辺の値を計算した結果を格納するセルを決め，各セルにそれらの値を計算する数式を定義する．

	A	B	C	D	E	F	G
1	鉄鋼電力労働力の問題						
2							
3		製品1	製品2	製品3	総利益		
4		x1	x2	x3	z		
5	生産量	1	0	0			
6	利益	2	3	4	2		許容上限
7	鉄鋼使用量	1	2	3	1	≦	14
8	電力使用量	1	1	2	1	≦	8
9	労働力使用量	3	1	2	3	≦	18

E 列を除いて，すべて定数が入力されている．セル E6 に総利益を求める式を入力する．総利益は $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ であり，この目的関数式の係数が 6 行目に示されている．そして 5 行目の（色つきの）セルは，目的関数値を最大にするときの，各変数 x_j の値（解）が格納されるセルとなる．そこで，セル E6 には

```
=SUMPRODUCT($B$5:$D$5,B6:D6)
```

という式を入力すると，内積が計算され，$2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ という総利益の値が求まるようになる．入力に際しては次のようにすると，入力ミスを最小限にとどめることが出来る：

1. 「`=SUMPRODUCT(`」まで入力したら（小文字でも構わない），
2. 矢印キーを使って仮アクティブセル（点線で囲まれるセルのこと）をセル B5 まで動かしてから「：」キーを押し，
3. さらに矢印キーを使って仮アクティブセルをセル D5 まで動かし，$F4$ キーを押すと「`=SUMPRODUCT($B$5:$D$5`」と表示されるはず，
4. さらに「,」を入力してから，同じように矢印キーと「：」キーを操作して「`=SUMPRODUCT($B$5:$D$5,B6:D6`」となるようにして，

5. 最後に「)」を入力してから Enter キーを押す．

「$ 」記号をつけるのは絶対参照にするという意味である．絶対参照にすればコピーペーストしても，セルがずれることはない．F4 キーを押すと「$ 」記号がつく．図の例では $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ としたのでセル $E6$ には 9 と表示されるはずである．

7 行目から 9 行目までが制約条件に対応している．後で述べるように，EXCEL では目的関数値を除くすべての変数の非負性 $(x_j \geq 0)$ をオプションで指定できるので，変数の非負条件は省略する．例えば 7 行目は，鉄鋼の制約条件を示している．制約条件の左辺 $x_1 + 2x_2 + 3x_3$ は目的関数と同じ形をしているということを考えると，セル $E7$ にはセル $E6$ と同様の式を入力すればよいことが分かる．セル $E6$ をセル $E7$ にコピーペーストすると，`$B$5:$D$5` を絶対参照で入力しておいたおかげで，セル $E7$ には正しく

```
=SUMPRODUCT($B$5:$D$5,B7:D7)
```

という式が入力されるはずである．以下同様に，セル E8,E9 にもセル E6 をコピーペーストすればよい．

注意

1. $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + h$ のように定数 h を目的関数に加えると，「目的関数が線形でない」とソルバーに文句を言われるので，定数は最適化の後に，最適目的関数値に加えたものを適当なセルに表示させるようにする．
2. 問題を設定するためには，数値と計算式だけで十分だが，EXCEL の問題シートを見やすいものにするために変数が何に対応するかや目的関数や制約条件が何に対応するがわかるような説明を入れることを勧める．
3. 変数 x_j に，たとえば $x_j \leq u_j$（ただし，u_j は何らかの定数）という形の単純な上限（または下限）制約が存在する場合にも，EXCEL シート上で上限制約の存在が見える形に定式化することを勧める．手順 2 の「ソルバーのパラメーター」の設定で「変数セル $\leq$ 定数」という制約条件を設定した場合には，この制約に対する「感度レポート（後述)」が表示されないために，潜在価格を読み取ることができない．

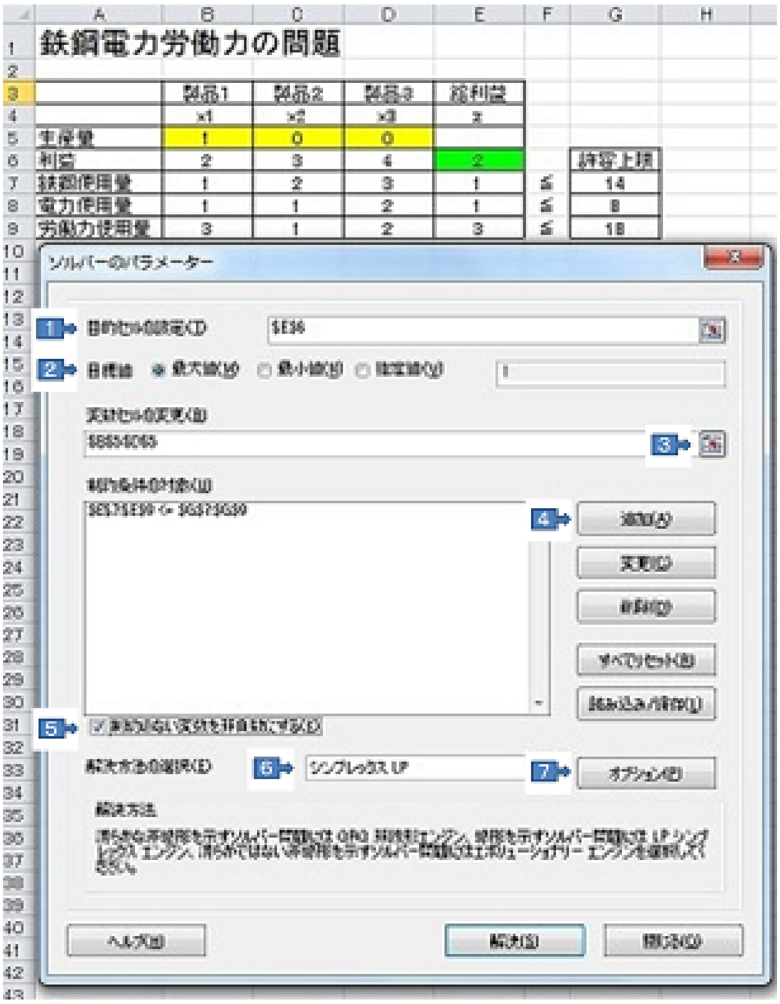
練習 1.6 セル B5:D5 に制約式を満たす範囲で，適当に値を入れて，セル E6 をなるべく大きくなるようにしなさい．最大の値を取った組合せを記録しておきなさい

最高記録は：

手順 2 [ツール] − [ソルバー] を選択すると，「ソルバーのパラメーター」を設定するウィンドウが開く．

ここで，

1. 目的セル＝目的関数値 z を格納するセルの指定（一つ）
2. 目標値＝最大化か最小化かの指定
3. 変化させるセル＝変数値を格納するセルの指定（一般に複数）



4. 制約条件＝制約条件の左辺の値，等号／不等号，右辺定数の値の指定
5. 非負条件＝チェックマークをつけると制約のない変数を非負数にする．各変数に非負条件のついた数理計画問題の場合，ここにチェックマークを入れると非負条件を制約として入力する必要がなくなる．
6. 解決方法の選択＝この授業では線形の数理計画問題を扱うので「シンプレックス LP」エンジンを選択する．デフォルトは「GRG 非線形」となっているので注意すること．
7. オプション＝線形計画問題の場合は，何もする必要はない．変数に整数条件や０－１条件

のついた数理計画問題を解く場合は,「制約条件」で変数が整数や０−１変数であることを指定するが，さらに「オプション」を選択し,「整数制約条件を使用した解決」の「整数制約条件を無視する」にチェックマークが入っていないことを確認すること．万一，チェックマークが入っている場合はチェックマークをはずす.

を設定することによって，線形計画問題（あるいは整数計画問題）とその解法を定義する．それぞれの項目は図の番号に対応している．設定の仕方は，各項目の入力枠をクリックで選択した後，シート上のセルを選択するなどして設定を行う.

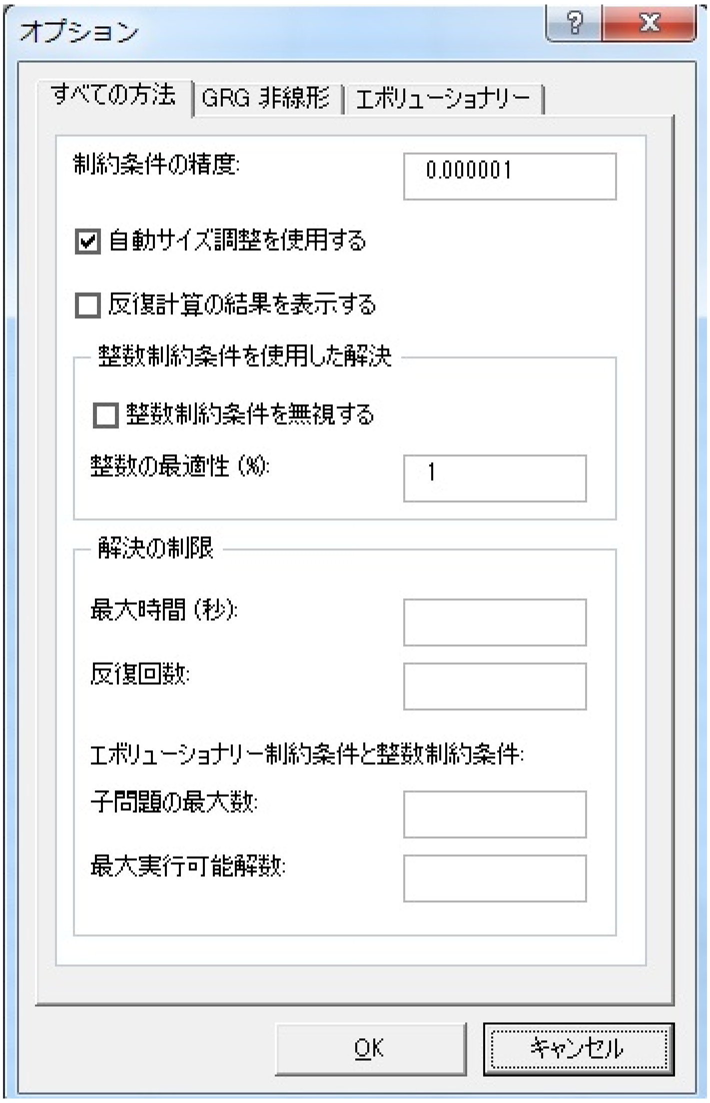
この問題の場合は,

1. 目的セル＝ E6（セル E6 をアクティブにしてからソルバーを選択すると，自動的に入力されている.
2. 目標値＝最大化（これもデフォルト）
3. 変化させるセル＝ B5:D5（マウスを使って選択する）
4. 制約条件（$E7 : E9 <= G7 : G9$）　「追加」ボタンを押して「制約条件の追加」ウィンドウを表示させ,「セル参照」の欄に（マウスを使って）$E7 : E9$ と入力し,「制約条件」の欄に $G7 : G9$ と入力してから「OK」ボタンを押す
5. チェックマークを入れる
6. 解決方法を「シンプレックス LP」に変更する
7. 線形モデルなので,「オプション」をクリックする必要はない

とする.

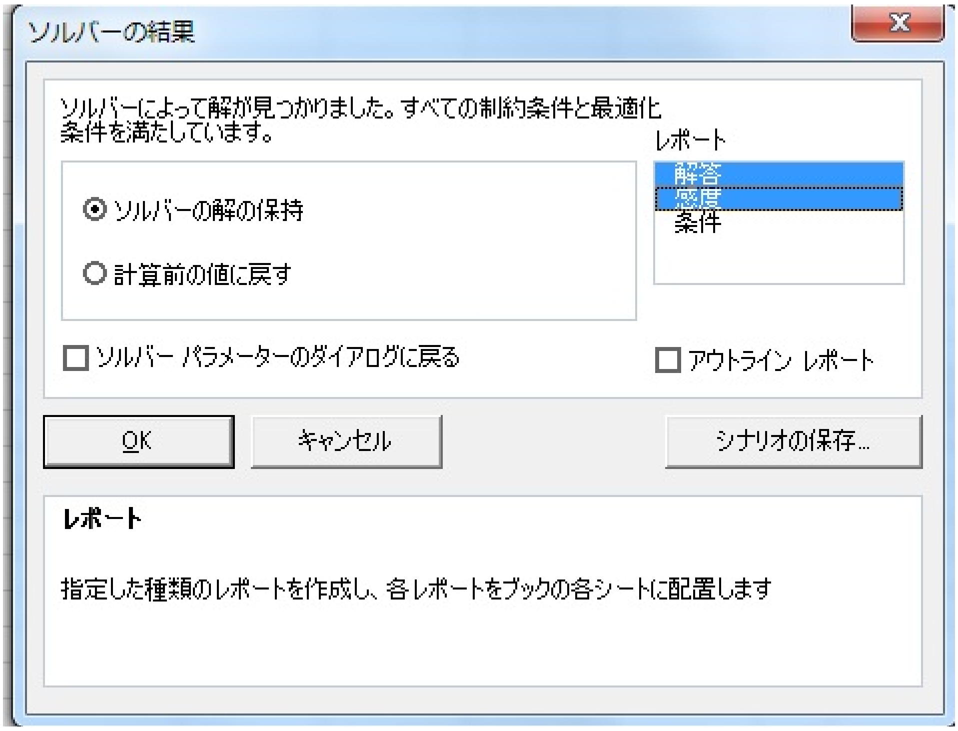
手順３　反復計算の結果を表示したいときは「ソルバーのパラメーター」ウィンドウで「オプション」ボタンをクリックし,「オプション」ウィンドウを開き.「反復計算の結果を表示する」にチェックマークを入れる．反復計算の結果を表示する必要がないとき，かつ，問題が整数変数を含まない場合は，手順４に進む．問題が整数変数を含む場合は，以下を確認する.「オプション」ボタンをクリックして「オプション」ウィンドウを開き,「整数制約条件を無視する」にチェックマークが入っていないことを確認する．チェックマークが入っている場合は，チェックマークをはずす.

手順４　「オプション」ウィンドウで OK をクリックし,「ソルバーのパラメーター」ウィンドウにもどり「解決」ボタンを押すと，計算が始まる，と言ってもあっという間に計算が終了し,「ソルバーの結果」というウィンドウが開いて，最適解が発見された場合には「ソルバーによって解が見つかりました。すべての制約条件と最適化条件を満たしています。」というメッセージが表示される．このとき，EXCEL シート上の変数セルには最適解が表示されている．今の場合，結果を見ると $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 0$ となり，製品１を２つ，製品２を６つ作り，製品３は作らないという最適生産計画が計算された．このときの総利益は 22 となる.



出力させたいレポートを，クリックして選択する．出力には，解答，感度，条件の 3 種類がある．通常使うのは，解答レポートと感度レポートである．また，最適化終了後，元のシートに解の値を記入するときには，「解ソルバーの解の保持」，さもなくば，「計算前の値に戻す」を選択する．

練習 1.7 ソルバーを使って練習 1.6 を解きなさい．前の練習でメモした最大値と同じでしたか．



1.4.2 感度レポートの読み方

「感度レポート」を表示させるオプションを選ぶと，「感度レポート」というタブの付いた新たなシートが追加されて，問題のデータの どれか 1 つだけ が変化したときに，最適解や最適目的関数値が「どう変化するか／しないか」に関する情報を知ることが出来る．具体的には，目的関数の係数，あるいは，制約条件右辺の定数（たとえば，鉄鋼リソースの使用可能量）のどれか 1 つだけが変化したときの最適解や最適目的関数値に関する情報を提供する．次の図は上の例題を解いた時に表示される例である．

（1）限界コスト（＝被約費用 reduced cost）

1. 変数に対応する
2. 限界コストは，2 つの解釈が可能である：
   - 解釈 A： $x_j = 0$ である変数を無理に正にしようとしたときの，x_j 単位当たりの目的関数値の変化の度合い
   - 解釈 B： $x_j = 0$ である変数を正にする可能性が生じる（つまり，最適解が最適でなくなる）目的関数の係数 c_j の変化量

生産計画の例題の場合，A の解釈は，「無理に製品 3 を作ろうとすると，1 単位当たり 1 万円利益が減る」となる．一方，B の解釈は，「製品 3 の単位当たり利益が 1 万円以上増加すれば製品 3 の生産を考える可能性が出てくる」，逆に，「製品 3 の利益が 1 万円以上増加しなけば製品 3 の生産を考えるのは得策ではない」ということになる．「感度レポート」の「変化させるセル」

J24

Microsoft Excel 14.0 感度レポート
ワークシート名: [3製品生産計画 (version 1).xlsb]Sheet1
レポート作成日: 2012/08/16 11:14:31

変数セル

セル	名前	最終値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$B$5	生産量 x1	2	0	2	1	0.5
$C$5	生産量 x2	6	0	3	1	1
$D$5	生産量 x3	0	−1	4	1	1E+30

制約条件

セル	名前	最終値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$E$7	鉄鋼使用量 z	14	1	14	2	3
$E$8	電力使用量 z	8	1	8	1.2	1
$E$9	労働力使用量 z	12	0	18	1E+30	6

の項に示される許容範囲内増加／減少は，該当する目的関数の係数（1 つだけ）が変化したときに，どの範囲で現在の最適解が依然として最適解であり続けるかを示している．製品 1 の利益が $2+1=3$（増加の場合），$2-0.5=1.5$（減少の場合）の範囲の中では，製品 1 の単位当たり利益が変化しても，問題の他の条件が変わらない限りは，依然として $x_1=2, x_2=6, x_3=0$ が最適解となる．

(2) 潜在価格 (shadow price)

1. 制約条件式に対応する（別名：**双対価格**(dual price)，**単体乗数**(simplex multiplier)，**双対変数**(dual variable)）
2. 潜在価格＝当該制約条件の右辺定数以外のすべての係数を元の問題のままにした上で，当該制約条件の右辺定数を微小量増加させたときの，増加単位量当たりの最適目的関数値の改善／改悪の度合い

生産計画の例題の場合，鉄鋼の潜在価格が 1 と表示されているが，この数字から「鉄鋼の供給量が増えれば，最大利益は，鉄鋼供給量 1 単位当たり 1 万円の割合で増える」と解釈できる．

ただし，容易に想像されるように，鉄鋼の供給量をどんどん増やして（減らして）いくとどこかで他のリソースが制約になって利益は増えなく（減らなく）なってしまう．「感度レポート」の「制約条件」の項に示される許容範囲内増加／減少は，どの範囲で潜在価格が正しいかを示している．鉄鋼の場合，問題の他の条件が変わらない限り，供給量が 14+2=16（増加の場合）と 14-3=11（減少の場合）の範囲で単位当たり 1 万円という「変化率」が信用できることを示している．この範囲を超えた場合には一般に値を信用することはできない（しかしまったく情報を持

たない訳でもない．なぜか）．

ソルバーが提供する出力には，「解答レポート」，「感度レポート」の他に，「条件レポート」がある．「条件レポート」には，制約条件に収まる範囲内で，変化させるセルの値をどれくらい増減できるかが示される．各変数セルについての最適な値とともに，他の変数の値が最適な値をとると仮定した上で，制約条件を満たす上限値と下限値とが表示される．「感度レポート」ほど役に立つ訳ではない．

例 2　鉄鉱石配合問題

P 製鉄所では，鉄鋼製品の生産にあたって，4 か所の海外鉱山から輸入された鉄鉱石を原料として利用している．生産される鉄鋼の品質基準を満足するために，P 製鉄所ではこれら 4 鉱山から購入した鉄鉱石を配合して使用している．各鉱山から買ってくる鉄鉱石の配合割合の見直しを検討中である生産管理課長は，企画部に OR の知識をもつ若手のホープがいるという噂を聞きつけ，この若手ホープに品質基準を満足する最小コストの配合比率を検討してもらうことにした．依頼を受けた若手ホープは，課長や担当者の説明から，各鉱山の鉄鉱石の成分組成およびトン当りの単価が表??のようであり，配合にあたっては品質基準を満足するために，A，B，C なる三つの元素のトン当りの含有量が，A は最低 25g，B は最低 320g，C は最低 75g という条件であることを聞き出した．

鉄鉱石の成分組成

鉱山		1	2	3	4
単価（万円／トン）		45	30	60	50
元素	A	23	10	30	20
含有量	B	245	150	350	380
（グラム／トン）	C	68	45	102	80

これをもとに，若手ホープはトン当りのコストを最小化する配合比率決定問題の定式化を始め，次のような言葉でモデルを表現した．

- 変数＝各鉱山の鉄鉱石の配合比率
- 目的関数＝配合した鉄鉱石トン当りの単価
- 制約条件＝各元素の許容限度を満足

言葉によるモデルを数式モデルに書き表すために，変数，すなわち，各鉱山の鉄鉱石の配合比率を $x_j (j = 1, 2, 3, 4)$ と定義すると，以下の定式化が自然に出てくる．

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\text{最小化} & z = & 45x_1 & + & 30x_2 & + & 60x_3 & + & 50x_4 & & & \text{（コスト）} \\
\text{制約} & & 23x_1 & + & 10x_2 & + & 30x_3 & + & 20x_4 & \geq & 25 & \text{（元素A）} \\
& & 245x_1 & + & 150x_2 & + & 350x_3 & + & 380x_4 & \geq & 320 & \text{（元素B）} \\
& & 68x_1 & + & 45x_2 & + & 102x_3 & + & 80x_4 & \geq & 75 & \text{（元素C）} \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 & \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array} \tag{2}
$$

最後の制約条件は，配合比率の合計が 1(=100 %) となることを示しており，この制約を入れ忘れると問題の意味が変わることに注意する．

（この定式化において $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ という制約を除いた問題はどのような解釈ができるか．変数の意味が変わるので，例題の状況とは違ってくる．）

練習 1.8 上の問題を Excel のソルバーを使って解きなさい

解答：

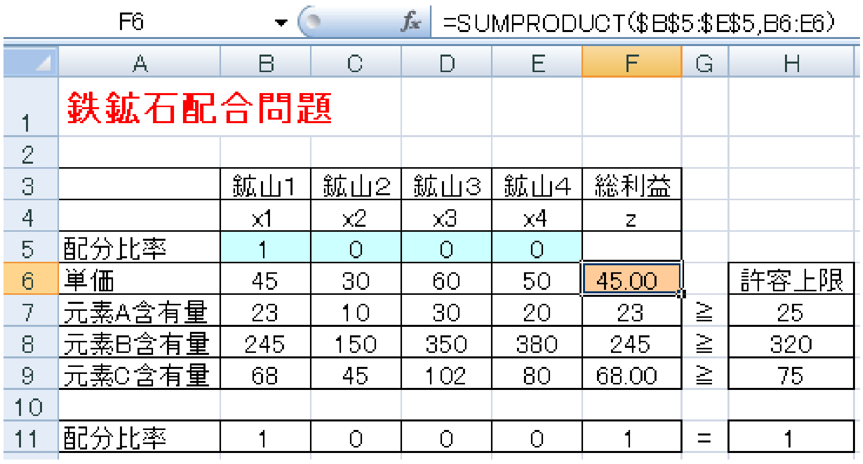
最適解：

最適値＝

定式化されたモデルをもって，若手ホープはパソコンに向かい線形計画法のパッケージを使い始めた．以下は，その結果を携え，生産管理課長に話にいった際の 2 人の会話である．

OR の知識をもつ若手ホープ (以下 OR)：先ほどお話のありました鉄鉱石配合問題を EXCEL のソルバーで解いてまいりましたので説明させていただきます．お手元の資料は得られたアウトプットです．

アウトプットは，大きく分けると三つの部分からなっています．1 枚目は問題の係数を入力したシート，2 枚目はソルバーで解いて得られた最適解，3 枚目は感度分析と呼ばれる分析結果です．まず，問題の係数を入力したシートですが，トン当たりのコストを求める式は $45x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4$ なので，この目的関数の係数が 6 行目に入力されています．



F6 =SUMPRODUCT($B$5:$E$5,B6:E6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	鉄鉱石配合問題							
2								
3		鉱山1	鉱山2	鉱山3	鉱山4	総利益		
4		x1	x2	x3	x4	z		
5	配分比率	1	0	0	0			
6	単価	45	30	60	50	45.00		許容上限
7	元素A含有量	23	10	30	20	23	≧	25
8	元素B含有量	245	150	350	380	245	≧	320
9	元素C含有量	68	45	102	80	68.00	≧	75
10								
11	配分比率	1	0	0	0	1	=	1

そして 5 行目の（色つきの）セルは，目的関数値を最小にするときの，各変数 x_j の値（解）が格納されるセルとなっています．さらに 6 行目 F 列のコストのセル $F6$ には

```
=SUMPRODUCT($B$5:$E$5,B6:E6)
```

という式を入れると，係数と変数セルの値の積の総和（内積という）が計算され，$45x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4$ というトン当たりのコストの値が求まるようになります．

7 行目から 11 行目までが制約条件です．EXCEL では目的関数値を除くすべての変数の非負性 ($x_j \geq 0$) をオプションで指定できるので，変数の非負条件は省略しています．例えば 7 行目

は，元素 A の制約条件を示しています．制約条件式の各変数の係数をセルに入力し，セル $F7$ には $23x_1 + 10x_2 + 30x_3 + 20x_4$ という元素 A の含有量が求めるために

```
=SUMPRODUCT($B$5:$E$5,B7:E7)
```

という式が入力されていますが，これはセル $F6$ をコピーペーストしたものです．11 行目は配分比率を求める問題なので，変数の合計が 1 に等しいという等式制約になります．

生産管理課長 (以下課長)：それでは 8 行目は元素 B の制約条件というわけだね．ところで，問題の入力の後に君がすることは複雑な操作かね．

OR：とんでもない．課長にもできるぐらい簡単ですよ．失礼．失礼．[ツール] メニューの [ソルバー] を選択して，目的関数の入る目的セルや変数の入るセル，制約条件などを画面の指示に従って選択するだけで解けます．

課長：そうか，それなら私にもできそうだな．ところで，アウトプットの 2 枚目はソルバーが解を出してくれた後のシートだそうだが，5 行目に $0.357, 0, 0.393, 0.25$ という値が入ったが，これが最適な配合比率なのか．そのときのトン当たりの単価は. . . .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	鉄鉱石配合問題							
2								
3		鉱山1	鉱山2	鉱山3	鉱山4	総利益		
4		x1	x2	x3	x4	z		
5	配分比率	0.357	0	0.393	0.25			
6	単価	45	30	60	50	52.14		許容上限
7	元素A含有量	23	10	30	20	25	≧	25
8	元素B含有量	245	150	350	380	320	≧	320
9	元素C含有量	68	45	102	80	84.36	≧	75
10								
11	配分比率	0.357	0	0.393	0.25	1	=	1

OR：セル $F6$ が目的関数値ですから，52.14 万円が条件をすべてみたす最適配合をしたときのトン当りの最小コストというわけです．

課長：そうか．トン当り 50 万をきれるかと思っていたんだが，やはりだめか⋯．

OR：現在の品質基準，購入単価の下では頑張っても 52 万円強ということです．

課長：最適配合比率とそのときのコストがわかれば十分なのだが，最適配合の下では元素 C の含有量は 84.36g となっているな．待てよ，おかしいんじゃないの．C の含有量をもっと低くおさえればもっと安くできるのではないのかな．

OR：そうではありません．元素 A，B の必要最低限を最小コストで達成しようとすると元素 C の最低限が自動的に満足されるという形になっているのです．したがって，元素 C の量を無理に 75g に近づけようとするとかえって高くついてしまうんです．

課長：そういうことか．ところで，今までは，4 鉱山すべてからいくらか購入しているので，いきなり第 2 鉱山の鉱石の使用を停止することには抵抗があるかもしれんな．もっとも，こちらの話を知ってというわけではないだろうが，第 2 鉱山の鉱石は価格の安さ以上に品質が悪いという評判で，さらに価格を下げるという噂があるんだ．

感度分析

OR：そうですか．値下げに関連して，他の条件が変わらなければ第 2 鉱山だけが値下げしても，下げ幅が小さいと依然として第 2 鉱山からは買わないという答が予想されますね．実は，第 2 鉱山の鉱石の単価だけが変化したときに，どれだけ安くなると最適配合比率が変わって，第 2 鉱山の鉱石も混ぜた方がよいということになるか，に関する情報が 3 枚目の感度分析のシートにあります．鉱山 2 の欄（x2，セル$C$5）に出ている限界コストという欄の値を見てください．第 2 鉱山の値下げ幅が，限界コストの値，すなわちトン当り 6.51 万円未満の場合は依然としてアウトプットに出ている最適配合比率がそのまま最適となるというわけです．いい替えれば，単価がトン当り約 30-6.51=23.49 万円を切れば，第 2 鉱山の鉱石を混ぜるのがよいという可能性が出てくるわけです．

Microsoft Excel 11.0 感度レポート
ワークシート名：[線形計画テキスト.xls]鉄鉱石
レポート作成日：2007/10/15 14:01:40

変化させるセル

セル	名前	計算値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$B$5	配分比率 x1	0.3571429	0	45	3.1538462	1E+30
$C$5	配分比率 x2	0	6.5079365	30	1E+30	6.5079365
$D$5	配分比率 x3	0.3928571	0	60	1E+30	4.0196078
$E$5	配分比率 x4	0.25	0	50	11.714286	11.428571

制約条件

セル	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$F$7	元素A含有量 z	25	1.1904762	25	3	3.5405405
$F$8	元素B含有量 z	320	0.0634921	320	45	45
$F$9	元素C含有量 z	84.36	0.00	75	9.3571429	1E+30
$F$11	配分比率 z	1	2.0634921	1	0.1289062	0.1022727

課長：ほう，そんなことまでわかるのか．これはなかなかおもしろいな．ところで，第 2 鉱山の値下げは早急に実現するかどうかすぐにはわからないというのが実状だろう．一方，昔からのつきあいを考えると，いきなり第 2 鉱山からの原料購入を停止するというのは社長が「うん」とはいわんだろう．第 2 鉱山の鉄鉱石を少し混ぜることを考えるとどれぐらい割高になるかわかるといいんだがなあ．

OR：ご質問にお答えできる情報もアウトプットに含まれているんですよ，課長!実は，限界コストはおっしゃるような見方で見ることもできるのです．つまり，x_2 をむりやりほんの少し増加させたとき，つまり，第 2 鉱山からも少しは買いつけることを考えると，配合されたもの 1 トン当りのコストが $x_2$1 単位当りの変化に対してどれだけ増加するかという割合を限界コストが示している，と考えることもできるんです．

課長：じゃ，x_2 を 5 %，すなわち，$x_2 = 0.05$ にすれば，コストは $52.14 + 6.51 \times 0.05 = 52.47$ 万円になるというわけかな．

OR：残念ながらこのアウトプットだけからは，おっしゃるとおりかどうかはわかりません．

いえることは，少なくとも トン当り 52.47 万円ということです．ところで，さきほど課長は第 2 鉱山の鉱石が品質に比して割高だとおっしゃいましたがまったくそのとおりです．つまり，最適解に含まれる第 1，第 3，第 4 鉱山の鉄鉱石を混ぜて第 2 鉱山の鉄鉱石と同じ品質のものを作ろうとすると，トン当り 23.49 万円ですむ．だから，第 2 鉱山の鉄鉱石は 6.51 万円割高であるというわけです．

課長：線形計画法というのは，最適配合比率だけを出してくれるものと思っていたんだが，わしは線形計画法のパワーを過小評価しとったようだな．最適比率そのものももちろん重要だが，実際にそれを実現させるためには今のような議論をして幹部を説得せんとなかなか納得してもらえんからな．

品質管理の問題

OR：それから実は課長にお伝えすることがありました．品質管理課の方から，元素 A の許容最低限度の引上げを考えているので，その影響を分析してほしいと....

課長：ああ，その話か．うん，品質管理課は，顧客からの要望が多いために元素 A の許容最低限度を引き上げたいらしいんだ．ひょっとして，線形計画法は許容限度の引上げが最適配合に及ぼす影響についても何か情報を与えてくれるかね．

OR：よくぞ聞いて下さいました．まだ，ご説明しておりません潜在価格がまさにお尋ねの情報です．元素 A に関する制約条件にある潜在価格は「元素 A の許容最低限度を微小量増加させたときの最適目的関数値の改善の度合」を示しています．

課長：なになに．A の許容最低限度を現在の 25g から微小量ふやすということは，それだけ純度の高い鉱石を多く混ぜる必要が出てくるわけだな．原則的に，良質の鉱石ほど価格が高い傾向があるから，最適目的関数値，すなわち，トン当りのコストは A の最低限度をふやすにつれて上昇する．ところが，ここでの問題は最小化だから，目的関数値の上昇は改善ではなく改悪，したがって，潜在価格の 1.19 万円分コストが高くなってしまうわけだな．

OR：まったくおっしゃるとおりです．つまり A の最低限度を 25g から 1g 引き上げると，1.19 万円だけトン当りのコストが上昇して，52.14+1.19=53.33 万円になる．

課長：5g 上げて 30g にすると，トン当りのコストが $52.14 + 5 \times 1.19 = 58.09$ 万円になる．というわけだね．

OR：ちょっと違います．潜在価格は先ほど申し上げましたように，最低限度を微小量増加させたときの最適目的関数値の改善（改悪）の度合を示します. ところが，潜在価格の数字が信用できる右辺定数の微小変化の幅がわからないとどこまでこの数字を信用してよいのかがわからないことになります．潜在価格を見るときには，符号はあまり機械的に考えずに問題の意味を考えながら理解することがよいと思います．A の最低限度が増えればコストは上昇するだろうというようにね．

課長：じゃあ，具体的に潜在価格が信用できる範囲というのがわかるのかね．

OR：はい，わかります．潜在価格の右側にある許容範囲内増加と許容範囲内減少という欄にある値を見てください．許容増加分 3 と許容減少分 3.54 の範囲，すなわち，A の最低限度が 25-3.54=21.46g から 25+3=28g の範囲では，潜在価格が信用できることになります．

課長：したがって，たとえば，A の最低限度が 27g に引き上げられたときの最小コストは $52.14 + 2 \times 1.19 = 55.52$ 万円となるわけだな．

OR：まったくそのとおり！もう，私の説明は不用のようですね．ちなみに，示された範囲内でも右辺定数が変わると最適解は変化しますが，最適解が具体的にどうなるかは，このアウトプットからは読み取れません. 読み取ることのできるのは，示された範囲内の右辺定数の変化に伴う最適目的関数値の変化の度合だけです. 限界コストの許容範囲内増加・減少も同じようですが，こちらの方は，目的関数の係数の一つだけが変化しても示された範囲内の変化であれば，現在の最適解が依然として最適であることを示しています.

課長：どうやら，これでアウトプットの情報はすべて理解できたようだね．ずいぶんと情報量が豊富なのにはびっくりしたよ．最後に一つ聞きたいのだが，示された範囲を越えて右辺定数を変えたときに潜在価格は意味をもたないのかね.

OR：あるところまでは一定の割合で直線的に最適値が増加するとなると，その後の変化が曲線的になるというのは考えがたいでしょう．つまり，特定の右辺定数を変化させていくときの最適値の変化は折れ線的な変化になるんです．元素 A の最低限度を極端に上げすぎると解がまったく存在しないことになるでしょうし，常識的に考えても，最低基準を上げて品質を良くすれば良くするほど最適コスト増加の度合が大きくなることがわかると思います．そこで，いろいろなパラメータの変化が最適値に及ぼす影響をグラフにしたものを最適値関数 (optimal value function) と呼び，最適値関数を用いた分析をパラメトリック分析といいます.

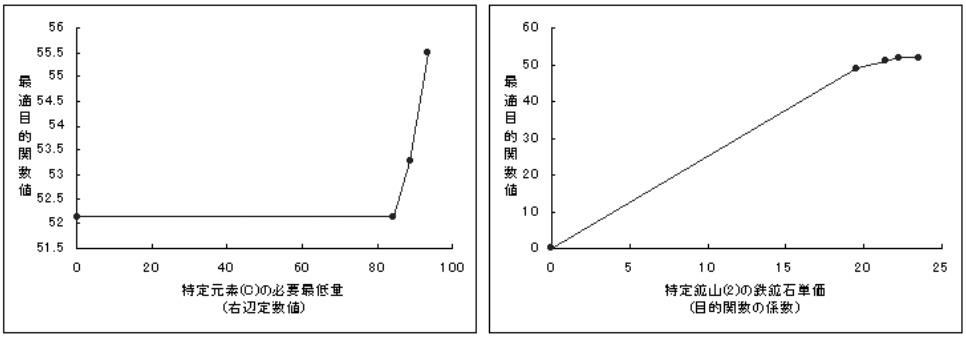


図　最適値関数

課長:すると，最適値関数は右辺定数だけでなく，目的関数の係数である各鉱石のトン当りの価格に関しても作れるというわけだね.

OR：そうです.

課長：それじゃ，第 2 鉱山の価格に関する最適値関数と，元素 A の最適値関数を出してもらって検討することにしよう．こういう図を使って説得すれば，部長はじめ幹部連中にも納得してもらえるような気がしてきたよ．明日までにお願いできるかな $\cdots$.

OR：かしこまりました．じゃ，また明日.

1.5 数理計画法の一般的定式化

数理計画法のモデルには，制約条件がまったく存在しない状況で評価尺度を最適化するものもあるが，多くの場合は様々な制約の下で「一番良いと考えられる」計画を探し出そうという制約付き最適化問題である．前項でも示唆したように数理計画モデルは言葉でも表現可能であるが，言語表現では曖昧さが残る場合が多いので曖昧さのない数式による表現を採用する．一般的には，問題状況を以下の形に表現することが数理計画法の定式化である．

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{最大化 (または最小化)} & f(x_1, x_2, \cdots, x_n) & & \\
\text{制約} & g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & b_1 \\
 & g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & b_2 \\
 & \cdots & & \\
 & g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & b_m \\
 & x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \in & S
\end{array}
\tag{3}
$$

ここに，$f, g_1, g_2, \cdots, g_m$ は適当な関数，S は適当な集合である．S の例としては，非負集合 (正確には，n 次元非負実数ベクトルの集合)，非負整数集合，0-1 ベクトル集合などが代表的である．最適化したい関数 f が目的関数，計画を定める変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が決定変数または単に変数である．なお，式 (3) では，制約条件を等式で示したが，不等式 ($\leq$ または $\geq$) でもよい．式 (3) の形に定式化されたモデルを構成する要因は，

1. 決定変数
2. 問題によって値が異なるパラメータ (parameter)
3. たとえば円周率 π のように，問題に依存することなく常に一定の値をとる定数 (constant)

の三種類に大別することができる．通常，ユーザーが提供する問題データによってモデルのパラメータが定まりモデルが確定する．モデルを解いた結果得られる最適決定変数の値を**最適解**(optimal solution) と呼び，最適計画に従ったときのモデル上での評価尺度の値を**最適値**(optimal value，より正確には最適目的関数値) と呼ぶ．

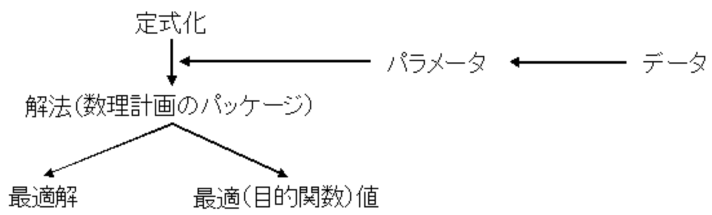


図　数理計画問題の構成要素

制約条件がどのような理由によって発生するかは，状況によって千差万別であるが，代表的なものを以下にあげる．

1. 技術的要因:　x を蒸留すると y と z がある割合で精製される．
2. 許容能力制限:　温度は x 度以下，重量は $y$kg 以下
3. (短期的な) 資源制約:　来期使える資金は最大 z 万円

4. 品質制約:　製品に含まれる x の含有量は y %以上

一方，目的関数としては，コストの最小化，利益の最大化が取り上げられることが多い．もっとも，実際には，何が制約条件で何が目的関数かがはっきりせず，ある尺度を目的関数にすることも考えられれば制約条件として扱うことも可能である状況という場合が少なくない．鉄鋼電力労働力問題のモデル (1) や鉄鉱石配合問題のモデル (2) のように，モデルに現れる関数 $f, g_1, g_2, \cdots, g_m$ がすべて線形 (linear) 関数 (= 1 次関数) であり，かつ S が非負集合あるいは実数集合である場合が本章で扱う**線形計画法**(Linear Programming)，略称 **LP** である．LP は，LP 以外の問題を解くときも，それらの解法の基礎となる．たとえば「ネットワーク計画法」では，線形計画問題の特別の場合を扱うが，特殊な構造をもっている LP を扱うために，より効率的な解法が考えられる．また，「組合せ最適化」や「整数計画法」は式 (3) の S が非負整数集合や 0-1 ベクトル集合のように離散的である場合を扱う．たとえば，決定変数が人数を示していたり，工場を建設するか否かを示す場合には，変数は整数値，あるいは，0 または 1 でないと困ることがある．一般に変数に整数条件のついた数理計画問題を**整数計画問題**と呼ぶ．一方，式 (3) の関数 f, g_i が線形関数だけで構成されない問題，すなわち，非線形関数が含まれる場合を**非線形計画問題**と呼ぶ.

1.5.1　線形性の意味

ここで，線形性の意味について考えてみよう．線形ということは，たとえば,

1. 製品の単価が a 円であるとき，x 単位売れば (買えば)ax 円となる．
2. 食品 X100g 当りのビタミン A の含有量が $a$mg のとき，食品 X20g 中には (1/5)$a$mg のビタミン A が含まれる．
3. 肥料 P の 1 単位投入に対して，単位面積当りの収量が $a$kg 増加するとき，P を 5 単位投入すれば収量が 5$a$kg 増加する．

というように，独立変数とこれに従属して変化する量との間に比例関係がある．すなわち，独立変数が倍になれば従属する量も倍になり，逆に，独立変数が半分になれば従属量も半分になる．実際の世の中には，生産や購買の場に見られるように，規模のメリット (economies of scale) が働き，生産量や購買量の増加に伴って単価が低減したり，肥料と収量との関係のように収穫逓減の法則が成り立ったり，ときには，与えすぎると収量が逆に下がるという現象が見られ，線形性は限られた範囲で，しかも，近似的にしか成立しないことが少なくない.

にもかかわらず，LP は，数理計画法のなかで一番よく用いられている．これは，主に

1. 実世界の多くの問題が近似的にであれ線形性の仮定をもとに LP として定式化できる．
2. LP に対する効率のよい解法が存在し，しかも，定式化・解の算出・解の提示が容易にできる信頼のおけるソフトウェアパッケージがある．

という理由による．LP ユーザーの代表ともいえる石油業界では，30 年以上も前から LP が長・中・短期の生産計画設定にふんだんに利用されており，「LP なしには生産計画が考えられない」という．しかも，問題によっては制約条件の数が数千，数万，さらには数十万以上にもなろうという大規模な問題が日常的に解かれ，実際の生産に反映されている．

比例関係とともに線形性の重要なポイントは分割可能性である．線形計画法の変数は，通常，非負の実数値をとるので，一般に，小数値が許される．小数値が許されるということは，変数の単位 (人数，台数，重量，金額，等) の分割が意味をもたなければならない．たとえば，作業者の数を 3.6 人にするという答に意味があるか否かは，状況によって違う．パートタイムの作業者を 0.6 人分利用すると考えてよい場合もあるだろうし，作業者の数は整数でなければ意味をなさない場合もある．いずれにせよ，線形計画法では，変数に対応するものが少なくとも近似的に分割可能で，変数の基本単位にこだわらなくてよいという前提があることを頭に入れておかねばならない．分割可能性の仮定に無理がある場合には，一般にネットワーク最適化や整数条件を考慮した組合せ最適化のモデルを考える必要がある．

練習 1.9 次の問題を線形計画問題として定式化し，最適解をソルバーを使って求めなさい（原典：森口繁一「線形計画法入門」，以下の３題も同様）．ある自動車工場で，３種類の車を製造している．主な二つの工程 K, L の各車種ごとの工数およびその一月の上限が次の表のように与えられている．また，車は出荷すればすべて売れ，その利益が表のように与えられているものとする．利益を最大にする生産計画を立てなさい．

車の生産計画

工程	車種 A	車種 B	車種 C	上限値
K	6	4	2	180
L	5	3	2	140
1 台あたりの利益	9	7	4	

解答：

最適生産量：

各工程の潜在価格（時間価値）：

練習 1.10 次の問題を線形計画問題として定式化し，最適解をソルバーを使って求めなさい．3 種類の飼料 A, B, C 1 キロあたりのカロリーとタンパク質含有量，販売価格が次の表のように与えられている．1 日に必要なカロリーは 5000，タンパク質は 550 とした場合，費用最小の購入計画を立てなさい．

飼料の配合問題

	飼料 A	飼料 B	飼料 C
カロリー	30	20	15
タンパク質	20	22	40
販売価格	55	48	60

解答：

飼料の購入量：

各成分の潜在価格：

練習 1.11 次の問題を線形計画問題として定式化し，最適解をソルバーを使って求めなさい．2 種類の原料油 M, N 1 単位から 4 種類の製品 A, B, C, D が次の表のように製造される．原料油の調達可能量は M が 300 単位，N が 220 単位である．また，各製品の単位量あたり製造変動費と販売価格は表のように与えられている．製品 C, D は作れば作っただけ売れるが，製品 A は 180 まで，製品 B は 170 までしか売れないものとする．このとき，利潤が最大となる生産計画を立てなさい．

製品生産計画

	製品 A	製品 B	製品 C	製品 D
原料油 M	1.3	0.9	1.4	0
原料油 N	0.6	0.8	0	1
製造変動費	40	35	30	15
販売価格	66	70	60	34

解答：

最適生産量：

各原料油の潜在価格：

練習 1.12 次の問題を線形計画問題として定式化し，最適解をソルバーを使って求めなさい．5 種類の鉱石を使用して，規格に合格する品質の製鋼用銑鉄を作るのに，もっとも原価が安くなるように配合を定めたい．各鉱石の成分の分析表と購入単価が次の表のように与えられている．また，各成分の制約条件は次のように与えられている．費用が最小となる 5 種類の鉱石の配分比率を求めなさい．

鉄 100 以上，マンガン 1.333 以上，リン 0.584 以下，
硫黄 1.381 以下，アルミナ 5.79，銅 0.08 以下

鉱石の混合問題

	鉱石 A	鉱石 B	鉱石 C	鉱石 D	鉱石 E	鉱石 F
鉄	57.4	54.6	53.3	57.2	33.0	20.0
マンガン	0.306	0.125	0.194	0.299	8.370	6.320
リン	0.044	0.052	0.185	0.139	0.884	1.264
硫黄	0.604	0.109	0.659	0.113	0.060	0.202
アルミナ	1.69	7.01	4.42	3.09	2.32	2.89
銅	0.161	0.044	0.054	0.046	0.000	0.019
単価	$5,290$	$5,130$	$5,200$	$4,850$	$4,480$	800

解答：

最適購入量：

各成分の潜在価格：

1.6 単体法

§1.4 で用いた EXCEL ソルバーに組み込まれている解法は，現在使用されている他の大半のパッケージと同じように，単体法 (simplex method) と呼ばれる解法である．単体法は 1950 年前後にダンツィク (Dantzig) が提案した方法であり，以来計算機やアルゴリズムの発展とともにソフトウェアの効率化が図られてきた．現在では単体法によるソフトウェアが広く普及・利用され，制約条件が数千〜数十万，変数が数千〜数百万からなる大規模 LP が実務的に解かれている．このように単体法は過去 40 年近くの間，LP の解法としての地歩を築いてきたが，1980 年代に単体法に太刀打ちできる LP の新解法が登場した．この解法は内点法という総称名，あるいは，提案者の名前をとって Karmarkar 法という名前で呼ばれている．しかし，内点法が単体法にとって代わる解法となっている訳ではなく，問題の種類や規模によって両者が使い分けられているというのが実情である．Excel のソルバーをはじめとして通常人々が使用している解法が単体法であるという状況は今のところ変化がない. また，単体法から得られる知見が無意味になるとは考えがたいので，ここでは LP の解法の議論を単体法に限り，難しい数学を使わずに単体法の基本的考え方を学ぶことにする．

1.6.1 単体法とは

単体法は，線形計画問題を連立方程式と見なして，基底解，より正確には実行可能基底解と呼ばれる連立方程式の解を次から次へと見つけていく方法である．単体法を理解するために，例 1 を 2 製品の場合とした次の例を考える．

例 3 鉄鋼電力労働力の問題 (2 製品の場合)

例 1 の問題と同じ条件で，ただし，製品 3 は作らない，という問題を考える．与えられた条件は以下の表の通り．

表 各製品の利益とリソース許容上限

	製品 1	製品 2	リソース許容上限
鉄鋼使用量	1	2	14
電力使用量	1	1	8
労働力使用量	3	1	18
利益	2	3	

製品 1 と 2 の生産量を，それぞれ x_1, x_2 とすると，以下の線形計画問題に定式化される．

$$\begin{array}{lcrcrcr}
\text{最大化} & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{制約} & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \\
& & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
& & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array} \tag{4}$$

単体法は，基本的に連立方程式を解く方法，すなわち，等式制約を扱う解法である．したがって，ここでも，変数の非負条件以外の不等式を等式で表現することを考える．制約条件の不等式

$\leq$ は，左辺（使用量）が右辺（在庫量）以下であることを示している．そこで，左辺が右辺よりどれだけ少ないか（未使用リソース）を示す非負の変数を導入して左辺に加え，不等式を等式条件に変える．たとえば鉄鋼の制約条件について，

$$x_1 + 2x_2 \leq 14 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 14 - x_1 - 2x_2 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

という変数 x_3 を導入すると，この等式と変数 x_3 の非負条件で鉄鋼の制約不等式が表される．こうして導入される変数（使われない鉄鋼の量）を**スラック変数**(slack variable) あるいは余裕変数と呼ぶ．左開きの不等式 $\geq$ の場合も同じようにして非負の変数を左辺から引けば等式条件に変換される．いずれにせよ，いったんスラック変数を加えたならば，

「スラック変数の非負条件が元の問題の制約不等式を表している」

ことに注意してほしい．本書では不等式の向きにかかわらずスラック変数と呼ぶことにするが左開きの場合の変数を**サープラス変数**，余剰変数 (surplus variable) と呼び分けることもある．さて，各不等式にそれぞれ x_3, x_4, x_5 というスラック変数を導入して問題を書き直すと次のようになる．

$$\begin{array}{llcrcrcrcrcrcr}
\text{最大化} & z & = & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & \\
\text{制約} & & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 14 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & + & & & x_4 & & & = & 8 \\
 & & & 3x_1 & + & x_2 & + & & & & & x_5 & = & 18 \\
 & & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

これを，変数 $z, x_1, x_2, ..., x_5$ の連立方程式の問題に書き換える．

$$\begin{array}{crrrrrcr}
z & -2x_1 & -3x_2 & & & & = & 0 \\
 & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 14 \\
 & x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = & 8 \\
 & 3x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = & 18 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array} \tag{5}$$

この連立方程式は変数が二つ余分なので，２つの変数をパラメータのように見なせば，解くことが出来る．特定の解を求めたいのであれば，２つの変数を 0 と置いて通常の連立方程式とすればよい．式 (5) は $x_1, x_2 = 0$ とすれば z, x_3, x_4, x_5 に関して解くことが出来る，というより，すでに $z = 0, x_3 = 14, x_4 = 8, x_5 = 18$ となっている．

このようにして一切の計算をせずに，一部の変数を無視するだけで計算なしで解が直ちに読み取れる連立方程式の形を**基底形式**(basic form) と呼び，0 でない値を持つ変数を**基底変数**，それ以外の変数を非基底変数と呼ぶ．しかも，直ちに読み取れる解が非負条件を満足している場合には，実行可能基底形式，略して**可能基底形式**（英語 basic feasible form）と呼ぶ．また，可能基底形式から計算をせずにただちに読み取れる解を実行可能基底解，略して**可能基底解**（英語 basic feasible solution）と呼ぶ．ただし，変数 z は解の中に数えない．上では，可能基底解 $x = (0, 0, 14, 8, 18)$，および，そのときの目的関数値 $z = 0$ が連立方程式から直ちに読み取れたということになる．

上の連立方程式を行列表現すると次のようになる．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix}$$

基底変数の情報も併せて，これを次のような表にまとめて書く．最後の 2 列だけを見れば，$x_3 = 14, x_4 = 8, x_5 = 18$ のとき，$z = 0$ となる，というように基底解を直ちに読み取ることが出来るように，最後の「基底変数」の列を付け加えてある．$x_1 = x_2 = 0$ と併せて，これが可能基底解になっている．

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数
第 0 行	1	-2	-3	0	0	0	0	z
第 1 行	0	1	2	1	0	0	14	x_3
第 2 行	0	1	1	0	1	0	8	x_4
第 3 行	0	3	1	0	0	1	18	x_5

目的関数に対応する行を第 0 行，制約式に対応する行を第 1,2,3 行と呼ぶことにする．

事実上何もせずに得られた可能基底解を $\boldsymbol{x}^0$ と名づけてやると，$\boldsymbol{x}^0 = (0, 0, 14, 8, 18)$ は，言ってみれば「寝て暮らせ（何も作るな，ただし，儲けは期待できないよ)」という政策なので，有り難味はまったくないが，もとの線形計画問題のすべての制約条件を満たす「立派な」可能解であり，（可能基底形式から一切の計算なしにただちに読み取れる）可能基底解となっている．

次に，この可能基底解より「ましな」解を見つけよう．x_1 を増加させても，x_2 を増加させても z が 0 よりふえることは明らかであり，$\boldsymbol{x}^0$ より良い解が存在することがわかる．それでは，x_1, x_2 のいずれを正にしたらよいであろうか．なるべく，目的関数値 z を大きく改善する変数を選びたいところであるが，そのためには x_1 あるいは x_2 がどこまでふやせるかを見きわめる必要がある．しかし，これには余計な手間がかかるので，ここでは「z が早く大きくなることを期待して」x_2 を増加させる．なぜなら，x_2 を増加させる場合，単位あたりの目的関数の増加量は 3 であり，x_1 を増加させた場合の単位当りの増加量は 2 であり，x_2 のほうが増加量が大きいためである．

規則 :（改善率が大きいので）係数の大きい方を動かす

$x_1 = 0$ として，x_2 をなるべく大きくすることを考える．連立方程式の 1 番目の式を除いたものと，変数の非負制約から，次の式を満たさなければいけないことが導かれる．

$$\begin{array}{rclclcccl} x_3 & = & 14 & - & 2x_2 & \geq 0 & \Leftrightarrow & x_2 & \leq & 7 \\ x_4 & = & 8 & - & x_2 & \geq 0 & \Leftrightarrow & x_2 & \leq & 8 \\ x_5 & = & 18 & - & x_2 & \geq 0 & \Leftrightarrow & x_2 & \leq & 18 \end{array} \qquad (6)$$

これより，$x_2 = 7$ となり，x_3, x_4, x_5 も等式を使って次のように計算される．

$x_1 =$ ______ $, x_2 =$ ______ $, x_3 =$ ______ $, x_4 =$ ______ $, x_5 =$ ______

目的関数の値は

$$z = \underline{\qquad\qquad}$$

となる．x_2 の選び方から，この解は実行可能になっている（確かめよ）．

x_2 を基底変数とする基底形式に書き換える（**基底変換**という）ためには，

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \Leftrightarrow x_2 = 7 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3$$

を他の制約条件と目的関数の式の x_2 に代入すればよい．その結果，式 (5) は次のようになる．

$$\begin{array}{cccccccc}
z & \underline{\qquad} x_1 & & \underline{\qquad} x_3 & & & = & \underline{\qquad} \\
 & (1/2)x_1 & +x_2 & +(1/2)x_3 & & & = & 7 \\
 & \underline{\qquad} x_1 & & \underline{\qquad} x_3 & +x_4 & & = & \underline{\qquad} \\
 & \underline{\qquad} x_1 & & \underline{\qquad} x_3 & & +x_5 & = & \underline{\qquad}
\end{array} \tag{7}$$

これは基底形式であり，$x_1 = x_3 = 0$ と置けば，直ちに，可能基底解が

$$\boldsymbol{x}^1 = (0, 7, 0, 1, 11)$$

目的関数の値が 21 ということが直ちに読み取れる．

以上の手順は，以前にまとめておいた表形式からもたどることが出来る．x_2 を選ぶ，ということは，表の第 0 行で，z 以外の欄で一番小さな数字（マイナスの一番大きな数）を選ぶということに対応している．そして，制約の範囲で x_2 の取り得る最大の値を知るためには x_2 の列と「定数項」の列を要素ごとに割り算して，その最小値を選べば良い．そこで，先に作った表に「比」という列を追加して，定数項を x_2 の列で割ったものを書いておく．こうすることで，これらの計算を表で一覧することが出来る．分かりやすくするために，x_2 の列の欄外に「$\Downarrow$」，比の最小値の行の欄外に「$\Longleftarrow$」という記号を付けておく．こうして出来た表は**単体表**と呼ばれる．また，「$\Downarrow$」の付いた列を**軸の列**，「$\Longleftarrow$」のついた行を**軸の行**，その交わった要素（今の場合は「2」）を**軸**，という．

単体表 No.0

		$\Downarrow$							
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比	
1	-2	-3	0	0	0	0	z		
0	1	2	1	0	0	14	x_3	14/2	$\Longleftarrow$
0	1	1	0	1	0	8	x_4	8/1	
0	3	1	0	0	1	18	x_5	18/1	

基底変換は軸の列の各要素を，軸を 1，軸以外の要素を 0 に替えることに他ならない．書き換えるためには，連立方程式の「等価変換」について思い出す必要がある．式（5）のような連立方程式では

- ある式を定数倍しても，答えは変わらない

- ある式を定数倍して別の式に足しても，こたえは変わらない．

という性質がある．単体法の各行は方程式の１本１本に対応しているので，「式」を「行」としてもよい．そこで，単体表 No.0 の

1. 第 1 行（軸の行）を 2 で割る（軸の数字を 1 にする，ということ）
2. 第 1 行の 3 倍を第 0 行に足す（目的変数の行の軸の列が 0 になる）
3. 第 1 行を第 2 行から引く（制約式から x_2 が追い出される）
4. 第 1 行を第 3 行から引く（制約式から x_2 が追い出される）

という操作を行う．その結果，単体表 No.0 は，次のような表に変わる．「$\Longleftarrow$」の行の「基底変数」を x_3 から x_2 に書き換える．その結果，表の「基底変数」「定数項」の列から，基底変数の値とそのときの目的関数の値 21 を直ちに読み取ることが出来る．

単体表 No.0'

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
1	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	21	z	
0	$1/2$	1	$1/2$	0	0	7	x_2	
0	$1/2$	0	$-1/2$	1	0	1	x_4	
0	$5/2$	0	$-1/2$	0	1	11	x_5	

これが単体法の第１ステップである．

次に，式 (7) の解 $\boldsymbol{x}^1$ が最適かどうかを判定する．x_3 を 0 に固定したまま x_1 を増加させることにより単位当り 1/2 ずつ目的関数値を増加できる．一方，x_1 を 0 に固定して x_3 を増加させる（ということは，作らないようにするということ）と，元の解 $\boldsymbol{x}^0$ に逆戻りしてしまい目的関数値を改善できないのでむだなことに注意しておく．第１ステップと同様に，式 (7) の１番目の式を除いたものから

$$
\begin{array}{rcrcl}
x_2 &=& 7 &-& (1/2)x_1 \quad \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \quad \leq \quad 14 \\
x_4 &=& 1 &-& (1/2)x_1 \quad \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \quad \leq \quad 2 \\
x_5 &=& 11 &-& (5/2)x_1 \quad \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \quad \leq \quad 4.4
\end{array}
$$

が得られ，x_1 は最大 2 まで増やすことが可能.

したがって，改善された実行可能解は

$$x_1 = \underline{\qquad\qquad}, x_2 = \underline{\qquad\qquad}, x_3 = \underline{\qquad\qquad}, x_4 = \underline{\qquad\qquad}, x_5 = \underline{\qquad\qquad}$$

目的関数の値は

$$z = \underline{\qquad\qquad}$$

x_1 を基底変数とする基底形式に書き換えるためには,

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 2 + x_3 - 2x_4$$

を他の式に代入すればよい．その結果，式 (7) は次のようになる．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
z & & & +x_3 & & +x_4 & & = & 22 \\
& & x_2 & \underline{\hspace{3em}}\, x_3 & & \underline{\hspace{3em}}\, x_4 & & = & \underline{\hspace{3em}} \\
& x_1 & & \underline{\hspace{3em}}\, x_3 & & +2x_4 & & = & 2 \\
& & & \underline{\hspace{3em}}\, x_3 & & \underline{\hspace{3em}}\, x_4 & +x_5 & = & \underline{\hspace{3em}}
\end{array}
\tag{8}
$$

これは基底形式であり，$x_3 = x_4 = 0$ と置けば，直ちに，可能基底解が

$$\boldsymbol{x}^2 = (2, \underline{\hspace{3em}}, 0, 0, \underline{\hspace{3em}})$$

目的関数の値が 22 ということが直ちに読み取れる．

この操作を表形式で確認しておく．第 1 ステップと同じ手順に従うと，

- 第 0 行で一番小さい数は x_1 列の $-1/2$ なので，x_1 の列を軸の列とする．
- 次に，定数項の列と軸の列を要素ごとに割り算して「比」の列に記入する
- 比の一番小さいのは第 2 行の 2 なので，第 2 行を軸の列とする．

こうして出来たのが次の単体表 No.1 である．

単体表 No.1

$\Downarrow$ (x_1)

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比	
1	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	21	z		
0	$1/2$	1	$1/2$	0	0	7	x_2	14	
0	$1/2$	0	$-1/2$	1	0	1	x_4	2	$\Longleftarrow$
0	$5/2$	0	$-1/2$	0	1	11	x_5	4.4	

基底変換も第 1 ステップと同様に，軸の列を，軸を 1 に，それ以外を 0 にするように，書き換えればよい．そのためには，次のようにする．

- 第 2 行を第 0 行に加える（目的関数から x_1 が消える）
- 第 2 行を第 1 行から引く（制約式から x_1 を追い出す）
- 第 2 行を 5 倍したものを第 3 行から引く（制約式から x_1 を追い出す）
- 第 2 行（軸の行）を 2 倍する（これで軸が 1 になる），基底変数を x_1 と書き換える

その結果，次の単体表 No.1' が得られ，この表から，$x_1 = 2, x_2 = 6$ のとき，$z = 22$ となることが直ちに読み取れる．

単体表 No.1'

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
1	0	0	1	1	0	22	z	
0	0	1	1	-1	0	6	x_2	
0	1	0	-1	2	0	2	x_1	
0	0	0	2	-5	1	6	x_5	

これが単体法の第 2 ステップである．

この解は最適解となる．それを確かめるためには，式 (8) の一番上の行，すなわち，目的関数の行が

$$z = 22 - x_3 - x_4$$

と書けることに着目する．x_3, x_4 の係数がいずれも負なので，z を最大にするためには $x_3 = x_4 = 0$ でなければいけない．式 (8) において x_3 と x_4 とをともに 0 に固定すると解は x^2 にならざるをえない．したがって，$\boldsymbol{x}^2$ 以外の解においては x_3 と x_4 がともに 0 ではありえない．

1.6.2 単体法の手順

これまでに説明してきた単体法の手順をまとめておく．

ステップ 0（初期可能基底解の発見） 与えられた線形計画問題を「初期」可能基底形式の形で示す（当面はこれが可能な問題だけを考える）．

ステップ 1（最適性の判定と新たに基底変数にしようとする非基底変数の決定） 可能基底形式から「可能基底解」とその解の目的関数値が一切の計算なしに読み取れる．この可能基底解が最適かどうかを，可能基底解を読み取る際に値を 0 に固定する変数（これを非基底変数 (non-basic variable) と呼ぶ）の目的関数の係数から判定する．判定にあたっては元の問題が z の最大化をめざすのか最小化をめざすのかで符号が逆転することに注意しておく（機械的，公式的に覚えるより，「式の意味」を考えて判断するのがよい）．どの非基底変数を増加させても可能基底解が改善されないならば最適（終了）．さもなくば，可能基底解の改善の可能性を示している非基底変数の中のどれか一つを選択（当面は，「単位当たりの改善効率」が一番良い非基底変数を選ぶと考える）して，ステップ 2 へ．

なお，非基底変数すべてを 0 に固定したときに値が一意に定まる変数のことを**基底変数**(basic variable) と呼ぶ．

ステップ 2（基底変数から非基底変数に変わる変数の決定と無限解の判定） 選択された非基底変数以外の非基底変数を 0 に固定したまま，選択された非基底変数をどこまで増加できるか調べる（「比の計算」，「θ の計算」）．選択された非基底変数をいくらでも大きくできる場合，問題は「無限解 (unbounded solution) を持つ」という．選択された非基底変数を増加させていったときに最初に「目一杯になる」制約，つまり，それ以上非基底変数を増加させると他の変数が負になってしまう，という制約に着目する．

ステップ 3（基底形式の等価変換） 最初に「目一杯になる」制約の，0 から値を増加させようとしている非基底変数の係数が 1 になるように書きなおした後，この式を元に代入計算を行って基底形式を等価変換し，新しい基底形式を得てステップ 1 へ戻る．

観察 1 基底変数，非基底変数は一般に基底形式毎，すなわち，反復毎に変わる．例外は，目的関数値を示す変数 z で，この変数は常時基底変数という位置付けになる．

観察 2 可能基底形式において基底変数に対応する列は単位ベクトルとなっているはず．一方，非基底変数に対応する列には一般にいろいろな非 0 の係数がついている．非基底変数を 0 に固定するということは非基底変数の列を無視するということに相当するが，そうすると連立方程式の

左辺の係数は（順番は入れ替わっているかもしれないが，順番を入れ替えれば）単位行列になっているはず．したがって，それらの基底変数の値が右辺の定数項の値に等しい可能基底解が読み取れることになる．

観察 3　可能基底形式の各行には基底変数が対応している．目的関数行に対応する基底変数は常時，変数 z．制約条件の行に対応する基底変数はアルゴリズムの進行，すなわち，反復に伴って変化する．上記ステップ 3 で代入計算を行う毎に，それまで非基底変数だった変数の一つが基底変数になり，逆に，それまで基底変数だった変数の一つが非基底変数になる．上の例では，一回目のステップ 3 の実行に伴って，初期可能基底形式で非基底変数だった x_2 が基底変数になり，その代りに変数 x_3（鉄鋼の制約のスラック変数）が基底変数から非基底変数に変わる．基底／非基底それぞれ 1 変数ずつが入れ替わるので「基底変換」と呼ばれることもある．

1.6.3　単体表による軸演算

単体法の理屈が分かっていれば，一々方程式を書くことなく，単体表だけを頼りに，アルゴリズムに従って計算することが出来る．その計算アルゴリズムは**掃き出し法**，あるいは**軸演算**とも**枢軸変換**とも呼ばれる．

軸は単体表の特定の要素に対応し，したがって軸演算を行うためには**軸の列**(pivot column) と**軸の行**(pivot row) とが定められている必要がある．ここで解説する単体法では，まず，軸の列が定まり，次に軸の行が定まり，

軸の列の決定	=	「現在の」基底解では 0 に固定されている非基底変数 の中で新たに正にしようとする変数の決定
	=	新たに基底変数となる変数の決定
軸の行の決定	=	新たに基底変数となる変数の代りに基底を追い出され， 非基底変数となる変数の決定

という役割を果たす．具体的な軸の決定規則を記述するために，単体表の要素を，一般的に，$[y_{ij}](i = 0, 1, \cdots, m; j = 0, 1, \cdots, n)$ と表すことにする．ここに，m，n はそれぞれ制約条件の数，変数の数を，また，第 0 行，第 0 列はそれぞれ，目的関数行と定数列を表すものとする．

軸の決定規則　(最大化問題の場合)

軸の列の決定　$y_{0j}(j = 1, 2, \cdots, n)$ の最小値を与える列を軸の列 k とする. ただし $y_{0k} = 0$ であれば，現在の基底解が最適で終了．また，最小値が一意に定まらない場合は，最小値を与える任意の列を選ぶ.

軸の行の決定　$y_{ik} > 0$ なる行 $i(i = 1, 2, \cdots, m)$ について，y_{i0}/y_{ik} を計算し，この比が最小になる行を軸の行 h とする．$y_{ik} > 0$ なる行 $i(i = 1, 2, \cdots, m)$ が存在しない場合，つまり，$y_{ik} \leq 0(i = 1, 2, \cdots, m)$ の場合は目的関数値をいくらでも大きくできる可能解が存在し，問題が有界でない，あるいは，**無限解**をもつ (unbounded) という．また，最小が一意に定まらない場合は最小値を与える行を任意に選ぶ.

練習 1.13 有界でない問題を作成し，単体法で解きなさい.

注意

与えられた問題が最小化問題の場合の対処の方法としては，目的関数の係数の符号を逆転して最大化問題として扱うというのも一つの方法である．しかし，本章では，最大化と最小化の違いは単に目的関数の係数の符号の問題だから，最大化/最小化に応じて，最適性の判定条件と軸の列の決定規則を切り替えると考える．最小化問題のときに，これらをどう修正すればよいか考えよ．

軸の要素が定まるといよいよ軸演算である．軸演算の狙いは，軸の列を (軸の行の要素の値が 1 で，他の行がすべて 0 の) 単位ベクトルにする等価交換を行うことにある．等価性を保つために軸演算で許される演算は，以下の 2 種類の演算である．

（1）ある行を定数倍する (ただし，定数は 0 でないものとする)．

（2）ある行に他の行の定数倍を加える．

ここに，「行」は「等式」と読みかえてもよい．線形代数を習った読者は，これら 2 種類の演算が連立方程式の解集合を変えないことを学んだはずである (たとえば参考文献 4) 参照)．具体的には，単体表 $[y_{ij}]$ において，軸の行を第 h 行，軸の列を第 k 列とし，軸以外の行を一般に第 i 行 $(i \neq h)$ とする．ここで，

（1）新 (第 h 行)$\longleftarrow$ 旧 (第 h 行)/旧 (y_{hk})

（2）新 (第 i 行)$\longleftarrow$ 旧 (第 i 行) $-$旧 (第 h 行)$\times$ 旧 (y_{ik})/旧 (y_{hk})

（ただし，i は $i \neq h$ の各行）

という演算を行うと §1.6.1 で代入によって行っていた基底変換が行われる．なお，軸の行以外に関する演算 (2) は，(1) で更新された軸の行を使って

新 (第 i 行)$\longleftarrow$ 旧 (第 i 行) $-$新 (第 h 行)$\times$ 旧 (y_{ik})

と書くこともできる．

これまでの話をまとめると，はじめの可能基底解が求まっている場合の単体法の手順は次のようになる．

手順 0　初期可能基底解に対応する可能基底形式 (単体表) を設定する．

手順 1　目的関数行の非基底変数の符号をみて，現在の基底解が最適か否か判定する．最適なら終了，さもなくば決定規則に従って軸の列を決めて手順 2 へ．

手順 2　決定規則に従って軸の行を定める．無限解をもつと判定されたときは終了，さもなくば軸演算を行い新しい基底形式を得た後，手順 1 に戻る．

例題 1.5 次の問題を，単体表を使って解きなさい．

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\text{最小化} & z = & -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{制約} & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & & & & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

解答：最小化問題でも同じような手順で解けばよい．スラック変数を導入すると，実行可能基底解が得られる．その基底形式に対応する単体表は以下の通り

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比	
1	1	2	-1	0	0	0	z		
0	2	1	1	1	0	6	x_4	6	
0	0	2	-1	0	1	3	x_5	1.5	$\Leftarrow$

最小化なので，目的関数行の最大値を軸に選ぶ．x_2 の取り得る最大値は 1.5．x_2 の 2 行目をピボットにして軸演算を実行する

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
1	1	0	0	0	-1	-3	z	
0	2	0	1.5	1	-0.5	4.5	x_4	
0	0	1	-0.5	0	0.5	1.5	x_2	

次の軸は x_1 で，1 行目がピボットになる

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比	
1	1	0	0	0	-1	-3	z		
0	2	0	1.5	1	-0.5	4.5	x_4	2.25	$\Leftarrow$
0	0	1	-0.5	0	0.5	1.5	x_2	∞	

その結果

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
1	0	0	-0.75	-0.5	-0.75	-5.25	z	
0	1	0	0.75	0.5	-0.25	2.25	x_1	
0	0	1	-0.5	0	0.5	1.5	x_2	

以上の計算から，最適解は $x_1 = 2.25, x_2 = 1.5$，最適値は -5.25

練習 1.14 次の問題を単体法を使って解きなさい．解の許容領域を図示し，その上に，基底解の推移を描きなさい．

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\text{最大化} & z & = & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{制約} & & & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\
 & & & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

解答：

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数項	基底変数	比
						z	

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数項	基底変数	比
						z	

練習 1.15 次の問題を単体法を使って解きなさい．解の許容領域を図示し，その上に，基底解の推移を描きなさい．

$$
\begin{array}{llcrcrcr}
\text{最大化} & z & = & 5x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{制約} & & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\
& & & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\
& & & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15 \\
& & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

解答：

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

練習 1.16 次の問題を単体法を使って解きなさい

$$
\begin{array}{llcrcrcrcr}
\text{最大化} & z & = & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & \\
\text{制約} & & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
& & & & & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
& & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

解答：

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

1.6.4 単体法と感度分析

次の図は例 3 を EXCEL で解いたときの結果と感度レポートである．

利益	2	3			
	製品1生産量x1	製品2生産量x2			総利益
生産量	2	6			22
鉄鋼	1	2	14	≦	14
電力	1	1	8	≦	8
労働力	3	1	12	≦	18

変化させるセル

セル	名前	計算値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$B$3	生産量 製品1生産量x1	2	0	2	1	0.5
$C$3	生産量 製品2生産量x2	6	0	3	1	1

制約条件

セル	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$D$4	鉄鋼	14	1	14	2	3
$D$5	電力	8	1	8	1.2	1
$D$6	労働力	12	0	18	1E+30	6

図　例 3 を Excel ソルバーで解いた結果と感度分析

§1.4 で登場した限界コストや潜在価格も最適解を示す連立方程式の中に含まれていることをみよう．まず，コンピュータアウトプットの限界コストは，式 (8) における目的関数行の変数 x_1, x_2 の係数 0，0 に対応する．正確には，式 (8) の目的関数を $z = \cdots$ の形に書き直したときの各変数の係数が限界コストである．単体法では，限界コストの符号をみて手元にある解の最適性を判定しているのであるから，その値がわかるのは当然である．単体法の計算では限界コストの符号でもって最適性や次に増加させる変数を決めていることを思い起こせば，限界コストが最適解のみならず，単体法の各反復で求まる解に対しても定まることも明らかであろう．

§1.4 でみたように，コンピュータアウトプットの中では限界コストとともに，重要な情報を提供する潜在価格がある．潜在価格は各制約条件に対応し，

「制約条件の右辺定数を微小量増加させたときの最適目的関数値改善の割合」

であった．そこで，たとえば鉄鋼の供給可能量 14 が増えて 15 になったとしたとき最適目的関数値がどう変化するかを考えてみる．元の問題における鉄鋼の制約条件は

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \tag{9}$$

であった．x_3 は鉄鋼の制約条件のスラック変数であるから，鉄鋼の供給可能量が 1 単位増加するということは，見方を変えれば，スラック変数 x_3 が負になってもよい，より正確には，x_3 が -1 まで下がることを許すといえる．式 (9) において x_3 を $x_3 - 1$ に置き換える (すなわち，最適解において $x_3 = 0$ から $x_3 = -1$ にする) と式 (9) は

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$$

となる．元の式 (5) において，スラック変数 x_3 は他の制約条件や目的関数には関与しないので，上の置換えを行っても他の右辺定数が変化することはない．さて，この置換えをすることによっ

て目的関数値はどう変化するであろうか．式 (8) における目的関数行は

$$z = 22 - x_3 - x_4 \tag{10}$$

である．ここで，前と同じように x_3 を $x_3 - 1$ に置き換えると

$$z = 23 - x_3 - x_4$$

となり，目的関数値は 1 だけ改善される．以上の議論から，制約をみたす解が与えられたとき鉄鋼の供給可能量をふやすことによる目的関数値の改善の割合は，鉄鋼の制約条件のスラック変数 x_3 の式 (10) における係数に対応することがわかる．正確には，式 (10) の x_3 の係数の符号を逆転したものが改善の度合を示すのである．

同様の議論によって，電力の供給可能量がふえた場合には，式 (10) の x_4 の係数から供給可能量 1 単位の増加に対して 1 の割合で最適目的関数値が改善されることがわかる．式 (10) に x_5 が現れないのは，労働力の潜在価格が 0，すなわち，労働力の供給をふやしても目的関数値の改善は期待できないことを示している．

読者の中には，はじめに述べた限界コストと潜在価格との間に関連があることを感じた方もあるであろう．実際，両者の間には

「−ある変数に対する限界コスト＝その変数の非負条件に対する潜在価格」

という関係がある．冒頭のマイナスは，両者の符号が異なることを示している．この関係より，スラック変数の被約費用 (たとえば，最適解 x^2 における x_3 の限界コスト -1) の符号を逆転したものが，当該スラック変数の非負条件に対する潜在価格，すなわち，スラック変数に対応する制約条件の双対価格 (感度分析表の鉄鋼の潜在価格 1) に等しい．というわけで，コンピュータの出力結果では，スラック変数の限界コストという項目はないが，スラック変数に対応する行の潜在価格の符号を逆転したものがその限界コストにほかならない．

以上，本項の議論では，単体法の各反復が

1. 一部の変数を 0 に固定し，残りの変数で制約条件を満足する解を求める．
2. 求められた解が最適かどうか判定する．最適であれば終了．
3. どの変数を 0 から増加させるかを決め，問題を等価変換し，1. へ戻る．

から成ることをみてきた．また，単体法実行の副産物として，限界コストや潜在価格が求められることがわかった．

1.6.5 単体法の幾何的解釈

§1.6.1 では単体法を代数的な立場から説明してきたが，ここでは単体法を幾何的な観点から検討することにしよう．例 3 を $x_1 - x_2$ 平面に図示したのが次の図である．

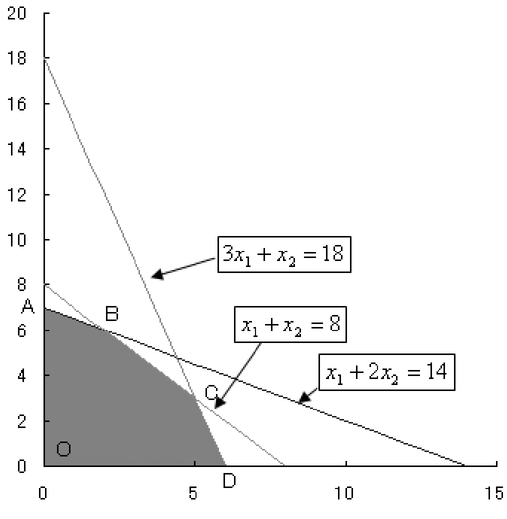


図　単体法の幾何的解釈

制約条件をすべて満足する解を実行可能解 (feasible solution)，以下単に可能解と呼ぶが，例 3 の可能解の集合，すなわち，実行可能領域 (feasible region)，略して可能領域は色が塗られた 5 角形 OABCD に対応する．また，目的関数が傾き-2/3 の平行な直線群で，右上に行けば行くほど目的関数値が上昇すること，したがって，実行可能領域内の点で目的関数を最大にする点，すなわち，点 B=(2,6) がこの問題の最適点であることが，この図からすぐにわかる．なお，式 (5) に対する解 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ を $x_1 - x_2$ 平面上の点に対応付けるには，単に x_3, x_4, x_5 の成分を無視して x_1, x_2 だけに着目すればよいことは，スラック変数導入の過程を思い起こせば明らかである．

線形計画問題の可能領域に属する点の集合は，**凸集合**(convex set) と呼ばれる集合を形成する (図参照)．

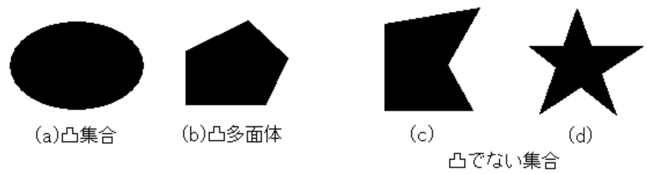


図　凸集合

凸集合は幾何的には，「与えられた集合に属する任意の二点を結ぶ線分 (延長は含まない) 上の任意の点もまたその集合に属する」という性質をもった集合である．しかも，LP の可能領域の境界面は 1 次関数に対応するので変数の次元が高くなるにつれて直線，平面，超平面等となり，したがって，LP の可能領域を構成する集合は一般にこれらの超平面で囲まれた**凸多面体**(convex polyhedron) となる．

さて，単体法の計算における最初の可能解 $x^1 = (0, 0, 14, 8, 18)$ は図では原点 O=(0,0) に対応する．点 O が 2 本の直線 $x_1 = 0$(x_2 軸) と $x_2 = 0$(x_1 軸) との交点であり，可能領域の角の点，**端点**(extreme point) であることに注意する．本書の範囲では，端点を直感的に可能領域の角の

点と理解することで十分であるが，正確には，「可能領域に属する**異なる**2 点を結ぶ線分上の点 (ただし，線分の両端は除く) として表現**しえない**点」と定義される．変数が 2 つの 2 次元の図では直感的に明らかであるように，線形計画問題の最適解は可能領域の端点で達成される．2 次元の場合に，目的関数の傾きと可能領域を定める直線とが平行であれば，ある線分上のすべての点が最適になることからもわかるように，高次元の場合も含め，一般に

「可能領域を構成する凸多面体の端点のいずれかに LP の最適解がある」

というのが正確である．そこで，単体法は可能領域の端点を追いかけながらこれ以上目的関数値を改善することができない端点を見つけようという方法である．それでは，端点から端点に乗り移るにはどうすればよいだろうか．2 次元の場合は図からも明らかなように，端点から隣の端点に移るためには二つの端点を結ぶ稜線をたどっていくことができる．原点 O からは，端点 A に伸びる稜線 OA と端点 D に伸びる稜線 OD の二つがあるが，原点 O から上に伸びる稜線 OA に沿って移動するには，x_1 を 0 に固定したまま，x_2 を増加させていけばよい．式 (6) より，x_2 の値を s とし

$$
\begin{array}{rcrcrl}
x_2 & = & & & s & (\geq 0) \\
x_3 & = & 14 & - & 2s & (\geq 0) \\
x_4 & = & 8 & - & s & (\geq 0) \\
x_5 & = & 18 & - & s & (\geq 0)
\end{array}
$$

なる関係を保ちながら，各変数の非負条件を破らないように $0 \leq s \leq 7$ の範囲で s をパラメトリックに変えていくことが稜線をたどることに相当する．s=7 とした解 $x^1 = (0,7,0,1,11)$ が端点 A に対応し，端点 A では直線 $x_1 = 0$(すなわち，x_2 軸) と直線 $x_1 + 2x_2 = 14$(すなわち，$x_3 = 0$) とが交差していることに注意する．

単体法の次の反復では，x_3 を 0 に固定しながら x_1 を増加することによって稜線 AB 上を端点 A から端点 B に移動し $x^2 = (2,6,0,0,6)$ を得る．端点 B は，2 本の直線 $x_1 + 2x_2 = 14$(すなわち，$x_3 = 0$) と $x_1 + x_2 = 8$(すなわち，$x_4 = 0$) との交点である．すなわち，最適解 $x^2 = (2,6,0,0,6)$ に到達する，これらの反復からもわかるように，いったん，単体法の計算に入ると変数が元の問題の変数であるか，スラック変数であるかを意識する必要がないことを理解してもらいたい．このように，ある端点から伸びる稜線に沿って移動するためには，スラック変数も含め当該端点において 0 となっている変数の一つを 0 から増加させていけばよい．

最後に，稜線上を移動するにあたって注意すべきことは，

1. 目的関数値が改善されるような稜線を選ぶ.
2. 端点を通りすぎて可能領域から飛び出さないようにする．

の 2 点である．§1.6.1 を理解した読者は，この 2 点を代数的にどのように判断するかを思い出せるはずである．以上をまとめると，§1.6.1 で行った単体法の代数的計算によって，幾何的には

原点 O	→	稜線 OA	→	端点 A	→	稜線 AB	→	端点 B
$x^0(0)$		x_2		$x^1(21)$		x_1		$x^2(22)$

という経緯を経て，最終的に，最適解すなわち最適端点 B に到達することがわかる．ここに，() 内の数字が目的関数値，稜線の下の変数名が稜線を移動するにあたって 0 から増加される変数

を示している．例題では，図示可能な 2 次元の問題を考えたが，単体法の代数的計算が，幾何的には可能領域上の端点から出発し稜線をたどって隣接するよりよい目的関数値をもつ端点に移動するというステップの繰返しであることを一般的に示すことができる．なお，単体法の幾何学についての一般的かつ厳密な議論に興味ある読者は参考文献 1),3) 等の標準的テキストを参照されたい．

＜**備考**＞一般に，どの「経路」を経由したら一番早く最適端点に到達可能であるかを知ることは困難である．

練習 1.17 1 回目の反復で，まず，x_2 を増加させることを考えたが，x_2 の代わりに x_1 を増加させた場合の計算を §1.6.1 と同じように実行しなさい．また，その場合に得られる解が，41 ページの図上でどのように移動しているかを調べなさい．

解答：

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

練習 1.18 次の問題を §1.6.1 と同じように代数的な方法で解きなさい．また，§1.6.5 と同じような議論により代数的方法で求まる解との幾何的な対応を明らかにしなさい．

$$
\begin{array}{llrrcrcr}
\text{最大化} & z = & & 10x_1 & + & 14x_2 & & \\
\text{制約} & & - & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
 & & - & x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\
 & & & x_1 & - & x_2 & \leq & 10 \\
 & & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

これより目的関数値がいくらでも大きくできる解，すなわち，**無限解**(unbounded solution) の判定に関して何がいえるか．この問題の可能領域を $x_1 - x_2$ 平面に描くと，端点から可能領域の境界に沿って無限に伸びる**端線**(extreme ray) と呼ばれる直線が (この問題の場合 2 本) あり，端

線に沿って移動することによって目的関数値をいくらでも改善可能である．では，代数的な方法で解いたときに端線とその端の端点は方程式系の中からどう読み取れるか．

1.6.6 単体法の有限収束性

ここで，単体法の理論を完全に理解するために明らかにすべき点がある．

（1）なぜ基底解だけ追いかければよいか．

（2）単体法は有限回の反復で収束し，最適解あるいは無限解をもつことを発見できるか．

（3）初期可能基底形式をどのように得るか，また，それは常に得られるか．

これまで解説してきた単体法は，可能基底解を順次改善して最適解を求めるものであるが，すでに学んだように，1) 可能基底解は可能領域の端点に対応し，一方，2) 可能領域の端点の中に LP 最適解が存在する，という事実を考え合わせれば，なぜ基底解に限定して解を探してよいかがわかる．残る二つの点に関して，次項で単体法の有限収束性を，§1.6.9 では初期可能基底解の求め方を論ずる．

基底解において基底変数の中に値が 0 になる変数があると，軸演算によって変数の基底/非基底の区分は更新されても軸演算後の基底解の目的関数値が軸演算前と変わらない可能性がある（基底変数の中に値が 0 になる変数があるときに常にそうなるわけではないことに注意．なぜか）．しかし，ここでは当面，

「いかなる可能基底解においても基底変数の値が 0 にならない」

という仮定の下で議論を進めることにする．基底変数の値が 0 になることを**退化**(degeneracy) と呼び，そのような基底解を**退化した基底解**(degenerate basic solution) というので，上の仮定は，いわば「**非退化の仮定**」といえる．

練習 1.19 どのような場合に，基底変数の値が 0 になってしまうか簡単な 2 変数 (スラック挿入前)，3 制約の例題で示し，退化した基底解の幾何的特徴を考えなさい．

定理 1 非退化の仮定の下では，単体法は有限収束する．

証明：問題の n 個の変数のうち，基底変数となる m 個を (適当に) 定めることによって可能基底解が一意に定まる．n 個の変数から m 個の基底変数を選ぶ選択の仕方はたかだか n から m をとる組合せの数しかない．一方，非退化の仮定から，単体法によって求められる可能基底解の目的関数値は反復ごとに必ず改善される（なぜか）．したがって，同一の基底解が繰り返されることはない．たかだか有限個の候補しか存在せず，しかも，同一のものが繰り返されることはないので，解法は有限回の反復の後に終了する．（証明終わり）

非退化の仮定の下では，可能基底解と端点とは一対一対応をするので，直感的にも明らかな可能領域の端点の数が有限個であるという事実，および，端点を移動するにあたって必ず目的関数値が改善されるために同じ端点に戻りえないという事実を考え合わせると，有限収束性は幾何的にもすぐに納得できよう．なお，線形計画問題では，**局所最適解**（その解の近傍では一番よい解）は必ず全体の最適解，すなわち**大域的最適解**となり，最適解以外の局所解が存在しない．

1.6.7 退化と巡回

定理 1 では，非退化の仮定を設けたが，一般に基底解が退化していないという保証はない．以下では，退化の幾何学的意味と退化がもたらしうる問題点を明らかにする．

2 次元空間で考えればすぐわかるように，基底解は 2 本の直線の交点として定まる解である．しかし，次の図 (a) のように 2 次元空間内の点 B において，3 本 (以上) の直線が交差していると，点 B は直線 (1) と (2) の交点，あるいは，直線 (2) と (3) の交点，または，(1) と (3) の交点とも考えられる．図 (c) は 3 次元の場合の退化している基底解を図示したものである．一般に，n 次元空間において，$n+1$ 本以上の $n-1$ 次元超平面が一点で交わったときに退化が起こる．

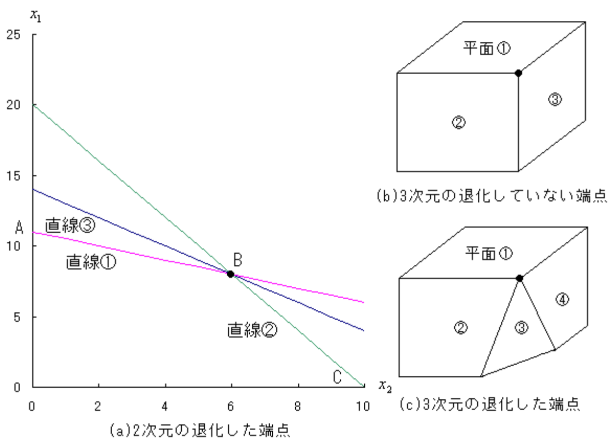


図　退化と端点

それでは，退化している場合にはどのようなことが起こりうるのだろうか．前述のように，基底解が退化していると軸演算を行っても目的関数値が同じ値に留まる可能性がある．目的関数値が改善されずに軸演算を繰り返していく過程で，もし軸の選択規則によって同じ基底解が繰り返し出現すれば，同じサイクルの繰返しとなり，最適解が求まる前に無限のループに入るおそれがある．このような現象を**巡回**，または**サイクリング**(cycling) と呼ぶ．

巡回は理論的には重要な問題であるが，実際の計算では問題となることはない．というのは，実際問題で巡回を起こして最適解を求められなかったというケースは事実上知られていないからである．したがって，巡回の問題は（少なくとも本章で扱う線形計画法に関する限り），理論的興味からの議論であり，実用上の問題ではないといい切って差支えない．しかし，絶対巡回を起こさないための対策は，少なくとも理論的観点から重要な問題である．

練習 1.20 次の問題を単体法を使って解きなさい．ただし，最初の軸の列は x_2 列，軸の行は第１行としなさい．

$$
\begin{array}{llcrcrcr}
\text{最大化} & z & = & 4x_1 & + & x_2 & & \\
\text{制約} & & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
 & & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

解答：

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	比
							z	

（軸演算を行っても，目的関数の値が改善しない場合もある（退化），しかし，我慢して続けると，この場合はゴールに到達する）

参考：巡回対策

聡明な読者が予想されるように，巡回は軸の選択規則によって起きたり，起きなかったりする．そこで，巡回を理論的に排除するためには巡回が起きないような軸が選択される方策を考えればよい．詳細は省くが，巡回防止策には，1) 摂動法，2) 辞書式方法，3)Bland の軸決定規則などがある．このうち，Bland の軸決定規則は，歴史的には比較的新しいもの (1977) であるにもかかわらずきわめて簡単なルールである．

軸の決定規則　(Bland の軸決定規則，最大化問題の場合)

軸の列の決定　$y_{0j} < 0$ となる列 $j(j = 1, 2, \cdots, n)$ のうち，列の番号 j の最小値を与える列を軸の列 k とする．

軸の行の決定　$y_{ik} > 0$ なる行 $i(i = 1, 2, \cdots, m)$ について，y_{i0}/y_{ik} を計算し，この比が最小になる行を軸の行 h とする．最小が一意に定まらない場合は最小値を与える行の中から，行に対応する基底変数の添字番号が最小の行を軸の行 h として選択する．

現在の基底解の最適性の判定，すなわち，y_{0j} の符号判定を列番号の順に行うとすれば，Bland の軸の列決定は，目的関数値改善の度合は考えずに一番最初に発見された目的関数値改善の可能性をもつ非基底変数を軸の列に選べ，といっている．軸の行には必ず基底変数が対応しているが，タイが発生した場合の軸の行決定規則は，対応する基底変数の添字番号が最小となる行を選べといっている．なお，行決定規則は，単にタイが発生している行の行番号の最小ではなく，対応する基底変数の添字番号最小の行を選択することに注意されたい．Bland の軸決定規則を用いた場合の単体法の有限収束性の証明はさほど難しくはなく，単体法の完全理解のためには勉強をすすめるが本稿の範囲を越える．

1.6.8　一般的定式化，基底

本項以降の議論では，表記を簡略化して一般的な議論をするために，行列・ベクトルを用いることにする．なお，以降の議論ではベクトルはすべて列ベクトルとし，行ベクトルの場合は $\boldsymbol{x}^\top$ のように転置記号を付けることにする．ここでは，一般的な問題として等式制約条件をもつ最大化問題を考えると

$$\begin{array}{rrcl} \text{最大化} & z & = & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & A\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & 0 \end{array} \tag{11}$$

と書ける．例 3，より正確には式 (5) では

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = (2, 3, 0, 0, 0)^\top$$

基底形式から解を読み取るにあたって値を 0 にする変数を**非基底変数**(nonbasic variable)，それ以外の変数を**基底変数**(basic variable) と呼ぶ．$\boldsymbol{x}$ を基底変数 $\boldsymbol{x}_B$ と非基底変数 $\boldsymbol{x}_N$ に分けて表示する．同様に，必要に応じて変数を並べ換え，制約条件の係数行列および目的関数の係数べ

クトルを基底変数に対応する部分 B と非基底変数に対応する部分 N に分け，

$$A = [B, N], \quad \boldsymbol{c}^\top = (\boldsymbol{c}_B^\top, \boldsymbol{c}_N^\top), \quad \boldsymbol{x}^\top = (\boldsymbol{x}_B^\top, \boldsymbol{x}_N^\top)$$

とすると，元の問題は

$$\begin{array}{llcccccc}
\text{最大化} & z & = & \mathbf{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B & + & \boldsymbol{c}_N^\top \boldsymbol{x}_N & & \\
\text{制約} & & & B\boldsymbol{x}_B & + & N\boldsymbol{x}_N & = & \boldsymbol{b} \\
& & & \boldsymbol{x}_B, & & \boldsymbol{x}_N & \geq & 0
\end{array}$$

と書ける．正方行列 B は**基底行列**あるいは単に**基底**と呼ばれ，正則すなわち行列式の値が非零の行列である．非基底変数 $\boldsymbol{x}_N$ を 0 に固定し，残った基底変数 $\boldsymbol{x}_B$ で連立方程式を解いた解 $\boldsymbol{x}^\top = (\boldsymbol{x}_B^\top, \boldsymbol{x}_N^\top)$ を**基底解**(basic solution) と呼ぶ．正確には B を基底とする基底解，あるいは，$\boldsymbol{x}_B$ を基底変数とする基底解である．$\boldsymbol{x}_N$ を 0 に固定すると制約条件式は $B\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$ となり，B が正則との条件から B の逆行列 B^{-1} が存在し，B を基底とする基底解とその目的関数値は，

$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x}_N = 0, \quad z = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b}$$

となる．式 (7) や式 (8) と同じように，この基底解を一見して読み取ることのできる連立方程式形式で表すと

$$\begin{array}{ccccccc}
z & & - & (\boldsymbol{c}_N^\top - \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}N)\boldsymbol{x}_N & = & \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x}_B & + & B^{-1}N\boldsymbol{x}_N & = & B^{-1}\boldsymbol{b}
\end{array} \tag{12}$$

となる．制約条件式は両辺とも左から B^{-1} をかけることにより，また，目的関数は $\boldsymbol{x}_B$ の代りに $(\boldsymbol{x}_B =)B^{-1}\boldsymbol{b} - B^{-1}N\boldsymbol{x}_N$ を代入することによって式 (12) となることを確かめてほしい．このような形式を基底形式と呼ぶ．より正確には，

(1) $\boldsymbol{x}_B$ の制約条件の係数行列は単位行列 I である．

(2) $\boldsymbol{x}_B$ の目的関数行の係数は 0 である．

の二条件を満足すれば**基底形式**という．これら二つの条件に加えて，さらに，

(3) $B^{-1}\boldsymbol{b} \geq 0$

を満足する場合には，**実行可能基底形式**あるいは単に**可能基底形式**という．可能基底形式から，$\boldsymbol{x}_N$ を 0 に固定することにより直ちに読み取れる基底解 $\boldsymbol{x}^\top = (\boldsymbol{x}_B^\top, \boldsymbol{x}_N^\top) = (B^{-1}\boldsymbol{b}, 0)$ を**実行可能基底解**(basic feasible solution)，以下略して**可能基底解**と呼ぶ．したがって，単体法は，可能基底形式を保ちながら問題を等価変換することによって，よりよい基底解を追跡し，最終的に目的関数を最適化する可能基底解，すなわち，最適基底解を求める解法と考えることができる．§1.6.5 の幾何的議論を考え合わせると，可能基底解が可能領域の端点の特徴づけとなっていることが理解できる．

可能基底形式を保ちながらの等価変換は，言い方をかえれば，基底を変えながらの変換，基底変数と非基底変数とを入れ替えながらの等価変換であり，基底変換ということもある．1 回の基底変換では，一つの基底変数が他の一つの非基底変数と基底/非基底の役割交換を行っている．なお，証明は省くが，与えられた問題に対して，各基底に対する基底形式は一意に定まり，した

がって，基底解も一意に定まる．

練習 1.21 可能基底解が式 (12) の形で与えられたとき，この解が最適解である条件を一般的に説明しなさい．また，問題が最小化の場合にどうすればよいか考えなさい．

練習 1.22 一般に，正則な基底 B を選んでも，条件 (3)，すなわち，$B^{-1}\boldsymbol{b} \geq 0$ が満足されるとは限らない．$B^{-1}\boldsymbol{b}$ が非負でない場合も $\boldsymbol{x}_N$ を 0 に固定することによって基底解 $\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b}$ が求まるが，この基底解は可能解ではない．これらの非負条件を満足しない実行不可能基底解が幾何的にどのような点に対応するか考えなさい（実行不可能基底解を順次「改善」して最適解を求めるという単体法の変形も存在する．）

1.6.9 初期可能基底解の求め方

これまでは，初期可能基底解が簡単に求められるという前提で議論を進めてきた．たとえば，元の問題が $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ というタイプの制約をもち，$\boldsymbol{b} \geq 0$ ならば，スラック変数を基底変数とする可能基底解が容易にみつかる．しかし，一般に，$\boldsymbol{b} \geq 0$ で $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ の場合や問題が等式条件 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の場合には，どのようにして初期可能基底解を求めればよいか明らかでない．そもそも，与えられた問題に可能解が存在するかどうかすら明らかでないこともあり，また，ちょっとした勘違いや入力ミスで可能解が存在しない場合も実際にはある．したがって，初期可能基底解が容易にみつかるという想定は必ずしも現実的ではない．与えられた問題に可能解が存在しない場合，問題が**実行不可能**(infeasible) といい，可能解が存在すれば問題が**実行可能**(feasible) という．以下では実行を省いて問題が可能，不可能という．面白いことに，初期可能基底解を求める問題は，それ自体線形計画問題として定式化でき，単体法を用いて解ける．その結果，元の問題が実行可能か否かを判定でき，可能であれば同時に，元の問題の**初期可能基底解**を得ることができる．まず，次の例題を考えることから始めよう．

例 4　最小化問題

目的関数がなるべく小さい方が良い，という場合の線形計画問題を考える．

$$
\begin{array}{llcrcrcrcl}
\text{最小化} & z & = & 14x_1 & + & 8x_2 & + & 18x_3 & & \\
\text{制約} & & & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 2 \\
 & & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\
 & & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{13}
$$

非負スラック変数 x_4, x_5 を導入して等式問題に変換すると

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrcrcl}
\text{最小化} & z & = & 14x_1 & + & 8x_2 & + & 18x_3 & & & & & & \\
\text{制約} & & & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & & & = & 2 \\
 & & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array} \tag{14}
$$

となる．式 (14) からすぐに読み取ることのできる $x_4 = -2, x_5 = -3$，残りの変数を 0 とする解は基底解ではあるが，非負制約を満たしていないので実行可能解ではない．したがって，「可能」

基底解を出発点とする単体法をスタートさせることができない．そこで，さらに二つの非負変数 x_6 と x_7 を導入して式 (14) の代りに，とりあえず以下の問題を考えよう．

$$
\begin{array}{llrcrcrrrrrcl}
\text{最小化} & z_1 = & & & & & & & & x_6 & +x_7 & & \\
\text{制約} & & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & -x_4 & & +x_6 & & = & 2 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & -x_5 & & +x_7 & = & 3 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq & 0
\end{array}
\tag{15}
$$

新たに導入された非負変数のことを**人工変数**(artificial variable) と呼ぶ．式 (14) と (15) に関する以下の事実は明らかであろう．

（1）目的関数値の値 z_1 を 0 にするような解，すなわち $x_6 = x_7 = 0$ となる解が見つかれば，式 (15) の可能解の x_1 から x_5 までをとれば式 (14) の可能解となる．

（2）式 (15) は非負人工変数の総和 $z_1 = x_6 + x_7$ の最小化を図っているので，式 (14) に可能解が存在する場合には，式 (15) に $z_1 = x_6 + x_7$ を 0，すなわち，$x_6 = x_7 = 0$ とする最適解が必ず存在する．

（3）式 (15) には $x_6(= 2), x_7(= 3)$ を基底変数とする初期可能基底解が存在する．そこで，式 (15) を解いて元の問題の初期可能基底解を求めることを考えよう．そのためには，最初に目的関数から，x_6, x_7 を消去して，x_6, x_7 を基底変数とする基底形式に変える必要がある．

1. 基底形式にするために，$z_1 - x_6 - x_7 = 0$ の式から x_6, x_7 を追い出す．そのためには制約式を目的関数の式に足せばよい．その結果，下の単体表の z_1 の行が得られる．軸としては単体基準の最大値 x_3 を選び，$2/3 < 3/1$ なので，１行目をピボットに選ぶ（No.0)

z_1	x_1	x_2	x_3 ⇓	x_4	x_5	x_6	x_7	b	基底	比	
1	3	2	4	−1	−1	0	0	5	z_1		
0	1	1	3	−1	0	1	0	2	x_6	2/3	⇐
0	2	1	1	0	−1	0	1	3	x_7	3/1	

2. x_3 の列が単位ベクトルになるように変換したのが次の表．次いで，x_1 の行の２列目をピボットとして軸演算を行う．(No.1)

z_1	x_1 ⇓	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	基底	比	
1	5/3	2/3	0	1/3	−1	−4/3	0	7/3	z_1		
0	1/3	1/3	1	−1/3	0	1/3	0	2/3	x_3	2	
0	5/3	2/3	0	1/3	−1	−1/3	1	7/3	x_7	7/5	⇐

3. $x_6 = x_7 = 0$ とする最適解が見つかった．$x_1 = 7/5, x_3 = 1/5$ は最適解．これでフェーズ１が終了．(No.2)

z_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	基底	比
1	0	0	0	0	0	−1	−1	0	z_1	
0	0	1/5	1	−2/5	1/5	2/5	−1/5	1/5	x_3	
0	1	2/5	0	1/5	−3/5	−1/5	3/5	7/5	x_1	

4. 実行可能解が

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{7}{5} - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 \\
x_3 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5
\end{aligned}
$$

で与えられるので，元の目的関数に代入すると

$$z + \frac{6}{5}x_2 - \frac{22}{5}x_4 - \frac{24}{5}x_5 = \frac{116}{5}$$

これを使って単体表を作り，軸演算を行う．(No.3)

z	x_1	x_2 ⇓	x_3	x_4	x_5	b	基底	比	
1	0	6/5	0	−22/5	−24/5	116/5	z		
0	0	1/5	1	−2/5	1/5	1/5	x_3	1	⇐
0	1	2/5	0	1/5	−3/5	7/5	x_1	7/2	

単体基準が正数なのは x_2 だけなので，その 1 行目をピボットとして軸演算を行う

5. 目的関数行の z 以外の変数の係数がすべて非正になったので，$x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = x_5 = 0$ が最適解．(No.4)

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	基底	比
1	0	0	−6	−2	−6	22	z	
0	0	1	5	−2	1	1	x_2	1
0	1	0	−2	1	−1	1	x_1	7/2

一般に，問題 (P) の初期可能基底解を求める段階は「**フェイズ 1**(phase1)」と呼ばれ，フェイズ 1 問題 (P1) は人工変数のベクトルを $\boldsymbol{x}^a$ とすると，

$$
\begin{array}{llrcl}
(P) & \text{最小化} & z & = & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
 & \text{制約} & A\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} \\
 & & \boldsymbol{x} & \geq & 0
\end{array}
\tag{16}
$$

$$
\begin{array}{llrcl}
(P1) & \text{最小化} & z_1 & = & \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{x}^a \\
 & \text{制約} & Ax + \boldsymbol{x}^a & = & \boldsymbol{b} \\
 & & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^a & \geq & 0
\end{array}
\tag{17}
$$

と書ける．ここに，$\boldsymbol{e}^\top = (1, 1, \cdots, 1)$ である．フェイズ 1 の目的関数は非負人工変数の総和であるため，z_1 はどんなに小さくなっても $z_1 = 0$ でそれ以下になることはない．一方，目的関数値 z_1 が 0 であるフェイズ 1 問題の可能解は (P1) の最適解であり，$\boldsymbol{x}^a$ の値がすべて 0 であるから，$\boldsymbol{x}$ が元の問題 (P) の可能解となる．また，(P) に可能解があれば，(P1) には $z_1 = 0$ である最適解が存在するはずである．したがって，(P1) の最小値が $z_1 > 0$ となることは，(P) に可能解が存在しない，すなわち，(P) が実行不可能であることを意味する．

これまでの議論から，(P1) を解くことによって，(P) の実行可能性を判定でき，しかも，実行可能な場合には (P) の一つの可能解が求められることがわかった．しかしながら，単体法を起動

させるためには，単に可能解が存在するだけでは不十分であり，(P) の可能「基底」解が必要である．

(P1) の最適基底解において，$\boldsymbol{x}^a$ がすべて非基底変数であれば，(P1) の最適基底は元の問題 (P) の可能基底と考えることができる (なぜか)．したがって，問題となるのは，(P1) の最適基底解が退化しており，しかも，基底変数の一部に値 0 の人工変数が入っている場合である．詳細は省く (参考文献 1)，3) 等参照) が，このような場合にも，簡単に (P) の初期可能基底形式を作り，(P) を解く単体法を起動させることができる．(P) の可能基底解をもとに (P) の最適解を求める後半の部分を「**フェイズ 2**(phase2)」と呼び，フェイズ 1 とフェイズ 2 を合わせて **2 段階単体法**(two-phase method) という．

単体表を用いてフェイズ 1 問題を解くときには，以下に示す (P1') のように元の問題の目的関数を制約の一部に組み込んでおくとよい．

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
(P1') & \text{最小化} & z_1 & & & & & = & \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{x}^a \\
& \text{制約} & z & - & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & & & = & 0 \\
& & & & A\boldsymbol{x} & + & \boldsymbol{x}^a & = & \boldsymbol{b} \\
& & & & \boldsymbol{x}, & & \boldsymbol{x}^a & \geq & 0
\end{array}
\tag{18}
$$

ただし，変数 z, z_1 には符号制約がないことに注意する．式 (18) を基底形式に変換して単体表に表したのが次の表で，1 ページの初期単体表の代わりにこの表から出発する．

z_1	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	基底
1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	z_1
0	1	-14	-8	-18	0	0	0	0	0	z
0	0	1	1	3	-1	0	1	0	2	x_6
0	0	2	1	1	0	-1	0	1	3	x_7

こうしておくと，$z_1 = 0$ で人工変数 x_i^a がすべて非基底変数である (P1) の最適基底解，すなわち，(P) の可能基底解が求まった時点で，基本的にフェイズ 1 の目的関数行と人工変数の列および z_1 の列を除去することによって，(P) の初期可能基底形式が得られる．なお，z や z_1 は非基底変数とはならない．興味ある読者は，$z_1 = 0$ なる (P1) の最適基底解において，人工変数が基底変数に残っている (退化している) 場合の対応策，すなわちどのように (P) の初期可能基底形式を作ればよいかを考えよ．

練習 1.23 上の問題で，z を取り込んだ単体表の計算を実施しなさい．（Excel を使いなさい）

（ヒント）次の手順で計算する

1. （基底形式）基底変数が z_1 の行に x_6, x_7 の行を加えて x_6, x_7 の欄の -1 を 0 にする
2. （ピボット列の選択）z_1 の行の $x_1, x_2, ..., x_7$ の数字の最大なものを軸の列として，比を計算する
3. （ピボットの決定，ピボット行ベクトルの基準化)）比の最小になる行をピボットとして，ピボットが 1 になるようにする
4. （ピボット列の単位ベクトル化）ピボット行以外の行に対して，ピボット行ベクトルの定数倍を引く．

練習 1.24 次の最小化問題を，指示に従って２段階単体法で解きなさい

$$\begin{array}{llrcrcl} \text{最小化} & w = & 3y_1 & + & 5y_2 & & \\ \text{制約} & & 3y_1 & - & y_2 & \geq & 3 \\ & & -2y_1 & + & y_2 & \geq & 2 \\ & & y_1 & , & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

（ステップ１）スラック変数 y_3, y_4 を導入して連立方程式を作る

$$\begin{array}{lrcrcl} w & -3y_1 & - & 5y_2 & = & 0 \\ & 3y_1 & - & y_2 & = & 3 \\ & -2y_1 & + & y_2 & = & 2 \\ & y_1 & , & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

（ステップ２）初期可能基底解が簡単に求まらないので，人工変数 y_5, y_6 を導入して，第一段階の線形計画問題を導く

$$\begin{array}{lrrcl} w_1 & & & = & 0 \\ & 3y_1 & -y_2 & = & 3 \\ & -2y_1 & +y_2 & = & 2 \\ & y_1, & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

（ステップ３）目的関数の式から y_5, y_6 を消去して，基底形式にする

$$\begin{array}{lrrcl} w_1 & & & = & 5 \\ & 3y_1 & -y_2 & = & 3 \\ & -2y_1 & +y_2 & = & 2 \\ & y_1, & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

（ステップ５）単体法で解く

w_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	b	基底
1								w_1
0			-1	0	1	0		y_5
0			0	-1	0	1		y_6

w_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	b	基底
1								w_1
0								
0								

（ステップ６）可能基底解が見つかったら，単体表から y_5, y_6 を消去したものを単体法で解く．

練習 1.25 次の数理計画問題を２段階単体法で解きなさい

$$\begin{array}{llrcrcrcr} \text{最小化} & z = & 6x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{制約} & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 15 \\ & & 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

1.7 双対性と相補性

与えられた線形計画問題には，**双対問題**と呼ばれる，もとの問題とは表裏一体をなす別の線形計画問題が存在することが知られている．線形計画問題を行列とベクトルを使って次のように表したとき，

$$\begin{array}{lrcl} \text{最大化} & z & = & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{制約} & A\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & 0 \end{array}$$

その双対問題は

$$\begin{array}{lrcl} \text{最小化} & w & = & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \\ \text{制約} & \boldsymbol{y}^\top A & \geq & \boldsymbol{c}^\top \\ & \boldsymbol{y} & \geq & 0 \end{array}$$

によって与えられる．逆に，１番目の問題は，２番目の問題の双対問題ともいう．

28 ページの例３（鉄鋼電力労働力の問題，２製品の場合）を再掲する．

$$\begin{array}{lccrcrcr} \text{最大化} & z & = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{制約} & & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \\ & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\ & & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} z = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

次の問題は 49 ページでとりあげた例 4 である．

$$\begin{array}{lccrcrcrcr} \text{最小化} & z & = & 14x_1 & + & 8x_2 & + & 18x_3 & & \\ \text{制約} & & & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 2 \\ & & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\ & & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}^\top \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

この二つを注意深く見比べると，例４の z, x_1, x_2, x_3 を w, y_1, y_2, y_3 と置き換えると，例３の双対問題になっていることが分かる．なぜこのような双対問題を考えるのか，ということも含めて，以下では，２つの方法で，もとの問題から双対問題を導出し，もとの問題と双対問題との間にどのような関係があるかを見ることにする．

1.7.1 式の足し合わせによる双対問題の導出

例 4 の x の代わりに y，z の代わりに w で置き換えたものは次のようになる．

$$\begin{array}{lccrcrcrcr} \text{最小化} & w & = & 14y_1 & + & 8y_2 & + & 18y_3 & & \\ \text{制約} & & & y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & \geq & 2 \\ & & & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 3 \\ & & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 \end{array} \tag{19}$$

この問題を単体法で直接解く代わりに，別の方法を使って解けないか，考えてみよう．

ここで，式 (19) の最適目的関数値 w^* がどれくらいになるか推定する問題を考えることにしよう．一つの方法は，適当に制約条件をみたす $\boldsymbol{y}^\top = (y_1, y_2, y_3)$ を見つけて w^* がたかだかある値以下であることをいう方法である．このように w^* がたかだかこの値以下であるという値を w^* の**上界値**(upper bounds) という．たとえば，(2,0,0) は可能解であるから，w^* はたかだか 28 であることがわかる．しかし，このような方法で，「あてずっぽに」w^* の推定値を探していくのは非効率的であるし，仮に，上界値が最適値と一致していても一般にそれらが一致しているということがわからないであろう．そこで，ここでは，考え方を変えて，w^* の**下界値（かかいち；lower bound）**をシステマティックに求めることを考えてみよう．w^* の下界値とは w^* の値が少なくともこの値以上という値のことである．そこで式 (19) をよくにらんで，1 番目の制約条件の両辺を 6 倍すると

$$6y_1 + 6y_2 + 18y_3 \geq 12$$

となり，$y_1, y_2, y_3 \geq 0$ より

$$w = 14y_1 + 8y_2 + 18y_3 \geq 6y_1 + 6y_2 + 18y_3 \geq 12$$

となって，12 が w^* の下界値であることがわかるであろう．同じように，1 番目の制約条件を 5 倍したものと 2 番目の制約条件を 3 倍したものを辺々足し合わせると

$$w = 14y_1 + 8y_2 + 18y_3 \geq 11y_1 + 8y_2 + 18y_3 \geq 19$$

となって 12 より大きな w^* の下界値が出てくる．もう少し一般的に考えてみると，i 番目の制約条件式を何倍するかという重みを x_i とすると，非負の重み x_i(なぜ非負でなければならないか) に対して

$$x_1(y_1 + y_2 + 3y_3) + x_2(2y_1 + y_2 + y_3) \geq 2x_1 + 3x_2$$

が成立し，左辺を書き直すことによって

$$y_1(x_1 + 2x_2) + y_2(x_1 + x_2) + y_3(3x_1 + x_2) \geq 2x_1 + 3x_2 \tag{20}$$

となる．したがって，元の問題の目的関数 $w = 14y_1 + 8y_2 + 18y_3$ を考え合わせると

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

を満足する非負 x_1, x_2 に対して，式 (20) の右辺 $2x_1 + 3x_2$ が w^* の下界値になる．下界値のなかでは，大きいものほどよいので，最大のものが w^* の下界値としては一番ふさわしいということになるであろう．つまり w^* の最良の下界値を求める問題は，

$$\begin{array}{llcrcrcr} \text{最大化} & z & = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{制約} & & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \\ & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\ & & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{21}$$

となる．これまでの議論から，w^* の最大の下界値を求める問題の最適目的関数値 z^* は常に $w^* \geq z^*$ を満足することが明らかであろう．式 (21) が例 3 に他ならないことに注意してほしい．

練習 1.26 以上の議論と同じ議論をすることによって，次の最大化問題の最良上界値を求めなさい．解いた結果を式（19）と比べなさい．何が分かりましたか．

$$\begin{array}{llcrcrcr}
\text{最大化} & z & = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{制約} & & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
 & & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
 & & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

解答：

1.7.2 ラグランジュ緩和による双対問題の導出

式 (19) と同じ問題を再び扱う．

$$\begin{array}{lllcrcrcrcr}
(P) & \text{最小化} & w & = & 14y_1 & + & 8y_2 & + & 18y_3 & & \\
 & \text{制約} & & & y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & \geq & 2 \\
 & & & & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 3 \\
 & & & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

まず，線形計画問題 (P) の制約条件を満たす解が，

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2 & - & y_1 & - & y_2 & - & 3y_3 & \leq & 0 \\
3 & - & 2y_1 & - & y_2 & - & y_3 & \leq & 0
\end{array}$$

を満たすことに着目すると，非負の定数 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ に対して，次の線形計画問題 $(Q(x_1, x_2))$ を考える．この問題は，非負定数 x_1, x_2 の与え方に依存するので，これを明示的に示すために問題 $(Q(x_1, x_2))$ と表記しているが，以下では単に (Q) と省略形で表記する場合もある．問題 (P) は $Q(0, 0)$ と書けることに注意．(Q) の最適目的関数値（以下，最適値）は（問題 P を含む最適値になるので）(P) の最適値以下になるはずである：

$$\begin{array}{llrcl}
(Q(x_1, x_2)) & \text{最小化} & w = 14y_1 + 8y_2 + 18y_3 + (2 - y_1 - y_2 - 3y_3)x_1 & & \\
 & & +(3 - 2y_1 - y_2 - y_3)x_2 & & \\
 & \text{制約} & y_1 + y_2 + 3y_3 & \geq & 2 \\
 & & 2y_1 + y_2 + y_3 & \geq & 3 \\
 & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

これは，(P) の任意の実行可能解 $y = (y_1, y_2, y_3)$ が，(Q) のすべての制約条件を満たす可能解でもあり，非負定数 $x = (x_1, x_2) \geq 0$ に対して，(Q) の目的関数値が (P) の目的関数値以下となるからである．したがって，(Q) の最適値は，(P) の最適値の下界値を与えることになる．

ここで，(Q) の目的関数を x でなく，変数 y でくくって書き直すと次に示す問題 $(Q'(x_1, x_2))$ の形になる：

$$
\begin{array}{lllrcl}
(Q'(x_1,x_2)) & \text{最小化} & w = (14 - x_1 - 2x_2)y_1 + (8 - x_1 - x_2)y_2 & & & \\
& & \quad +(18 - 3x_1 - x_2)y_3 + 2x_1 + 3x_2 & & & \\
& \text{制約} & & y_1 + y_2 + 3y_3 & \geq & 2 \\
& & & 2y_1 + y_2 + y_3 & \geq & 3 \\
& & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

一般に，数理計画問題では制約条件を緩めれば最適値がよりよくなるか，悪くても変わらない．すなわち，最小化問題の場合は目的関数値が制約条件を緩める前に比べて等しいか小さくなるはずである．これは問題の条件が緩くなるので当然のことと言える．すなわち，条件を緩和した問題の最適値は，緩和する前の問題の最適値の下界値を与える．そこで，(Q') の非負条件以外の制約条件を省略，すなわち，緩和すると，次の問題 (LR(x_1, x_2)) となる：

$$
\begin{array}{lllrcl}
(LR(x_1,x_2)) & \text{最小化} & w = (14 - x_1 - 2x_2)y_1 + (8 - x_1 - x_2)y_2 & & & \\
& & \quad +(18 - 3x_1 - x_2)y_3 + 2x_1 + 3x_2 & & & \\
& \text{制約} & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

したがって，任意の非負定数 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ に対して，$(LR(x_1, x_2))$ の最適値が問題 $(Q'(x_1, x_2))$，すなわち，これと等価な $(Q(x_1, x_2))$ の最適値の下界値を与えることが保証される．一方，$(Q(x_1, x_2))$ の最適値は (P) の最適値の下界値を与えることが保証されているので，$(LR(x_1, x_2))$ の最適値は (P) の下界値（あるいは下界）を与えることになる．

一般に, 非負の定数 $x_1, x_2 \geq 0$ に対する $(LR(x_1, x_2))$ は**ラグランジュ緩和問題 (Lagrangean relaxation problem)** と呼ばれる．また，元の (P) の下界値を (LR) から得ようとする方法を**ラグランジュ緩和法 (Lagrangean relaxation)** と呼び，このとき制約条件にかける x_1, x_2 は**ラグランジュ乗数 (Lagrange multiplier)** と呼ばれる．ラグランジュ緩和は整数計画／組合せ最適化ばかりでなく非線形計画問題など，数理計画一般でしばしば用いられる方法である．

ここで，(LR) の目的関数の各 y_i の係数部分，すなわち，括弧の中に注目する．**この中にもし 1 つでも負となるものがあるとどうなるか**．それに対応する y_i を無限に大きくすることによって下界は$-\infty$とできる．元の (P) の下界として$-\infty$と言われてもありがたみはないので，得られる下界値が意味あるものとなるために変数 y_i にかかる係数部分，つまり，括弧の中がそれぞれ非負でなくてはならないという条件を与える：

$$14 - x_1 - 2x_2 \geq 0, \quad 8 - x_1 - x_2 \geq 0, \quad 18 - 3x_1 - x_2 \geq 0$$

これらがいずれも非負であれば，$(LR(x_1, x_2))$ の目的関数値を小さくするためには $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ をすべて 0 にするのがよく，そのときの目的関数は $2x_1 + 3x_2$ となり，

$2x_1 + 3x_2$ を上に記した y の係数が非負という条件の下で最小化すればよい．以上を整理すると，最良の下界値，すなわち，なるべく大きな下界値を求めるためには，次の問題の最大化を図ればよいことになる：

$$
\begin{array}{llcrcrcr}
(D) & \text{最大化} & z & = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
& \text{制約} & & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \\
& & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
& & & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
& & & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\tag{22}
$$

(D) は式の足し合わせによって導出した式 (21)，すなわち例 3 の線形計画問題に他ならない．こうして導出された線形計画問題 (D) は問題 (P) の双対問題と呼ばれる．

練習 1.27 ラグランジュ緩和に基づく方法によって，以下の問題の双対問題を導出しなさい（導出プロセスの要点を説明すること）

$$
\begin{array}{lccrcrcr}
\text{最大化} & z & = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{制約} & & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \\
& & & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
& & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
& & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

解答：

練習 1.28 ラグランジュ緩和に基づく方法によって，以下の問題の双対問題を導出しなさい（導出プロセスの要点を説明すること）

$$
\begin{array}{lccrcrcrcr}
\text{最小化} & w & = & 14y_1 & + & 8y_2 & + & 18y_3 & & \\
\text{制約} & & & y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & \geq & 2 \\
& & & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 3 \\
& & & 3y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 4 \\
& & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

解答：

練習 1.29 ラグランジュ緩和に基づく方法によって，以下の問題の双対問題を導出しなさい（導出プロセスの要点を説明すること）

$$
\begin{array}{lcrcrcr}
\text{最小化} & z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{制約} & & -4x_1 & - & 3x_2 & \leq & -8 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
& & -3x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\
& & x_1, & & x_2, & \geq & 0
\end{array}
$$

解答：

1.7.3 対称型の双対問題

以上の議論から，例 3 と例 4 との間の密接な関係がわかったが，この関係を一般的立場から考察するために，次の二つの問題 (P) と (D) を考える．なお，以下では §1.7.2 とは逆に最大化問題を (P) と呼び，最小化問題を (D) と呼んでいるが，問題の名前の付け方はとくに決まりがある訳ではないので本質的ではないことに注意しておく．

$$
\begin{array}{llcrcl}
(P) & \text{最大化} & z = & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & & \\
& \text{制約} & & A\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\
& & & \boldsymbol{x} & \geq & 0 \\
(D) & \text{最小化} & w = & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} & & \\
& \text{制約} & & \boldsymbol{y}^\top A & \geq & \boldsymbol{c}^\top \\
& & & \boldsymbol{y} & \geq & 0
\end{array}
$$

問題 (D) は問題 (P) の**双対問題**(**dual problem**) と呼ばれ，逆に，問題 (P) は問題 (D) の双対問題でもある．双対問題に対して元の問題を**主問題**(**primal problem**) と呼ぶ．不等号の向き，最大化/最小化の違いが対称な形をしているので，これらの問題の対を**対称型の双対問題**と呼ぶ．問題 (D) の制約を両辺とも転置して $A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ と書き直すとわかるように，問題 (P) と (D) は，互いに，行と列をひっくり返した形をしている．対をなすこれら二つの問題は表と裏のような関係にあり，たとえば，一方の最適解から他方の最適解を得ることができる．

定理 2 (弱双対定理) 問題 (P) の任意の可能解 $\boldsymbol{x}$ と問題 (D) の任意の可能解 $\boldsymbol{y}$ に対して

$$z = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq w = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$$

が成立する．

証明：$\boldsymbol{x}$ は (P) の可能解であるので $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ を満足する．したがって，左から (D) の可能解 $\boldsymbol{y}^\top(\geq 0)$ をかけると $\boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$ となり，$\boldsymbol{c}^\top \leq \boldsymbol{y}^\top A$ と $\boldsymbol{x} \geq 0$ より $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$ が成立する．

系 3 問題 (P) の任意の可能解 x と問題 (D) の任意の可能解 $\boldsymbol{y}$ に対して

$$z = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = w = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$$

が成立するならば，$\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ は，それぞれ (P)，(D) の最適解である．

なお，以下に示すように問題が等式条件の最大化問題 (P') の場合，双対問題は (D') となる．

$$\begin{array}{llcrcl}
(P') & \text{最大化} & z & = & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & \\
 & \text{制約} & & & A\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} \\
 & & & & \boldsymbol{x} & \geq & 0 \\
(D') & \text{最小化} & w & = & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} & \\
 & \text{制約} & & & \boldsymbol{y}^\top A & \geq & \boldsymbol{c}^\top \\
 & & & & \multicolumn{3}{l}{（\boldsymbol{y}\text{の符号条件なし）}}
\end{array}$$

このような問題の対を**非対称型の双対問題**という．名前が示すように，等式/不等式条件，非負条件の有無において対称性が崩れている．一般に，

制約条件が等式 (不等式) 条件 → 対応する双対変数の非負条件なし (あり)

変数の非負条件なし (あり)→ 対応する制約条件は等式 (不等式)

という関係に基づき双対問題が定まる．なお，不等号の向きは，定数項を右辺とすると，最大化 (最小化) の場合 $\leq$ ($\geq$) である．与えられた問題に不等式/等式，非負変数/符号条件のない変数が混在しているときも，上の原則に従えばよい．

例 5　**等号不等号が混ざった場合の双対問題導出**

問題 (P_1) の双対問題 (D_1) の導出を考える．

$$\begin{array}{lllrrcrcr}
(P_1) & \text{最大化} & z = & & 4x_1 & - & 2x_2 & & \\
 & \text{制約} & & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\
 & & & - & 5x_1 & + & x_2 & = & -5 \\
 & & & & x_1 & - & 3x_2 & \geq & 3 \\
 & & & & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & \multicolumn{5}{l}{（x_2\text{の符号条件なし）}}
\end{array}$$

問題 (D_1) の導出にあたっては，まず，問題 (P_1) が最大化問題なので 3 番目の制約を-1 倍して不等号の向きを右開き $\leq$ にした問題 (P_1') に変形する．

$$\begin{array}{lllrrcrcr}
(P_1) & \text{最大化} & z = & & 4x_1 & - & 2x_2 & & \\
 & \text{制約} & & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\
 & & & - & 5x_1 & + & x_2 & = & -5 \\
 & & & - & x_1 & + & 3x_2 & \leq & -3 \\
 & & & & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & \multicolumn{5}{l}{（x_2\text{の符号条件なし）}}
\end{array}$$

ここで，非負条件を除く 3 本の制約に対応させる双対変数をそれぞれ y_1，y_2，y_3 とする．1 番目と 3 番目の制約は不等式なので双対変数 y_1 と y_3 には非負条件がつき，2 番目の制約に対する双対変数 y_2 には符号制約はない．また，非負制約がついている問題 (P_1') の変数 x_1 に対応する双対問題の制約は左開きの不等式となり，符号制約がない変数 x_2 に対応する双対問題の制約は等式制約となる．あとは，問題 (P_1') の係数の行と列を入れ替えて，以下の双対問題 (D_1) が導出される．

$$
\begin{array}{lllrcrcrcr}
(D_1) & \text{最小化} & w = & 4y_1 & - & 5y_2 & - & 3y_3 & & \\
& \text{制約} & & 2y_1 & - & 5y_2 & - & y_3 & \geq & 4 \\
& & & 3y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & = & -2 \\
& & & y_1, & & & & y_3 & \geq & 0 \\
& & & & & \multicolumn{3}{c}{(y_2\text{の符号条件なし})} & &
\end{array}
$$

練習 1.30 次の数理計画問題の双対問題を，(1) 機械的な方法によって導引きなさい．(2) ラグランジュ緩和に基づく方法で導きなさい．両者が一致することを確かめなさい．

例 3 と例 4 とは双対問題の組をなすが，一方の最適単体表から他方の最適解を簡単に読み取ることができる．双対価格は双対変数とも呼ばれるが，これまでの話をよく理解した読者は，主問題の最適基底 B に対して双対価格 $\boldsymbol{\pi}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}$ が双対問題の最適解になることが予想できるかもしれない．実際，33 ページの単体表から読み取れる $\boldsymbol{\pi}^\top = (1,1,0)$ は例 4 の最適解である．同様に，50 ページの単体表の最適単体表 (No.4) から例 3 の最適解 $\boldsymbol{\pi}^\top = (2,6)$ を読み取ることができる．

【注】50 ページの単体表の No.4 において，目的関数行のスラック変数 x_4, x_5 の位置には，双対価格 $\boldsymbol{\pi}$ の符号を逆転した $-\boldsymbol{\pi}$ が現れていることに注意する．これは，この位置の真下に存在するのが，単位行列 I ではなく $-I$ だからである．すなわち，$\boldsymbol{e}_i$ を i 番目の要素が 1 の単位ベクトルとするとスラック変数に対する第 0 行は $\boldsymbol{\pi}^\top(-\boldsymbol{e}_i) - 0 = -\pi_i$ となる．同様に，もともと $-I$ があった位置には基底の逆行列の代りに，その符号を逆転したものが現れる．

最適基底形式から得られる双対価格が双対問題の最適解となることをきちんとみるために，§1.6.8 と同様に非対称型双対問題を次のような形に設定する．

$$
\begin{array}{lllrcrcl}
(P) & \text{最大化} & z = & \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B & + & \boldsymbol{c}_N^\top \boldsymbol{x}_N & & \\
& \text{制約} & & B\boldsymbol{x}_B & + & N\boldsymbol{x}_N & = & \boldsymbol{b} \\
& & & \boldsymbol{x}_B, & & \boldsymbol{x}_N & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllrcl}
(D) & \text{最小化} & w = & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} & & \\
& \text{制約} & & \boldsymbol{y}^\top B & \geq & \boldsymbol{c}_B^\top \\
& & & \boldsymbol{y}^\top N & \geq & \boldsymbol{c}_N^\top
\end{array}
$$

問題 (P) の最適基底を B，すなわち，$\boldsymbol{x}^\top = (\boldsymbol{x}_B^\top, \boldsymbol{x}_N^\top) = (B^{-1}\boldsymbol{b}, 0)$ を (P) の最適基底解とすると，最適性より被約費用は非正となり，$\bar{\boldsymbol{c}}_N^\top = \boldsymbol{c}_N^\top - \boldsymbol{\pi}^\top N \leq 0$ である．ここに，$\bar{\boldsymbol{c}}_N$ は非基底変数に対する被約費用のベクトルである．そこで，$\boldsymbol{y}^\top = \boldsymbol{\pi}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}$ とすると

$$
\boldsymbol{y}^\top B = \boldsymbol{\pi}^\top B = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1} B = \boldsymbol{c}_B^\top
$$

$$\boldsymbol{y}^\top N = \boldsymbol{\pi}^\top N = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1} N \geq \boldsymbol{c}_N^\top$$

(不等式は最適性の条件より) となり，$\boldsymbol{\pi}$ が (D) の可能解であることがわかる．(D) の可能解 $\boldsymbol{\pi}$ の目的関数値は $w = \boldsymbol{\pi}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b}$ となり，(P) の最適値 $z^* = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b}$ と一致する．したがって，系 3 より $\boldsymbol{\pi}$ が (D) の最適解であることがわかる．証明は省くが，逆に，双対問題に最適解があれば，主問題にも最適解があり，それらの最適値は一致する．また，一方が無限解をもつときには他方が可能解をもたないことを示すことができる．以上をまとめたのが **(強) 双対定理**である．

定理 4 (強双対定理)（1）主問題，あるいは，双対問題の一方が最適解をもてば，他方も最適解をもち，それらの最適目的関数値は一致する．

（2）主問題 (双対問題) が無限解をもてば，双対問題 (主問題) には可能解が存在しない．

双対定理をまとめると次の表のようになる．

表　主問題と双対問題

	双対問題（最小化）		
主問題（最大化）	最適解あり	下に有界でない	実行不可能
最適解あり	(1)	×	×
上に有界でない	×	×	(2)
実行不可能	×	(2)	

× は起こりえない組合せである．一方，(1) と (2) は，それぞれ，定理 4 の (1) と (2) に対応する．主問題および双対問題両方が実行不可能という組合せも存在するが，実際にみかけることは少ない．

1.7.4　双対性の経済的意味

例 3 では，3 種類の原料から 2 種類の製品を生産する企業 (企業 X とする) が，原料の供給可能量の範囲内で利益を最大にするための両製品の生産量を決定する問題という状況を想定した．これに呼応する形で例 4 に解釈を与えることはできないであろうか．

仮に企業 X は 2 種類の製品を生産する代りに，在庫している原料を他の企業 Y に売ることも考えられるとしよう．原料価格の設定に交渉の余地があるとしたとき，企業 Y の立場に立つと，企業 Y は企業 X のもっている原料をなるべく安く買いたたきたい．しかし，企業 X が話にのってくれないことにはしょうがないので，企業 Y の問題は

目的:企業 X が保有する原料の総購入コストの最小化

制約:企業 X が話にのってくる購入単価

となる．各原料の購入単価 y_i を変数として，このように言葉で表現されたモデルを数式化したのが例 4 の式 (13) と考えられる．これをみると，企業 X が話にのってくる条件が，企業 X の生産する製品に対応していることがわかる．たとえば，製品 1 に関する制約は

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2$$

である．これを言葉で表現すると，「製品 1 を 1 単位生産するために必要な原料 (鉄鋼を 1 単位，電力を 1 単位，労働力を 3 単位) を売却するときの売上額が，製品 1 の単位当り利益 2(万円) 以

上でないと話にのれない」となる．製品 1 の 1 単位分の原料を売って 2 万円にならないのなら，企業 X は製品 1 を生産してより多くの利益を獲得しようとするであろう，というわけである．製品 2 に関してもまったく同様の条件件を設定し，企業 Y の立場から，企業 X の手持ちの原料在庫をすべて購入するときの購入総額を最小化したのが式 (13) と考えればつじつまが合う．このような状況が実際に起きることは滅多にないであろうが，経済学では，これに近い形で双対性を活用しながら経済現象を分析する研究が行われている．

企業 Y を登場させなくても，双対変数の値が価格に類する意味をもつことはわかる．すなわち，双対価格が原料供給量 (右辺定数) を増加させたときの単位当りの最大利益 (目的関数値) 改善の度合を示すことを考えれば，原料供給を 1 単位ふやすことによって双対価格に見合うだけ利益の増加が期待できる．したがって，原料 1 単位の調達費用が双対価格以下であれば，実質的な利益増が見込めることになる．双対価格の別名である潜在価格という呼び名が示すように，それは，必ずしも原料に対する市場の実際の価格と一致するというわけではない．

1.7.5 相補性

対称型の双対問題 (P) と (D) に，それぞれスラック変数 $\boldsymbol{\lambda}$ と $\boldsymbol{\mu}$ を導入すると，

$$
\begin{array}{lllllllll}
(P') & \text{最大化} & z & = & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & & & & \\
& \text{制約} & & & A\boldsymbol{x} & + & \boldsymbol{\lambda} & = & \boldsymbol{b} \\
& & & & \boldsymbol{x}, & & \boldsymbol{\lambda} & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllllll}
(D') & \text{最小化} & w & = & \boldsymbol{y}^\top b & & & & \\
& \text{制約} & & & \boldsymbol{y}^\top A & - & \boldsymbol{\mu} & = & \boldsymbol{c}^\top \\
& & & & \boldsymbol{y}, & & \boldsymbol{\mu} & \geq & 0
\end{array}
$$

となる. このとき，次の定理が成立する．

定理 5 (相補スラック定理，相補性定理) 主問題の可能解 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ と双対問題の可能解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu})$ が

$$\mu_j x_j = 0 \quad (j = 1, \cdots, n); \quad y_i \lambda_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{23}$$

を満足すれば，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ は主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu})$ は双対問題の最適解である．逆に，各問題の最適解は，式 (23) を満足する．

条件 (23) は，**相補スラック条件 (complementary slackness condition)** あるいは**相補条件**(complementarity) と呼ばれており，相補性定理は主問題と双対問題の可能解が相補スラック条件をみたせば，それらの解はそれぞれの問題の最適解であり，その逆も正しいことをいっている．相補条件がみたされれば，スラック変数とこれに対応する変数との少なくとも一方が必ず 0，換言すれば一方が非零ならば他方は 0 である．

なお，各変数の非負性より

$$\mu_j x_j = 0 (j = 1, \cdots, n) \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} = \Sigma_j \mu_j x_j = 0$$
$$y_i \lambda_i = 0 (i = 1, \cdots, m) \Leftrightarrow \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{\lambda} = \Sigma_i y_i \lambda_i = 0$$

が成立することに着目すると，相補スラック条件を

$$\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{\lambda} = 0$$

と書き換えてもよい．

練習 1.31 非対称型の双対問題における相補性定理を記述しなさい．

28 ページ例 3 の最適解 $\boldsymbol{x} = (2, 6), \boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 6)$ と，双対問題である 49 ページ例 4 の最適解 $\boldsymbol{y} = (1, 1, 0), \boldsymbol{\mu} = (0, 0)$ とを使うと，

$$\begin{aligned} \mu_j x_j = 0 &\Leftrightarrow 0 \times 2 = 0 \times 6 = 0 \\ y_i \lambda_i = 0 &\Leftrightarrow 1 \times 0 = 1 \times 0 = 0 \times 6 = 0 \end{aligned}$$

となって相補条件を満たしていることがわかる．

単体表から読み取れる可能基底解と双対価格とは常に相補スラック条件をみたしているので，相補性という観点からみると，単体法は相補条件を満足する解をシステマティックに追跡し，相補スラック条件をみたす主可能かつ双対可能な解，すなわち最適解を求める方法ととらえることができる．本章で学んだ主単体法は，相補スラック条件を維持しながら主可能基底解を追跡し，解が双対可能となった時点で最適解が求まるという仕組みである．

【注】双対問題の可能 (基底) 解に対して相補スラック条件を満足する主可能解が求められれば最適解となるので，このような主可能解を 2 段階単体法のフェイズ 1 の考え方を利用して探し，発見できない場合には双対問題の可能解を更新するという考え方に基づく主双対法 (primal dual algorithm) という方法もある．主双対法は，LP の特殊形であるネットワーク型最適化問題の効率的解法の基礎になっている．

1.7.6 相補性の経済的意味

前項で双対性の経済的意味づけを行ったが，相補性も同じような意味づけができる．対称型の双対問題を考え，主問題を資源制約の下で利益を最大化する生産計画決定の問題とすれば，対応する双対変数は各資源に対するある種の価格とみなすことができることを学んだ．主問題の最適解において使いきっていない資源は，供給量をふやしてもメリットがないのでそのような資源調達に金を出す気にはなるまい．したがって，その潜在価格は 0 である．つまり，最適解において余らせている資源，すなわち資源制約のスラック変数が正であるような資源の潜在価格は 0 となる．逆に潜在価格が正ということは，資源の供給をふやすことによって解を改善できることを示しているので，そのような資源を余らせるはずがない．

練習 1.32 次の問題を線形計画問題として定式化しなさい（出典：刀根薫「数理計画」)．2 種類の製品を 2 種類の原油から作っている．これから 4 営業期間の間の予測需要量，原油使用可能量，製造費用，販売価格が次のように与えられているとき，費用最小となる生産計画を立てなさい．ただし，製品を時期に繰り越す場合，保管費用などは考えなくて良い．また，原料を使い切

らなかった場合は，次期に繰り越すことが出来るものとします．

多期間計画問題

原油	製品 R	製品 S	i 期需要量
R	a_{11}	a_{12}	b_{1i}
S	a_{21}	a_{22}	b_{2i}
製造費 (i 期)	c_{1i}	c_{2i}	
販売価格 (i 期)	d_{1i}	d_{2i}	
需要量 (i 期)	s_{1i}	s_{2i}	

練習 1.33 次の問題を線形計画問題として定式化しなさい（出典：刀根薫「数理計画」）．ある工場では四つの工程により，原材料 A から最終製品 D, H, I, J を作り出している．各工程から作り出される中間製品と各工程での投入量，産出量は次の表のように与えられている．たとえば，工程１を１時間動かすと原料 A が a_1 トン必要で，中間製品 B, C がそれぞれ b_1, c_1 トン生産される，というように読む．各工程の１日あたりの稼働時間の上限，１時間動かしたときの変動費用，消費電力，製品の価格と最大需要（販売量）も表に記入されている．これらの制約に加えて，１日の使用電力の上限は Q と決められている．このとき，利益最大化を目的とする生産計画を立てなさい．ただし，中間製品は全部使い切る必要はないものとします．

プラントの操業問題

原料/製品	工程１	工程２	工程３	工程４	価格	販売量
A	$-a_1$ トン/時間				p_A 円/トン	
B	b_1	$-b_2$				
C	c_1	$-c_2$	$-c_3$			
D		d_2			p_D	s_D トン
E		e_2		$-e_4$		
F		f_2	$-f_3$			
G			g_3	$-g_4$		
H			h_3		p_H	s_H
I				i_4	p_I	s_I
J				j_4	p_J	s_J
消費電力	q_1kW/時間	q_2	q_3	q_4		
操業変動費	r_1 円/時間	r_2	r_3	r_4		
稼働時間上限	t_1 時間/日	t_2	t_3	t_4		

ヒント：各工程の稼働時間，製品 D, H, I, J の生産量を変数としなさい．原料 A の使用量は工程１の稼働時間に a_1 を掛けたものとして良い．

参考図書

1) 今野浩：線形計画法，日科技連出版社 (1987).
2) 伊理正夫：線形計画法，共立出版 (1986).
3) 刀根薫：数理計画，朝倉書店 (2007).
4) 伊理正夫，韓太舜，線形代数 (1977).

演習問題

問題 1.1 早稲田製鉄所では鉄鋼製品の生産にあたって，4 箇所の海外鉱山から輸入された鉄鉱石を原料として利用しています製品の品質基準を満たすため，各鉱山から輸入した 4 種の鉄鉱石を配合しています．各鉱山で採れる鉄鉱石の成分組成，およびトン当たりの購入単価品質基準の最低ラインは表の通りです．

元素含有量 (g/t)	1	2	3	4	最低必要量 (g/t)
A	10	3	8	2	5
B	90	150	75	175	100
C	45	25	20	37	30
単位（万円/t）	800	400	600	500	

早稲田製鉄所では，少しでもコストが低くなるように鉄鉱石を配合したいと考えています．トン当たりのコストを最小にするような配合比率を求めて下さい．(データは G.D.Eppen and F.J.Gould, Quantitative Concepts for Management, p.109, Prentice-Hall(1979) より)

注意:鉄鋼電力労働力問題とは制約条件の不等式の向きが違います．
ヒント:この問題は配合比率を決める問題ですから，全体が 100% にならなければいけません．これをどう表現したらよいか考えてください．

問題 1.2（農場経営問題）(G.D.Eppen and F.J.Gould, Quantitative Concepts for Management, p.129, Prentice-Hall, 1979.)Buster Sod さんはアリゾナ州 Red River Valley に 1200 エーカーの農場を営んでいます．この農場では現在 wheat(小麦)，alfalfa(アルファルファ)，beaf(肉牛) を栽培または飼育しています．Sod さんは来年度の農場経営プランを設計中ですが，Sod さんの農場で使用できる農業用水の量が 2000 エーカーフィート (水の単位です) 割り当てられてられることが決まっています．このほか，

1. 牛肉の販売価格はトン当たり 600 ドル
2. 小麦の販売価格は 1 ブッシェル当たり 1.60 ドル，収穫高は 1 エーカー当たり 50 ブッシェル
3. アルファルファの販売価格はトン当たり 34 ドル，収穫高は 1 エーカー当たり 3 トン
4. 肉牛を育てるためは，1 トン当たりアルファルファが 4 トン必要
5. アルファルファは 1 トン当たり 36 ドルでいくらでも購入することが出来る

ということが分かっています．その他の点については次の表を参照して下さい．

	コスト（ドル）（労働力，機械など）	必要な水量（エーカーフィート）	必要な土地（エーカー）
小麦	8	1.5	1
アルファルファ	30	2.5	1
肉牛	40	0.1	0.05

ただし，小麦，アルファルファは 1 エーカーあたり，肉牛は 1 トンあたりの数字です．Sod さんに代わって，利益が最大となる農場経営プランを作るために，線形計画問題に定式化して，以下の問に答えてください

(1) 変数を明確に定義してください．単位も明示してください．

(2) 目的関数式の係数をどう算出しましたか．また，アルファルファの生産量に関する土地および水の制約の係数がどう計算されたか説明してください．

(3) 最適解ではどれだけの水が使用されますか．またどれだけの牛肉が生産されますか．

(4) Sod さんはアルファルファを売るべきですか，それとも購入すべきですか．

(5) Sod さんが資金を投入して土地が増やせるとした場合，その値段が 1 エーカーあたりいくらまでなら購入すべきですか．

(6) 各制約条件の潜在価格 (=双対価格) の解釈を説明して下さい．

(7) 小麦の販売価格が 3 倍になったとき最適生産計画は変りますか．

(8) Sod さんが最適計画通りに生産を行った場合，どれだけの利益を上げられますか．

(9) アルファルファの購入価格が 36 ドルから 37 ドルになった場合，最適値にどのような変化が起きますか．

(10) アルファルファの購入価格が下がる場合，いくらまでならこの最適計画を変更せずに済みますか．

問題 1.3 ある男性が 4 人の女性 (L さん，O さん，V さん，E さん) に花束のプレゼントをすることになりました．カスミソウ 20 本と，赤と黄色のチューリップそれぞれ 12 本ずつが手元にあり，それらを適当に組み合わせて 4 つの花束を作りたいのですが，L さん，O さん，V さん，E さんはそれぞれ好みが違うため，花束の内容を変えなければなりません．また 4 人の女性にプレゼントする花の本数は同じ (11 本) にすることにします．下記のデータは 4 人の女性の好みを数量化したものです．数字が大きくなるほど，その女性がその花をプレゼントされるたときの満足度が高い，と考えます．好みの総合計が最大となるプレゼントのしかたを数理計画で求めて下さい．

	L	O	V	E
カスミソウ	5	3	2	1
赤チューリップ	4	2	1	5
黄チューリップ	2	5	4	2

問題 1.4 (タイヤ工場の生産計画) フォレストドアタイヤ (秩) では，ナイロンタイヤとファイバーグラスタイヤを生産しています．向こう 3 ケ月のタイヤの出荷計画は以下のように決定されているものとします:

日付	ナイロン	ファイバーグラス
6 月 30 日	4,000	1,000
7 月 31 日	8,000	5,000
8 月 31 日	3,000	5,000
合計	15,000	11,000

この会社では，2 種類のプレス機械，Wheeling 機械と Regal 機械とを使用しており，各製品を製造するための鋳型の制約から各月，各機械の使用可能時間は以下のように与えられているものとします:

期間	Wheeling 機械	Regal 機械
6 月	700	1,500
7 月	300	400
8 月	1,000	300

ナイロンタイヤ，ファイバーグラスタイヤとも，両機械で生産できますが，1 本のタイヤ生産に要する時間 (単位:時間) は，機械-タイヤの組み合わせに依存し，以下の通りです:

種類	Wheeling 機械	Regal 機械
ナイロン	0.15	0.16
ファイバーグラス	0.12	0.14

どの機械を使ってもタイヤ１本あたりの生産の変動費用は，時間当たり 5,000 円，在庫保管費は，月当たり，タイヤ１本当たり 100 円で，月末の在庫に対して保管費が発生するものとします．ナイロンタイヤ，ファイバーグラスタイヤの材料費は，それぞれ 3,100 円，3,900 円，包装や出荷に要する費用は，タイヤ１本当たり 230 円とします．ナイロンタイヤの価格は 7,000 円，ファイバーグラスタイヤは 9,000 円です．生産課の課長から，以下の問い合わせがきたとして，それぞれの問い合わせに適切に回答しなさい．

(1) 最小費用で出荷計画を満足するためにはどのように生産すればよいか．そのときの利益はいくらになるか．

(2) 9 月になると，新しい Wheeling 機械が入る予定になっています．しかし，20 万円を支払えば，新機械の到着を早めることが可能となって，8 月の Wheeling 機械の生産能力を 172 時間だけ増やすことが可能となります．新機械の到着を早めるよう手配すべきか考えてください．

(3) 各機械の保守の時間をとるとしたらいつにしたらよいですか．

問題 1.5（Astro&Cosmo の生産ライン問題）ある電機メーカーの工場では，Astro と Cosmo と呼ばれる 2 機種の MD を生産しており，機種毎に生産ラインが設けられています．Astro ラインの製造能力は一日当たり 70 台，Cosmo ラインの能力は一日当たり 50 台です．各ラインには組立工程と検査工程があり，各製品は両工程の作業を経て製品となる．組立工程では Astro は，一台当たり 1 人時 (man hour) の労働力が必要であるのに対して，Cosmo は 2 人時が必要です．現状では，組立工程では両機種の生産合わせて一日当たり 120 人時の労働力の供給が可能です．一方検査工程では Astro，Cosmo とも一台当たり 1 人時 (man hour) の労働力でよく，100 人時の労働力の供給が可能です．利益への貢献が，Astro，Cosmo それぞれ一台に対して，$20，$30 であるとしたときに，利益を最大にする生産計画を求める線形計画問題を定式化し，解いた上で，以下の問に答なさい．

(1) 最適解 (=最適生産計画) とそのときの最適値 (=最大利益) はいくつになりましたか．

(2) この工場には余分な能力がありますか．あるとすればどこにどれだけの余力がありますか．

(3) Astro ラインの製造能力が一日 70 台から 72 台に増加されたとした場合，最適目的関数値は変化しますか．それは増加ですか減少ですか．

(4) Cosmo ラインの製造能力が一日 50 台から 40 台に落ちた場合，最適目的関数値はどうなりますか．

(5) 改善案 A「組立工程の労働力を 1 人時 (man hour) 当たり$10 で，一日あたり 10 人時増加させる」と改善案 B「Astro ラインの一日当たりの生産能力を 1 台当たり$2 で，10 台分増加させる」のどちらが効果的ですか，理由を付けて答えなさい．

(6) Astro ラインの製造能力の変化に伴う最適目的関数値の変化率はどのようになっていますか．また，製造能力がどの範囲でこの変化率を信用することができますか．

(7) Cosmo の一台当たりの利益への貢献が$30 から$35 に変化したときに，最適 (目的関数) 値はどう変わりますか．

(8) Astro 一台当たりの利益への貢献が$2 減少して$18 になったとしたときの最適解と最適値はどうなりますか．

(9) Cosmo 一台当たりの利益への貢献が$30 から$45 に増えたとすると何が言えますか．

問題 1.6（家具の生産計画）ある海外輸出専門の家具製造工場では 4 種類の家具 A, B, C, D の

生産ができます．生産の主要工程は，切断，研磨，仕上げの 3 工程です．この工場では，切断，研磨，仕上げの各工程の単位期間 (向こう 3 ケ月とします) の生産能力がそれぞれ，1000 時間，720 時間，640 時間と与えられています．各品種の現在の設定価格のもとでの家具 1 台当たりの利益 (単位ドル) と家具を 1 台作るのに要する各工程の作業時間は既知で次の表のように与えられています．このとき，総利益を最大にするような生産計画を求めたい．台数は本来は整数ですが，実数で計算しても構わないとすると，その最適な生産計画はどうなりますか．ただし，製品は，作れば作っただけ売れるものと仮定します．

家具の種類：	A	B	C	D	生産能力 (時間)
利益 (ドル)	90	160	40	100	
切断時間 (時間)	7	8	3	5	1000
研磨時間 (時間)	5	4	8	5	720
仕上時間 (時間)	2	8	4	2	640

(1) 切断工程の生産能力に関する制約条件のスラック (=左辺と右辺との差) はいくらで，それは何を意味しますか．

(2) 製品 A を生産するようになるためには，製品 A の利益がいくらになる必要がありますか．

(3) 製品 B1 台当たりの利益が$100 に落ちたときの最大総利益はいくらになりますか．

(4) 外部から研磨機が 1 時間当たり$20 で借りられるとしたとき，研磨機を借りるのがよいかどうか，理由を明示して答えなさい．

(5) 無理に製品 C を作ろうとした場合，この結果からどんなことが言えますか．

(6) 仕上げ工程の生産能力を 100 時間追加したときに，最大利益はどうなりますか．

2 包絡分析法

2.1 はじめに

何かの活動を評価する場合，つぎ込んだ努力に対して得られた結果の大きさが大きければ大きいほど優れていると考えるのは自然である．活動した人にとっても「単位あたり」努力に対して，結果の大きさが大ければ大きいほど満足感は大きい．つまり，結果の大きさと努力の大きさの比が問題になる．一般に，努力を**入力**あるいは**投入**，結果を**出力**あるいは**産出**と言うことにすると，このことは，「出力を入力で割ったもの」あるいは「投入分の産出」が大きければ大きいほど好ましい活動ということになる．少ない入力で大きな出力が得られるという意味で，その活動は**効率的**と言うことにしよう．このような効率性の尺度は**比率尺度**と呼ばれる．

例えば勉強の効率性として，試験勉強に掛けた時間を入力，試験の点数を出力とすると，この比率尺度は単位時間あたりの点数として，簡単に計算できるが，もっと複雑な活動の場合は入力項目，出力項目の数が 1 種類ではない．そのような場合「入力」分の「出力」をどのように計算すればよいか，ということが問題．誰でも考えつく，よく使われるのは「指数化」という方法である．入力量が $x_1, x_2, ...$ とあった場合，それにウェイト $\alpha_1, \alpha_2, ...$ を掛けて $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots$ を「総合」入力とするのである．出力量 $y_1, y_2, ...$ にも同様にウェイト $\beta_1, \beta_2, ...$ を掛けて $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots$ を「総合」出力とすれば，それらの比を取って

$$R = \frac{\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots} = R(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

が「総合的な」効率性評価尺度になる．

ここで問題になるのがウェイトの決め方である．複数の活動（例えば企業経営）の効率性を評価しようという場合，普通に考えれば，評価項目を決めて，そのウェイトを決めれば，あとは機械的にデータを集めて，上の式の R を計算してその値が大きい小さい，ということを議論する．R が小さい活動は R の大きな活動に対して効率性が「劣っている」という評価にしかならない．しかし，それでは活動の「個性」が消されてしまう．総合的評価としてはそうかもしれないけれど，この活動はこういう点で頑張っている，という多様性も考慮して評価する方法として，脚光を浴びているのが包絡分析法である．

2.2 効率的フロンティア

2.2.1 入力項目一つ，出力項目一つ

入力項目が一つ，出力項目も一つとすると，横軸に入力（x とする），縦軸に出力（y とする）の大きさを取ってプロットすると，好ましさを図示することが出来る．例えば，「試験勉強－受験」を活動と考えると，入力は費やした時間，出力は試験の得点として，各科目についてこれらのデータをプロットすると，どの科目の活動が好ましかったかが分かる．比率なので，プロットした点と原点を結ぶ直線の傾きが大きいほど効率的ということになる．一番傾きの大きい直線上の点は有効フロンティアと呼ばれる．この尺度では 10 時間勉強して 100 点取るのも，1 時間しか勉強せずに 10 点しか取れないのも，同じように効率的，ということになる．

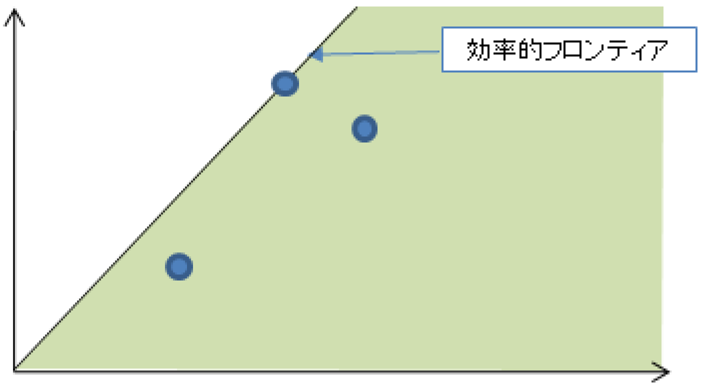


図　効率的フロンティア（1 入力，1 出力）

練習 2.1 次の表は，コンビニ各社の店舗数と売上高をまとめたものである．入力を店舗数，出力を売上高としたとき，各コンビニの効率性を評価しなさい．効率的なコンビニはどれですか.

企業名	店舗数	売上高（億円）	企業名	店舗数	売上高（億円）
セブンーイレブン	11735	25335	デイリーヤマザキ	1612	2164
ローソン	8564	13866	エーエムピーエム	1075	1733
ファミリーマート	6501	10688	セイコーマート	1012	1519
サークルKサンクス	5104	8728	九九プラス	780	1438
ミニストップ	1689	2681	ポプラ	784	1107

解答：

2.2.2　入力項目一つ，出力項目二つ

入力が一つ（x としよう），出力が二つ（y, z としよう）の場合を考える．次のような五つの組織体を比較する．簡単のためにどの組織体も $x = 1$ とする．

組織体	y	z
A	6	1
B	4	2
C	1	3
D	3	1
E	2	2.5

組織体 A は y を大きくしようとして頑張り，組織体 C は z を大きくしようとして頑張っているが，規模は小さい，組織体 B は総合的に頑張る，というポリシーを持っている，という場合である．指数法を使って，たとえば $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$ として評価すると $A > B > E > C = D$ となり，完全な序列が付いてしまうが，それぞれの特徴を考えると，組織体 B, C は不満であろう．もし $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$ とすれば $C > E > B > A = D$ となる，あるいは，$\beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.7$ とすれば

効率性の序列は $B > A > C > E > D$ となり B, C はトップになる可能性もある．ウェイトの決め方一つで序列は一意に決まらない，だとすれば，効率性尺度が最も大きくなるようなウェイトの決め方があるならば，その組織体は効率的であるといっても良いではないか，というのが得意値評価法の考え方である．図で表しておくとはっきりする．$(y/x, z/x)$（各出力項目単独の効率性評価値）をプロットしたものが次の図である（今の場合は $x = 1$ なので，(y, z) をプロットしても同じ）．

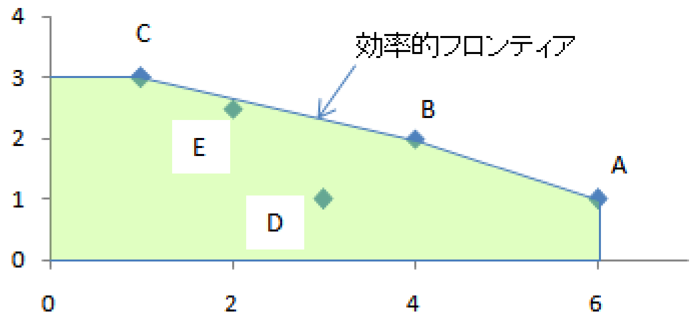


図　効率的フロンティア（１入力２出力）

横軸が y，縦軸が z を表す．もし，組織体 D のように，その点の右上に組織体 B の点があり，両方の産出指標とも劣っているので，効率的であるとは主張できないであろう．それに対して組織体 A, B, C はそれぞれに特徴があり，パレート最適の条件を満たしている．これを一つの指標で序列化するのは有効な評価法とは言えないであろう．注意すべきは組織体 E で，これはどの指標をとっても劣っているということはなく，それなりに優位性を主張できる．このような優位性は**パレート最適**と言うのであった．組織体 A, B, C もパレート最適であることは言うまでもないが，組織体 E がそれらと違うところは，組織体 B, C を結ぶ線分より原点に近いところに位置していることである．これは何を意味しているだろうか．もし，B, C がそれぞれの良いところを出し合えって合弁会社を作るとすれば，その新組織の効率性評価値は，B, C を結ぶ線分の中間に来るようなものが出来るに違いない．この意味で，組織体 E は効率的とは言えない．このようにパレート最適の位置にあって，さらに，どんな組織体を組み合わせても効率性が上回る組織体を作ることが出来ないような組織体は **D 効率的**と言い，D 効率的な組織体の点を結んだ折れ線を**効率的フロンティア**という．効率的フロンティアの折れ線がすべての点を包み込んでいる，ということから，**包絡分析法**という名前が付いた．

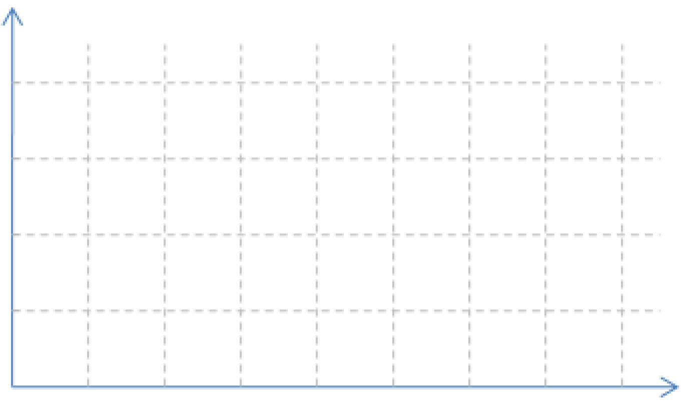
練習 2.2 次の表は，2006 年のプロ野球セントラルリーグ各球団の，選手年俸総額，勝ち数，観客動員数の記録である．選手年俸総額を入力項目，勝ち数と観客動員数を出力項目として，各球団の効率性を評価したい．(1) 各出力項目を入力項目で割った値を散布図にプロットしなさい．(2) パレート最適な球団を特定しなさい．(3)(1) のグラフに効率的フロンティアを描き，D 効率

的な球団を特定しなさい.

球団名	年俸総額（億円）	勝数	観客動員数（百万人）
CD	29.6	87	240
HT	28.9	84	315
YS	21.5	70	132
YG	34.5	65	289
HC	15.0	62	101
YB	20.6	58	111

解答：

(**1**)



(**2**) パレート最適な球団：

練習 2.3 同じ例で，出力項目を観客動員数の 1 項目だけに限った場合，入力項目をプロットすることにより，効率的フロンティアを描き，効率的な球団を特定しなさい.

解答：

2.2.3 入力項目二つ，出力項目一つ

入力が二つ（x, y としよう），出力が一つ（z とする）の場合は，次のような五つの組織体を比較する．簡単のためにどの組織体も $z = 1$ とする．今度は表の数値が小さい方が効率性が高い

組織体	x	y
A	6	1
B	4	2
C	1	3
D	3	1
E	2	2.5

組織体 A は x に無駄が多いが y を絞り込んでいる，C はその逆，というように，それぞれに特徴がある．これも，１入力２出力の場合と同様に，２次元の座標にプロットしてみると様子が分かる．ただし，この場合は入力を共通の出力で割ったもの（今の場合は $z=1$ なので，表の値そのものに等しい）を表示するので，効率性の逆数がプロットされることになり，原点に近いほど効率的ということになる．

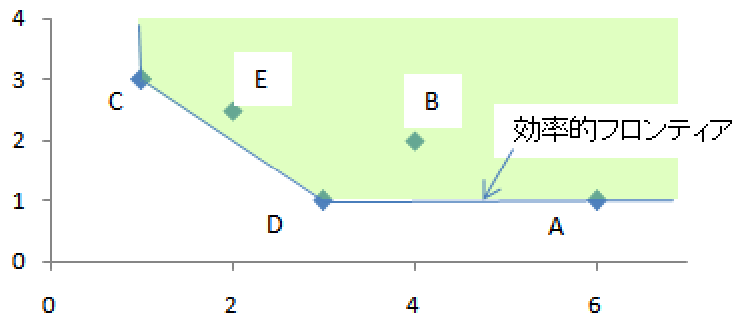


図　効率的フロンティア（２入力１出力）

前の例同様に考えると，今度はすべての点を右上の領域に包み込むような折れ線が効率的フロンティアになる．具体的には組織体 C, D を結び，あとは x 軸，y 軸に平行な半直線が効率的フロンティアを構成する．組織体 B は組織体 E の右上にあり，どの入力項目も多くなっているので，組織体 E に比べ効率的とはいえない．組織体 E はパレート最適ではあるが，どのようにウェイトを決めても組織体 C あるいは D に劣るので，これも効率的とは言えない．注意すべきは組織体 A である．$\alpha_1=0, \alpha_2=1$ として，変数 y だけを考慮すれば他より劣るとは言えないので，これも効率的組織体になるが，組織体 D と比べて，D と同じ「効率」を持っているとは言い難く，釈然としない．しかしこの決め方ではそうなる．

練習 2.4　１入力２出力の数値例で，組織体 E がどのようなウェイトを設定しても組織体 B あるいは C に劣る，ということを確かめなさい．

2.3　得意値評価法

グラフによる分析は直感的に理解しやすいが，入出力の項目がもっと増えた場合には表現不可能なので，別の方法を工夫しなければいけない．活動を**組織体**，あるいは，しばしば **DMU**(Decision Making Unit) という．複数の組織体の効率性を数量的に評価比較する問題を考える．もっとも簡単な場合，二つの組織体 A, B の効率を比較したい．それぞれの投入，産出ベクトルを $\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{y}_A, \boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{y}_B$ とするとき，重み付けベクトル $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ を使ってそれぞれの組織体の総合投入量，産出量を計算し，その比の大きいものを効率的とすればよい．

$$R_A(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{y}_A}{\boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{x}_A} \gtrless \frac{\boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{y}_B}{\boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{x}_B} = R_B(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

ただし，$\boldsymbol{\alpha}^\top$ は $\boldsymbol{\alpha}$ の転置を表す

さて，ウェイト $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ をどのように決めれば両者が納得するか，という問題が残る．常識的に考えれば，話し合って決める，ということだが，両者を満足させるウェイトは見つからないかもしれない．

例 2.1 たとえば，入力項目数 2，出力項目数 1 の場合，投入量 $(1,3)$ から 5 の出力を得た組織体 A と，投入量 $(2,1)$ から 4 の出力を得た組織体 B とを比較するために，$(u_1, u_2) = (0.5, 0.5)$ とすれば，A, B の効率指数は $\frac{5}{2} < \frac{4}{1.5}$，しかし $(u_1, u_2) = (0.6, 0.4)$ とすれば，A, B の効率指数は $\frac{5}{1.8} > \frac{4}{1.6}$ となって評価がひっくり返る．

比較対象が二つならば，あるいは話し合いも可能かもしれないが，もっとたくさんの対象をすべて納得させるようなウェイトを見つけるのはむつかしい．

例 2.2 公立施設が有効に利用されているかどうかを自治体が自己評価する場合，他の類似施設との相対比較で考える．たとえば，次の例は東京の区立図書館における，投入・産出のデータの一部である．蔵書数，貸し出し冊数の単位は万，利用登録者数の単位は千である．どのように評価すればよいか，考えてみよう

自治体名	蔵書数（万）	職員数	登録者数（千）	貸出冊数（万）
BK	88	114	175	303
ED	121	74	226	421
KT	140	77	90	370
MG	110	84	130	370
NR	137	107	250	538
OT	158	242	235	360
SD	70	61	66	102
SG	204	103	115	389
SJ	82	96	99	214
ST	170	202	296	561

組織体の活動にはそれぞれの特徴があり，ある組織体は，ある投入量を減らして効率を上げようと考えた，ある組織体はある産出量を増やすことによって効率を上げようと考えたというような場合，組織体の特徴が評価に対して不利にならないようにするためには，各組織体が自分の効率性がもっとも高くなるようにウェイトを決めても良い，とするしかない．しかしそれだけでは自己主張に終わってしまうので，その代わり，自分が有利になるように決めたウェイトによって他のすべての組織体の効率を同時に評価することにする．その計算で，効率性評価値 R が自分より大きい組織体が他に存在したら，そのウェイトを選んだ組織体は非効率と判定されるとしよう．この自分で好きにウェイトを決めることが出来る方式を，仮に得意値評価法と呼んでおく．

共通のウェイトを使った評価では，評価値が同一値になる場合を除き，組織体は効率性評価値 R の大きさによって整列できる．得意値評価法では，非効率とされる場合以外は効率的と判断され，組織体が同一の基準で整列することがない．極端な場合は，すべての組織体が効率的，ということがあり得る．つまり，パレート最適の考え方を採用する（ある点で他より優れていれば，それには存在価値がある，と認める）．

ウェイトの決め方は煩雑になるが，数理計画法を適用することで，機械的に計算できる．

2.3.1 数理計画法の定式化

どうすれば，それぞれの組織体がもっとも有利なウェイトを見付けることが出来るだろうか．この問題は数理計画法を適用することによって解くことが出来る．組織体 DMU の集合を $N = \{1, 2, ..., n\}$ とする．入力項目は r 個，出力項目は s 個として，DMUi の入力項目，出力項目を $x_{1i}, x_{2i}, , ..., x_{ri}; y_{1i}, y_{2i}, ..., y_{si}$ とする．それを表の形にまとめておく．

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}$$

また，DMUi の入力ベクトル，出力ベクトルを

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, , ..., x_{ri})^\top, \boldsymbol{y}_i = (y_{1i}, y_{2i}, ..., y_{si})^\top$$

それぞれのウェイトベクトルを

$$\boldsymbol{u}_i = (u_1, u_2, ..., u_r)^\top, \boldsymbol{v}_i = (v_1, v_2, ..., v_s)^\top$$

として，

$$R_i = R_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{v_1 y_{1i} + v_2 y_{2i} + \cdots + v_s y_{si}}{u_1 x_{1i} + u_2 x_{2i} + \cdots + u_r x_{ri}} = \frac{\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{y}_i}{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}_i}$$

と置く．「⊤」はベクトルの転置を表す記号である．

DMUi が自分にもっとも有利なウェイトを選ぶということは，$R_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を最大にするような $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を選ぶ問題，ということになるが，それでは上限がないので，$R_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leq 1$ という制約を置く．ただし，そのウェイトを使って他の DMU も評価しなければいけないので，$R_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leq 1 (k = 1, 2, ..., N)$ という制約も必要となる．結局

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & R_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \dfrac{\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{y}_i}{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}_i} \\ \text{制約} & R_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leq 1 \quad (k = 1, 2, ..., N) \\ & \boldsymbol{u} > 0, \boldsymbol{v} > 0 \end{array}$$

という数理計画問題として定式化できる．ただし，ベクトルの不等式 $\boldsymbol{u} > 0$ はすべての要素が 0 ではないベクトルとする．目的関数が分数の形をしているので，この数理計画問題は**分数計画問題**と呼ばれるものの一つである．

これをすべての DMU に対して計算して，それぞれの DMU が自分にとって最適と思うウェイトを求める．DMUi にとって最適なウェイトを $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i$ として，$\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{x}_i$ を（最適）**仮想的入力**，$\boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{y}_i$ を（最適）**仮想的出力**といい，最適解の目的関数値 $R_i(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)$ を **DEA 効率値**という．

2.3.2 DEA 効率的，非効率的

もし，i 以外のすべての DMUk に対して

$$R_i(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) \geq R_k(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) \quad (\forall k \neq i)$$

が成り立つならば，DMU$_i$ は **DEA 効率的**，さもなければ，すなわち

$$R_i(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) < R_k(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)$$

となるような DMU$_k$ が一つでもあれば，DEA **非効率的**，という．

2.3.3 入出力項目

どの項目を入力項目，出力項目として選ぶか，ということに関しては定説はない．試行錯誤でやるしかない．ただし，数量化されていること，入力は少なければ少ないほどよい，出力は大きければ大きいほどよい，という基準で決める必要がある

2.4 ＣＣＲモデル

分数計画問題を直接解くのはむつかしい．目的関数の分母を c^{-1} と置くと，次のように変形できる

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & c\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{y}_i \\
\text{制約} & -\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}\boldsymbol{y}_k \le 0 \quad (k = 1, 2, ..., N) \\
 & c\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}_i = 1 \\
 & \boldsymbol{u} > 0, \boldsymbol{v} > 0
\end{array}
$$

ここで，$c\boldsymbol{x}_i, c\boldsymbol{y}_i$ を改めて $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i$ と置けば，最初の問題は次の線形計画問題に置き替えることが出来る．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{y}_i \\
\text{制約} & -\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}\boldsymbol{y}_k \le 0 \quad (k = 1, 2, ..., N) \\
 & \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}_i = 1 \\
 & \boldsymbol{u} > 0, \boldsymbol{v} > 0
\end{array}
$$

通常の線形計画問題のように非負条件とするためには，小さな正の数 ε を導入して，$\boldsymbol{u} - \varepsilon, \boldsymbol{v} - \varepsilon$ を改めて $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ と置き，目的関数，制約式を書き直せばよいが，厳密性を犠牲にして，単に，$\boldsymbol{u} \ge 0, \boldsymbol{v} \ge 0$ としても構わない．この線形計画問題を**ＣＣＲモデル**という．提案者 3 名 Cooper,Charnes,Rhodes の頭文字をつなげたもの

例 2.3 図書館の例を実際に解いてみると，次のようになる

自治体名	蔵書数（万）	職員数	登録者数（千）	貸出冊数（万）	効率値	目標
BK	88	114	175	303	1	
ED	121	74	226	421	1	
KT	140*	77	90*	370	0.84	ED
MG	110	84	130*	370	0.87	ED,NR
NR	137	107*	250*	538	1	
OT	158	242*	235	360*	0.75	BK
SD	70	61	66	102*	0.49	BK,ED
SG	204*	103	115*	389	0.66	ED
SJ	82	96*	99*	214	0.66	NR
ST	170	202*	296	561	0.91	BK,NR

入出力項目の数字に*が付いているものは，評価のウェイトが 0 になった項目である．例えば，OT という自治体は職員数が多い割りに貸出冊数が少ないので，蔵書数と登録者数だけで評価してほしい，というウェイトになっている．「目標」欄は D 効率的でない自治体について，その得意ウェイトで評価した場合に効率値が 1 となる自治体名を書いたものである．

2.5 効率的フロンティア

入力ベクトル出力ベクトルをまとめて一つの $r+s$ 次元ベクトルと見たとき，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を**活動**という．N 個の DMU の活動 $\{(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)\}$ が与えられたとき，活動の集合 P が $\{(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)\}$ に対する**生産可能集合**であるとは，

1. すべての $i=1,2,...,n$ に対して $(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)\in P$
2. 任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in P$ と任意の $p,q\geq 0$ に対して，$p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}\in P$
3. 任意の $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in P$ と任意の $\boldsymbol{x}'\geq\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}'\leq\boldsymbol{y}$ に対して $(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')\in P$

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ がスカラーで $n=1,(x,y)=(a,b)$ とした場合の生産可能集合は，条件 2 から $y=(b/a)x$ の正の半直線を含み，条件 3 からその直線の右側にある第 1 象限の点をすべて含むので，結局，$y=(b/a)x$ と x 軸に挟まれた第 1 象限の領域となる．一般の n の場合は，$\lambda=\max_i\{y_i/x_i\}$ として，$y=\lambda x$ と $y=0$ に囲まれた第 1 象限の領域となる．すべての活動が生産可能集合に含まれることを確認せよ．生産可能集合の自明でない（x 軸ではない方の）境界線を**効率的フロンティア**という．上の例では $y=\lambda x$ が効率的フロンティアになる．DMU の活動が効率的フロンティア上にあるとき，その DMU は DEA 効率的という．

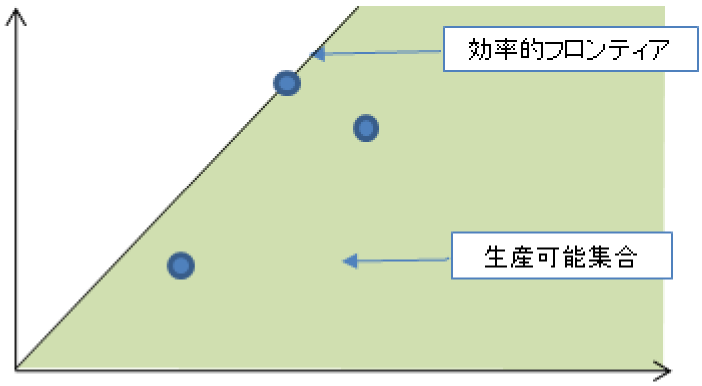


図　生産可能集合

2.6 非効率 DMU の対策

その活動が効率的フロンティア上にない DMU は，活動が「左上」にシフトするように，入力を押さえ，出力を増大するような努力が求められる．スカラーの場合，効率的フロンティアが $y=\lambda x$ で，非効率 DMU の活動が (c,d) だった場合，$d/c<\lambda$ なので，出力は d を保ったまま，入力を c から $d\lambda^{-1}$ に減らすか，入力は c のままで，出力を λc に増加させることによって効率的フロンティアに乗せることが出来る．あるいはまた，c を $(c-d\lambda^{-1})/2$ 減らして，出力を $(\lambda c+d)/2$ としても，同様に効率的フロンティアに乗せることが出来る．いろいろな対策が考えられる．

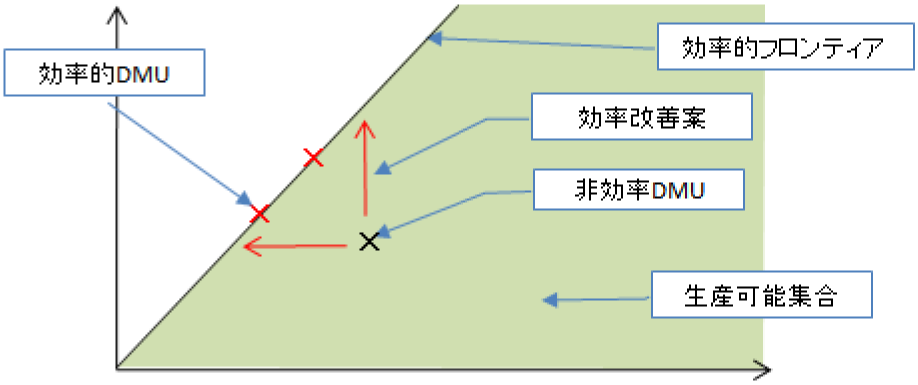


図　効率的 DMU

双対問題を考えることで，その構造が明らかになる．

練習 2.5 次の表は，日本の自動車メーカーの会社概要一覧である（2006 年度）．資本金と従業員数を入力項目，売上高と当期利益を出力項目として，効率性評価分析をしなさい．金額はいずれも億円.

企業名	資本金	従業員数	売上高	当期利益
トヨタ	3970	299394	239481	16440
本田技研	860	167231	110871	5923
日産	6058	186336	104686	4608
マツダ	1500	20395	32475	737
スズキ	1202	15240	31637	750
三菱自工	6573	33739	22029	87
いすず	406	23200	16629	924
富士重工業	1538	25598	14948	319

解答：

2.7 双対問題

ＣＣＲモデルを標準形に書き直す．行列 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ を使って書き換えると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{y}_i \\ \text{制約} & -\boldsymbol{u}^\top \mathbf{X} + \boldsymbol{v}^\top \mathbf{Y} \leq 0 \quad (k = 1, 2, ..., N) \\ & \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}_i = 1 \\ & \boldsymbol{u} > 0, \boldsymbol{v} > 0 \end{array}$$

スラック変数 $\boldsymbol{z}$ を導入して等式制約に書き換え，$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のような形に書き換えると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{y}_i^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \\ \text{制約} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_i^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{X}^\top & \mathbf{Y}^\top & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z} \geq 0 \end{array}$$

と表すことが出来る．

双対問題は，双対変数を $\theta, \boldsymbol{\xi}$ として，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \begin{pmatrix} \theta & \boldsymbol{\xi}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ \text{制約} & \begin{pmatrix} \theta & \boldsymbol{\xi}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_i^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{X}^\top & \mathbf{Y}^\top & \mathbf{I} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{y}_i^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

あるいは

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \theta \\ \text{制約} & \boldsymbol{x}_i \theta - \mathbf{X}\boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} \geq \boldsymbol{y}_i \\ & \boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

となる．

双対問題で，$\boldsymbol{\xi}$ を i 番目の要素だけが 1 の単位ベクトル，$\theta = 1$ とすれば，制約条件を満たしているので，それが実行可能解（上界値）になる．つまり，最適解の目的関数値は 1 以下．したがって，主問題で，DMU が効率的となった場合は，主問題の目的関数値が 1 になるので，双対定理から，その実行可能解は最適解になる．逆に，主問題で効率的と判断されなかった場合は，双対問題の最適解は 1 未満となり，$\boldsymbol{\xi}$ の各値が他 DMU に対する非効率の尺度を与える

双対問題の制約式の意味を考える．DMU_i は効率的ではないとしよう．このとき，上の双対問題の解は $\theta < 1$ である．したがって

$$\boldsymbol{x}_i > \mathbf{X}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}_1 \xi_1 + \boldsymbol{x}_2 \xi_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n \xi_n$$

が成り立つ．いま，DMU_k の活動を ξ_k 倍したものを各 k について組み合わせた仮想組織体を考えると，その仮想入力は $\mathbf{X}\boldsymbol{\xi}$，仮想出力は $\mathbf{Y}\boldsymbol{\xi}$ となるが，仮定から，$\mathbf{X}\boldsymbol{\xi}$ は $\boldsymbol{x}_i$ より小さく，$\mathbf{Y}\boldsymbol{\xi}$ は $\boldsymbol{y}_i$ 以上になる．これは，DMU_i より少ない入力で，同等以上の出力を産出する組織体が生産可能集合に存在することを意味する．これが，DMU_i を非効率とする意味である．

練習 2.6 次のデータは，6個の店舗について，店員数，売り場面積，売り上げをまとめたものである．包絡分析法問題として定式化して，それを解きなさい．どの店舗が効率的ですか．

	店舗 A	店舗 B	店舗 C	店舗 D	店舗 E	店舗 F
店員数（入力）	4	7	8	4	2	9
売り場面積（入力）	3	3	1	2	4	1
売り上げ（出力）	1	1	1	1	1	1

解答：

練習 2.7 次のデータは，あるジャンルの商品に関するCMの効果を見るために集められたデータの一部です．入力は広告費，放映時間など，出力は視聴率などですが，詳細は公開できません．あしからず．このデータを使って CM の効率性を評価するために包絡分析法問題として定式化しなさい．ソルバーを使って解き，どの CM が効率的か，無駄の多い CM はどれか分析しなさい．

CM 種	入力 1	入力 2	入力 3	出力 1	出力 2
A	122	188	112	455	148
B	92	152	72	397	76
C	53	80	66	196	61
D	23	35	35	81	34
E	22	35	10	59	10
F	7	11	7	28	7
G	8	13	10	27	8
H	7	11	4	23	6
I	4	12	2	22	3
J	2	4	3	13	3
K	4	5	9	8	2

解答：

2.8 包絡分析法の評価例:大学における学部評価

大学は多くの場合，学部や学科から構成されている．こうした学部学科は大学への寄与の度合いと大学が提供するリソースの消費という面に関して大きく異なる場合が多い．様々なシステムの効率性評価の積極的推進者として知られる Z 氏は，かねてより学部間で効率性に大きな違いがあると考えており，大学の理事就任早々，各学部の効率を評価してみることにした．

Z 理事は，各学部の効率性指標を設定計算するために，学部の入力項目，出力項目をいくつかのカテゴリに分けることにした．Z 理事は，入力項目として，1) 専任教員数，2) 占有面積，3) 学生や教員が必要とする図書館の蔵書数雑誌数，などを考え，出力項目として，1) 各学年の年間学生数，2) 博士学位授与数，3) 専任教員が書いた査読付学術論文数，などを考えている．Z 理事は，手始めに以下に示す簡単な 2 入力 3 出力モデルを考えることにした．

表 DEA による学部評価のデータ

学部	入力 1	入力 2	出力 1	出力 2	出力 3
A	10	15	20	3.25	10
B	24	30	25	7	20
C	21	24	20	6	26

ここでは，学部を A，B，C の三つとし，設定した 2 つの入力項目と 3 つの出力項目について調査した結果，上の表のような結果が得られたものとする．入力は値が小さいものほどよく，出力は値が大きいものほどよいものとする．Z 理事は，各入力項目，出力項目に線形のウェイトをかけて足し合わせることによって仮想的入力と仮想的出力を計算し，学部の効率指標を仮想的出力/仮想的入力の比で計算することにした:

u_i：出力項目 i のウェイト $(i = 1, 2)$

v_r：入力項目 r のウェイト $(r = 1, 2, 3)$

表のデータとウェイトに対して，学部 A の効率値は以下の比によって計算される:

$$\text{学部 A の効率値} = \frac{20u_1 + 3.25u_2 + 10u_3}{10v_1 + 15v_2}$$

他学部の効率値も同じウェイトを用いて同様に計算できる．Z 理事はこうして計算される効率値にもとづいて，学部を評価しようと考えている．

新任の Z 理事がこうした評価を始めようとしているという噂がまたたくまに学内に流れ，理事がある学部に味方しているとか，ウェイトのつけ方がいい加減であるなどの声が流れ出し，こうした評価を進めることで Z 理事は大学社会に対する重大な罪を犯しているというものさえ現れだし，入出力項目に関してコンセンサスを得ることは困難に見えた．にもかかわらず，Z 理事は学部によっては効率がよくないものもあると考えており，OR の知識を持つあなたに相談にきた．

そこで，あなたは次のように考えることにした．すなわち，すべての学部に対して同一のウェイトで仮想的入力仮想的出力を計算し，それをもとに各学部の効率値を計算評価したときに，ある学部の効率値が他の学部に比べて最大になるならば，その学部は潜在的に効率的と考えてよいであろう．ウェイトのつけ方はいろいろ考えられる．だれかがえいやっ!とウェイトを決めたり，合議の上ウェイトを決めるという方法もあるが，ここでは評価対象となる学部が自分にとって一番都合の良いようなウェイトをつけることを考える．ただし，同じウェイトで他の学部も評価し

なければならない．自分の得意とする項目のウェイトを高めて効率値を高めることが可能な評価方法なら評価結果に文句を言いにくいはずである．

潜在的に効率的であるというのは効率性の判定としては弱いけれども，学部によってはいかなるウェイト付けをもってしても効率的とはいえないものが存在するかもしれない．このような学部が見つかればその学部は改善の対象となると考えるのがよいだろう．それでは表 1 に示される 3 つの学部のなかに，潜在的に効率的とは言い難い学部が存在するだろうか．

ここでは，数理計画法によってある学部が潜在的に効率的か否かを判定することを考える．このためには比の大小を比較しなければならない．一切条件をつけないで非負のウェイトを調整して評価対象の効率値を最大化しようとすると効率値が無限大に発散するので，どの学部も効率値が 1 を越えないものと規準化する．

すなわち，以下に示すように，すべての活動に対する効率を同じウェイトで計算するとしたときに，すべての活動に対して効率値が 1 を超えないという仮定のもとで，判定対象とする活動の効率を最大化するようにウェイトを決める分数計画問題となる．次の定式化は判定対象を B 学部とした場合である．分数計画問題と呼ばれる理由は数理計画問題の目的関数や制約条件に分数が登場するからであることは言うまでもあるまい．

$$
\begin{array}{lll}
\text{最大化} \quad \theta = & \dfrac{25u_1 + 7u_2 + 20u_3}{24v_1 + 30v_2} & \\
\text{制約} & \dfrac{20u_1 + 3.25u_2 + 10u_3}{10v_1 + 15v_2} & \leq \; 1 \\
& \dfrac{25u_1 + 7u_2 + 20u_3}{24v_1 + 30v_2} & \leq \; 1 \\
& \dfrac{20u_1 + 6u_2 + 26u_3}{21v_1 + 24v_2} & \leq \; 1 \\
& u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 & \geq \; 0
\end{array}
$$

詳細は省く (刀根 [1] 参照) が，この分数計画問題は，評価対象の学部の仮想的入力を 1 に固定して規準化し，すべての学部の効率値が高々 1 という制約のもとに，仮想的出力を最大化する入出力項目のウェイトを求める線形計画問題と等価である．評価対象となる学部の効率値も高々 1 に抑えられているので，当該学部に都合のよいようなウェイトを与えて，効率値を 1 にしようとする問題と考えられる．

$$
\begin{array}{llll}
\text{最大化} & \theta = & 25u_1 + 7u_2 + 20u_3 & \\
\text{制約} & & 24v_1 + 30v_2 & = \; 1 \\
& & -10v_1 - 15v_2 + 20u_1 + 3.25u_2 + 10u_3 & \leq \; 0 \\
& & -24v_1 - 30v_2 + 25u_1 + 7u_2 + 20u_3 & \leq \; 0 \\
& & -21v_1 - 24v_2 + 20u_1 + 6u_2 + 26u_3 & \leq \; 0 \\
& & u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 & \geq \; 0
\end{array}
$$

線形計画問題の一番目の制約は，評価対象の学部 B の仮想的入力を 1 に規準化するという制約である．残る 3 本の制約は，比較対象となるすべての学部 (自分自身を含む) の効率値が高々 1 に抑えられるという制約である．最初の定式化である分数計画問題の分数を含む 3 本の制約は分母を払うとこのような線形不等式になる．目的関数は学部 B の仮想的出力である．学部 B の効率値も高々 1 に抑えられているので最大値は高々 1 である．ただし，学部 B に都合のよいウェイトで評価したからと言って，学部 B の効率値が 1 になるとは限らない．

表 1 のデータに対して，学部 B の効率値を計算する線形計画問題のソルバーの求解結果を以下に示す．実際，学部 B の効率値は約 0.98 で，自分にもっとも都合のよいウェイトを用いたにも関わらず効率値 1 を達成できていないことが分かる．

B学部の立場

ウェイト	0.0224	0.0154	0	0.1401	0		目的関数値	0.9804
条件式:	入力1	入力2	出力1	出力2	出力3			
	24	30				1	=	1
A学部	-10	-15	20	3.25	10	0	≦	0
B学部	-24	-30	25	7	20	-0.0196	≦	0
C学部	-21	-24	20	6	26	-1E-16	≦	0

図　ソルバーによる解

ここでは省くが，同様に学部 A や学部 C の効率性を評価するとそれらの目的関数値 (ソルバー出力の右上のマスの値) が 1 となって，これらの情報から学部 A や学部 C は効率的でないとは言えない (各自試してもらいたい)．これに対して，学部 B は自分にとってもっとも都合がよいはずのウェイトで各学部を評価したにもかかわらず効率値 1 を達成できなかったので，問題がありそうである．包絡分析法は，このようにして対象とするシステム間の効率性を相対的に比較して効率性の評価を行う方法である．

練習 2.8 B学部の問題を Excel シートに入力し，ソルバーを使って解いて，テキストと一致することを確かめなさい．

練習 2.9 A学部の立場から，最適なウェイトを計算する数理計画問題を書いて，それをソルバーで解きなさい．

解答：

ウェイト：

効率性の評価：

練習 2.10 C学部の立場から，最適なウェイトを計算する数理計画問題を書いて，それをソルバーで解きなさい．

解答：

ウェイト：

効率性の評価：

さて，得られた結果をもってあなたは喜びいさんで Z 理事に学部 B が効率的とは言えないという報告を持ち込んだところ，Z 理事からはあなたが期待したようには喜んでもらえなかった．Z 理事は，学部 B が潜在的に効率的でない，というのは否定的な結果である．この結果からは学部 B をより効率的にするにはどうしたらいいかという建設的な答が見当たらない．私としては，多少なりとも改善の方策を見通した上で，学部 B の執行部に改善を迫りたいという．こうしてあなたには，当該学部の執行部に建設的なアドバイスを可能にするにはどうしたらよいだろうという新たな課題が与えられることになった．

線形計画問題には，与えられた問題に対して必ず表裏の関係にある双対問題が存在することを思い出したあなたは，Z 理事の望むような何らかの情報を得られないかと双対問題を書いてみることにした．(与えられた線形計画問題に対する双対問題の作り方については，テキストの線形計画法の章を参照されたい)

活動 j に対応する非負のウェイトを双対変数 λ_j とし，評価対象の学部の仮想的入力値が 1 であるという制約に対する双対変数を θ とすると，双対問題は次のようになる:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{最小化} & \theta & & \\
\text{制約} & \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \end{pmatrix}\theta - \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}\lambda_A - \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \end{pmatrix}\lambda_B - \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}\lambda_C & \geq & 0 \\
& \begin{pmatrix} 20 \\ 3.25 \\ 10 \end{pmatrix}\lambda_A + \begin{pmatrix} 25 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}\lambda_B + \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \\ 26 \end{pmatrix}\lambda_C & \geq & \begin{pmatrix} 25 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix} \\
& \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C & \geq & 0
\end{array}$$

なお，この双対問題の制約は以下のように書き直すこともできるので，双対問題は各学部の非負線形和として仮想の学部を作り，仮想学部が学部 B の入力の高々 θ 倍の入力で最低限学部 B の出力を保証することを要請していると解釈できる．双対問題の目的関数は θ の最小化なので，学部 B の出力以上を保証するという条件の下で仮想学部の入力をできるだけ抑えよ，つまり，θ をなるべく小さくせよというのが双対問題であると解釈できる．

$$\begin{array}{lrcl}
\text{制約} & \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}\lambda_A + \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \end{pmatrix}\lambda_B + \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}\lambda_C & \leq & \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \end{pmatrix}\theta \\
& \begin{pmatrix} 20 \\ 3.25 \\ 10 \end{pmatrix}\lambda_A + \begin{pmatrix} 25 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}\lambda_B + \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \\ 26 \end{pmatrix}\lambda_C & \geq & \begin{pmatrix} 25 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}
\end{array}$$

この双対問題が実行可能解を持つことは，$\lambda_A = 0, \lambda_B = 1, \lambda_C = 0, \theta = 1$ が実行可能であることから明らかである．また，$\theta = 1$ の実行可能解が存在することから双対問題の最適目的関数値が高々 1 であることも明らかである．したがって，問題は目的関数値を 1 より小さくする人が存在するか否かである．そこで，この双対問題を解くと以下のような結果が得られる．

表　双対問題の解

	θ	A	B	C								
	0.98	0.71	0	0.78	0	0	4.8	0	7.45			
入力1	24	−10	−24	−21	−1	0	0	0	0	−0	=	0
入力2	30	−15	−30	−24	0	−1	0	0	0	−0	=	0
出力1	0	20	25	20	0	0	−1	0	0	25	=	25
出力2	0	3.25	7	6	0	0	0	−1	0	7	=	7
出力3	0	10	20	26	0	0	0	0	−1	20	=	20

この結果から，$\lambda_A = 0.706, \lambda_B = 0.\lambda_C = 0.784, \theta = 0.98$ が得られる．これから学部 A の活動を 0.706 倍するとともに，学部 C の活動を 0.784 倍して足し合わせると

$$0.706\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix} + 0.784\begin{pmatrix}21\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23.529\\29.412\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}24\\30\end{pmatrix}$$

$$0.706\begin{pmatrix}20\\3.25\\10\end{pmatrix} + 0.784\begin{pmatrix}20\\6\\26\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}29.804\\7\\27.451\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}25\\7\\20\end{pmatrix}$$

となり．学部 A の活動の 0.706 倍と学部 C の活動の 0.784 倍組み合わせた新しい学部を作れば，その学部は，学部 B の入力の 0.980 倍で各出力項目とも学部 B の出力以上を達成できることが分かる．言い方を変えれば，学部 B の入力を 0.980 倍に縮小させ，各出力項目を学部 A の 0.706 倍 + 学部 C の 0.784 倍の和にすれば効率的な活動になるといえる．

念のために，あなたは Z 理事に 1) 学部の規模を増減させたときに，入出力も同じ割合で増減すると考えてよいか，2) たとえば，2 つの学部を統合するとしたときに，それらの入出力項目が足し合わされると考えてよいか，を確認したところ，そう考えて基本的に問題なかろうという答が返ってきた．これをもとに，あなたは上の分析結果を Z 理事に説明し，潜在的に効率的ではない学部 B に対して，少なくともこの学部を効率的であるような形に導く一つの改善案を示すことができることを示したところ，Z 理事は満足したようであった．

主問題の結果の一つである感度レポートをみると各入出力項目への最適ウェイトととも，潜在価格が表示されている．線形計画法の双対性の理論から，主問題に有限な最適解が存在するとき最適解に対する潜在価格が，双対問題の最適解に対応することが知られているので，主問題の結果出力を読むことによって双対問題の最適ウェイトを知ることができるし，逆に，双対問題の結果出力から潜在価格を読めば主問題の最適解，すなわち，各入出力に対する可変ウェイトの最適値が分かる．以下に，ソルバーの感度レポートを示す．

表　ソルバーによる感度レポート

Microsoft Excel 12.0 感度レポート
ワークシート名: [包絡分析法.xlsx]学科の評価 (3)
レポート作成日: 2007/10/21 16:06:04

変化させるセル

セル	名前	計算値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$B$18	ウェイト 入力1	0.022409	0	0	4.3076923	1.5590909
$C$18	ウェイト 入力2	0.015406	0	0	1.9488636	5.3846154
$D$18	ウェイト 出力1	0	-4.80392	25	4.8039216	1E+30
$E$18	ウェイト 出力2	0.140056	0	7	1E+30	1.1282895
$F$18	ウェイト 出力3	0	-7.45098	20	7.4509804	1E+30

制約条件

セル	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$G$20		1	0.980392	1	1E+30	1
$G$21	A学科	0	0.705882	0	0.0277778	0.0666667
$G$22	B学科	-0.01961	0	0	1E+30	0.0196078
$G$23	C学科	-1.1E-16	0.784314	0	0.025	0.1057692

練習 2.11 感度分析レポートから，必要な情報を読み取りなさい．

解答：

練習 2.12 75 ページの例 2.2 のデータを使って，蔵書数，職員数を入力項目，登録者数，貸出冊数を出力項目として包絡分析法を行い，各区の図書館の効率性を比較しなさい．また，非効率と判断される図書館を効率的にするためにはどのような入出力構成の図書館を目指したらよいと考えられるか示しなさい．

解答：

練習 2.13（続き，チャレンジ）東京 23 区のすべてのデータがホームページにあるので，それを使って分析しなさい．

解答：

練習 2.14 以下の 3 つの病院の効率性を比較したい．話を簡単にするために，各病院は 2 種類の入力を 3 種類の出力に変換していると考えることにする．入出力は，具体的に：

入力 1	ベッド数（単位は，例えば 100 ベッドなど適当に）
入力 2	従業員月間労働時間（単位は，例えば千時間）
出力 1	月間の 14 才未満の患者数
出力 2	月間の 14 才以上 65 才以下の患者数
出力 3	月間の 65 才を越える患者数

3 つの病院の入出力のデータは以下の表の通りとする．このとき，これらの病院のうち，効率的と判断される病院はどれか．また，非効率的と判断される病院はどれか．EXCEL ソルバーで問題を解いて解答せよ．また，線形計画問題（双対問題）の解をもとに，非効率と考えられる病院を効率的にするにはどうすればよいかを示せ．

			患者数		
	ベッド数	労働時間	14 歳未満	14〜65 歳	65 歳より上
病院 1	5	14	9	4	16
病院 2	8	15	5	7	10
病院 3	7	12	4	9	13

解答：

練習 2.15 次の表は，コンビニ売り上げトップ 5 社の企業概要をまとめたものである．包絡分析法によって各企業の効率性を評価しなさい．

	資本金（億）	店舗数	従業員数	売上高（億）	当期純利益（億）
セブンイレブン	172	11735	4963	25335	984
ローソン	585	8564	3131	13866	209
ファミリーマート	166	13122	2717	10688	150
サークルKサンクス	84	6336	1778	8728	102
ミニストップ	75	1689	730	2681	27

解答：

参考図書

[1] 刀根薫，『経営効率性の測定と改善—包絡分析法 DEA による—』，朝倉書店，1993.

3 ネットワーク計画法

3.1 はじめに

線形計画の問題の中には，その問題の構造をうまく利用することによって，単体法で解くよりは容易に解を見つけることが出来るタイプの問題がある．その一つがネットワークを使って定式化出来るような問題がある．例えば，カーナビの最短距離を見付ける問題も線形計画法で定式が出来るが，道路ネットワークの特徴と経路の特徴をうまく取り込んだ定式化をすることによって，効率よく解を求めることが出来るようなものである．

ネットワークというのは地下鉄の路線図のようなもので（ターミナル）駅（**ノード**）の間が線路（**枝**）で結ばれていて，電車（もの）がそのネットワークの中を動き回る，というイメージを持てばよい．数学でいうグラフと同じなので，グラフ理論の言葉を使って説明されることが多い．ノードの集合を N，枝の集合を E と書く．枝はノード対で表され，上り下りのように，枝に向きが付いているネットワークは**有向ネットワーク**，ただつながっているということを表すだけならば**無向ネットワーク**という．PERT のアローダイアグラムは有向ネットワークの例である．

あるノードから別のノードに行く枝の列を**ルート**と言い，あるノードから出発して自分自身に戻ってくるルートを**サイクル**という．無向ネットワークの場合はルートの代わりに**パス**，サイクルの代わりに**ループ**という．無向ネットワークで，どのノードもパスでつながっている場合，ネットワークは**連結**という．連結でループを持たないネットワークは**木（ツリー）**と呼ばれることが多い．PERT アローダイアグラムは，プロジェクト開始ノードからプロジェクト完了ノードまでのルートの中で，枝の「長さ」が最長のものがクリティカルパス（ルート？）であった．

3.2 いくつかの例

3.2.1 最短路問題

すべての枝 (i,j) の距離 d_{ij} が与えられているとき，ノード a からノード b への最短距離を求める，というのが最短路問題．品川駅から地下鉄早稲田駅までどのように来れば最短時間で来られるか，東京から札幌に電話をするにはどのような中継局を経由するのがもっとも速いか，というように，至る所に，日常的に，解かれるべき問題がある．ノード a とノード b を結ぶパス（ルート）を全部列挙して，その中の最短距離を求めればよい．動的計画法でも同じような問題が話題にされる．

3.2.2 最大流問題

枝 (i,j) に容量 $a_{ij}(\geq 0)$ が与えられている．単位時間あたりに最大で a_{ij} の量だけノード i からノード j に運べる（流せる）と考える．ノード 1 から流せるだけ流したとして，ノード n の単位時間あたりの到着流量を求めるというのが最大流問題．たとえば，電話局 i と j の間に通話回線が a_{ij} 本引かれているとき，ノード 1 とノード n の間で同時に何組の人たちが会話できるか，という問題．

3.2.3 最小費用流問題

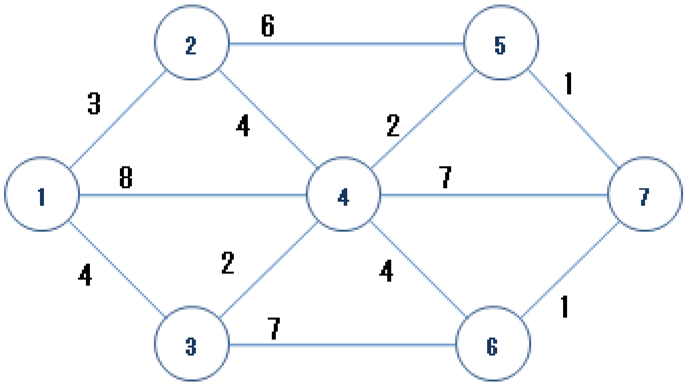
枝 (i,j) に容量 $a_{ij}(\geq 0)$ と輸送コスト c_{ij} が与えられていて，枝 (i,j) を通って x_{ij} 単位のものを送るとき $c_{ij}x_{ij}$ のコストがかかる．ノード a からノード b へ c のものを送るとき，輸送コストが最小になる各枝の輸送量を求める問題.

3.2.4 （ヒッチコック型）輸送問題

供給ノード集合 $S = \{1,2,...,m\}$ と各ノードの供給量 $\{s_1,s_2,...,s_m\}$，需要ノード集合 $D = \{1,2,...,n\}$ と各ノードの需要量 $\{d_1,d_2,...,d_n\}$，供給ノード i と需要ノード j へ運ぶ輸送単価が c_{ij} によって与えられている．$\sum_i s_i \geq \sum_j d_j$ としたとき，すべての需要を満たしながら，輸送コストを最小にする輸送計画を立てる問題.

3.3 最短路問題

例 3.1（**カーナビの最適ルート探索**）次のようなネットワークを考える．各枝に添えてある数字はその枝を通る時間を表すものとする．このとき，ノード 1 からノード 7 までの最短路を求めたい.



経由するノードが少ないうちは良いが，だんだんと長くなってくると，計算ルールをきちんとしなければ，最適かどうか判断がつかなくなってくる.

3.3.1 ダイクストラ法

一つのノード 1 から任意のノード n への最短路を求める問題に対するアルゴリズムとしてダイクストラ法がある．ノード 1 から h 時間で行けるノードを $N(h)$ とすると，h を徐々に大きくしていけば，そのうち $N(h)$ にノード n が含まれるようになり，最短路が見つかる，という方法である．ノード数は離散なので，h は「徐々に」ではなく，「次に近いノード」が見つかるように大きくしていけば良く，$n-1$ 回の更新でアルゴリズムは終了する．具体的な手順は以下の通り.

アルゴリズム（ダイクストラ法）

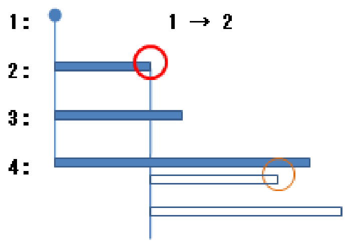
$N_1 = \{1\}, N_2 = N - N_1$ から始めて，順番に次の作業を繰り返す：N_2 の各ノードに，ノード 1 からの最短時間を記録し，その最小のノードを N_2 から N_1 へ移す.

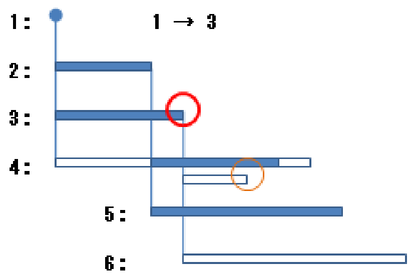
これでおしまい．丁寧に書くと：

1. $N_1 = \{1\}, N_2 = N - N_1, g_1 = 0, g_i = \infty(i \neq 1), i = 1$ とする
2. 枝 $(i, j) \in E(j \in N_2)$ が存在するノード j に対して，g_j を更新する：$g_j = \min\{g_i + d_{ij}, g_j\}$
3. $i = \min\arg\{g_j, j \in N_2\}$ にたいして，i を N_2 から N_1 に移して，$N_2 \neq \phi$ ならばステップ 2 へ戻る，さもなければ終了

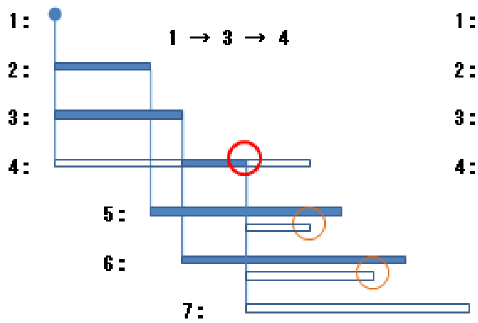
このアルゴリズムは次のようなガントチャートもどきの図によって理解することが出来る．

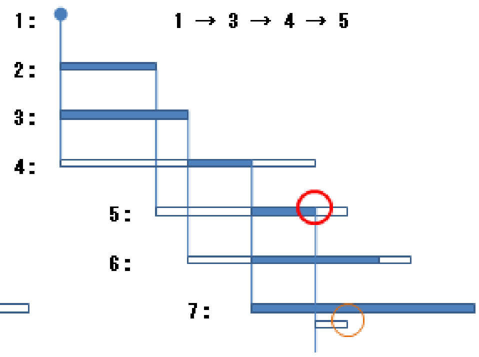
- 最初は $N_1 = \{1\}, N_2 = N - N_1$，枝 $(1,2), (1,3), (1,4)$ の長さを表す棒を左端を揃えて描く．$g_i = d_i(i = 2, 3, 4)$ とする．
- 次いで，最も短い棒に対応するノード 2 に進み，ノード 2 を N_2 から N_1 に移す．そこから出ている枝 $(2,4), (2,5)$ の長さに対応する棒をノードごとに追加する．ノード 4 へはノード 2 を経由した方が速いので，棒の長さを短縮する



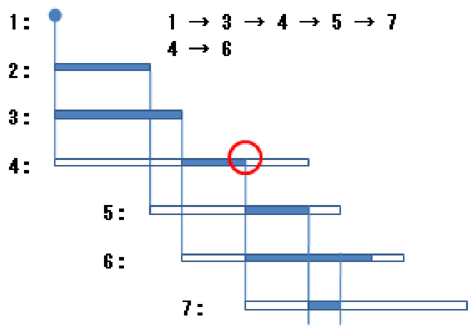


- 続いて，ノード 3 へ進み，ノード 3 を N_2 から N_1 に移す．枝 $(3,4), (3,6)$ を追加する．ノード 4 へはノード 3 を通るのが最も速いということが分かる．





- 最終的に，1 から各ノードへの最短路は「$1 \to 2$」「$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7$」「$4 \to 6$」となる．



3.3.2 ウォーシャルフロイド法

任意のノード a から任意のノード b までの最短経路を求める問題は，ノード a を $1, 2, \ldots$ として，ダイクストラ法を繰り返し適用すれば求められるが，一度に全部計算できるようなアルゴリズムがある．直接行く代わりに，どこかを経由した方が早いのではないか，と考えて，そのあらゆる経由地の可能性をつぶしていけばよい．分かってしまえばとても簡単．

アルゴリズム（ウォーシャルフロイド法）

1. ノード i, j 間に枝がない場合は $d_{ij} = \infty$ とする
2. $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $d_{ij} = \min\{d_{ij}, d_{ik} + d_{kj}\}$ とする

上の例では次のように計算が進行する（左下は省略．無向グラフならば，対称行列）．

	1	2	3	4	5	6	7
1	–	3	4	8	∞	∞	∞
2		–	∞	4	8	∞	∞
3			–	2	∞	7	∞
4				–	2	4	7
5					–	∞	1
6						–	1
7							–

⇒

	1	2	3	4	5	6	7
1	–	3	4	**6**	**8**	**10**	**9**
2		–	∞	4	8	∞	∞
3			–	2	∞	7	∞
4				–	2	4	7
5					–	∞	1
6						–	1
7							–

⇒

	1	2	3	4	5	6	7
1	–	3	4	6	8	10	9
2		–	**6**	4	**6**	**8**	**7**
3			–	2	∞	7	∞
4				–	2	4	7
5					–	∞	1
6						–	1
7							–

⇒

	1	2	3	4	5	6	7
1	–	3	4	6	8	10	9
2		–	6	4	6	8	7
3			–	2	**4**	**6**	**5**
4				–	2	4	**3**
5					–	**2**	1
6						–	1
7							–

3.3.3 数理計画問題としての定式化

ノード 1 からノード n への最短路を求める問題は，ノードの列 $i_0(=1), i_1, i_2, ..., i_m(=n)$ で，各枝 (i_{j-1}, i_j) の距離の合計が最小のものを選ぶ問題．枝 (i,j) を選択すれば 1，さもなければ 0 という値を取る変数 x_{ij} を導入することで，通常の線形計画問題として定式化できる．そのために，枝のつながり具合を表現するノードの集合を定義する必要がある．

$In(i) = \{k \in N; (k,i) \in E\}$：ノード i へ流入する枝の出発ノードの集合
$Out(i) = \{k \in N; (i,k) \in E\}$：ノード i から流出する枝の到着ノードの集合

ノード 1 から出ている枝は 1 本だけ選択するので，それは

$$\sum_{j \in Out(1)} x_{1j} = 1$$

と表されル．同様に，ノード n へ流入する枝のうち一つを選択するということは

$$\sum_{i \in In(1)} x_{in} = 1$$

によって表される．途中のノードに同じような考え方を適用すると

$$\sum_{k \in In(i)} x_{ki} - \sum_{j \in Out(i)} x_{ij} = 0$$

と表される．目的関数は $\sum_{i,j} d_{ij} x_{ij}$ の最小化．

最短路が唯一決まる場合は，x_{ij} を通常の非負実数で解いても結果は $0-1$ の値を取る．そこで，定式化は次のようになる．

$$\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \\
\text{制約} & \displaystyle\sum_{k \in In(i)} x_{ki} - \sum_{j \in Out(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & (i = 1 \text{ の場合}) \\ 0 & (i \neq 1, n \text{ の場合}) \\ +1 & (i = n \text{ の場合}) \end{cases} \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, ..., n)
\end{array}$$

3.4 最大流問題

各枝 (i,j) には容量 c_{ij} が与えられている（最大流量を表す）．それ以上のものがインプットされても容量以上は流せない（オーバーフローしてしまう）．ノード i とノード j が枝で結ばれていない場合は $c_{ij} = 0$ とする．ノード 1 から $\sum_{j \in Out(i)} c_{1j}$ の量を常に流し続けたとき，ノード n に到達する流量をノード 1 からノード n への最大流量という．

3.4.1 数理計画問題としての定式化

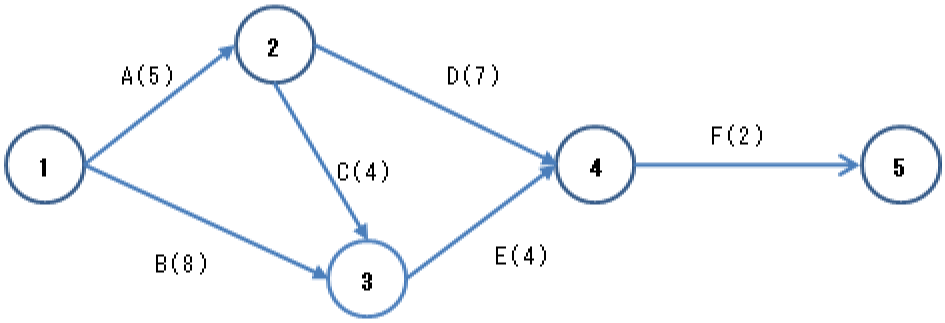
オーバーフローしてしまうならば，最初から流さなければよい．最大流量を f とすると，最短経路問題の考え方と同じで，各ノードごとにフローバランスが成り立つ必要がある．最短経路問

題における 1 を f に替えれば良いだけ．そこで，定式化は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad f \\
&\text{制約} \quad \sum_{k\in In(i)} x_{ki} - \sum_{j\in Out(i)} x_{ij} = \begin{cases} -f & (i=1\text{ の場合}) \\ 0 & (i\neq 1,n\text{ の場合}) \\ +f & (i=n\text{ の場合}) \end{cases} \\
&\qquad\quad c_{ij} \geq x_{ij} \geq 0 \quad (i,j=1,2,...,n)
\end{aligned}
$$

3.4.2 日程計画（ＰＥＲＴ）と数理計画法

次のようなアローダイアグラムが与えられた場合，これを数理計画の問題として定式化することが出来る．作業開始ノード 1，作業完了ノード n を持つノード数 n の有向ネットワークで，すべてのルートはノード 1 を始点，ノード n を終点とするのがアローダイアグラムの特徴である．各枝 (i,j) には作業見積もり時間 c_{ij} が与えられている．このとき，すべてのルートの中で，c_{ij} の合計が最大のものを見つける，というのがクリティカルパス問題である．



すべてのルートをあらかじめ求める代わりに，あるルートが枝 (i,j) を含むならば 1，さもなければ 0 という値を取る変数を x_{ij} とすると，ある条件を満たした $\{x_{ij}\}$ の組がルートを決定する．したがって，$\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$ を最大化するのがクリティカルパスを見つける問題と同じ．制約条件としては，ノードから複数の枝が出ている場合はそのうちのどれか 1 本を選ぶ，どのノードでも入ってくる枝の本数は出て行く枝の本数と等しい，ということから，流量 1 の場合の制約式を使えばよい．

この問題でその制約条件を表すと，次のようになることが確認できるであろう．

$$
\begin{cases} 1 = x_{12} + x_{13} \\ x_{12} = x_{23} + x_{24} \\ x_{13} + x_{23} = x_{34} \\ x_{24} + x_{34} = 1 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{pmatrix} -1 & -1 & & & \\ 1 & & -1 & -1 & \\ & 1 & 1 & & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{34} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

この問題の場合は完了ノードに接続している枝が 1 本しかないので，$x_{45}=1$ は変数とする必要がない．従って，5 変数の線形計画問題を解くことになる．

変数 x_{ij} の値は 0 か 1 しか取らない，という制約を置いているが，たとえば，ノード 1 からの流量が $x_{12}=x_{13}=0.5$ というような計画が最適になることはない，ということは直感的に明らかなので，その制約は明示的に書く必要がなく，通常の線形計画問題として定式化すればよい．

実際に Excel ソルバーを使ってこの問題を解くと，最適解は（余裕時間を計算してクリティカルパスを求めた場合と同じように）ノード 1 − 2 − 3 − 4 − 5 を通り，所要時間が 15，という解

が得られる．ただし，ソルバーは通常の線形計画問題として解くために，本来 0 であるべき枝の流量が 10^{-12} くらいの小さい値になっている場合があるので，補正が必要．

感度レポートを見ると，枝 $(1,3),(2,4)$ の限界コストが -1 となっているので，作業 $(1,3)$ あるいは作業 $(2,4)$ の作業時間の増加量が 1 を超えるまでは，計算したクリティカルパスが変わらない，1 を超えたら計算をし直す必要があることが予想される．実際，c_{13} を 8 から 9.1 に変更すると，クリティカルパスに作業 B が組み込まれ，プロジェクト完了時刻が 15.1 に延長されることが確認できる．

練習 3.1 上の問題をソルバーで解いて，クリティカルパスが 15 になることを確かめなさい．また，枝 $(2,4)$ の c_{24} を 7 から 8.1 に変えたとき，クリティカルパスがどうなるか計算しなさい．

解答：

クリティカルパス：

練習 3.2 次の日程計画問題を数理計画問題として定式化し，それを解きなさい．

作業記号	作業時間	先行作業
A	3	–
B	4	–
C	5	–
D	5	A
E	2	A
F	3	B
G	6	B,C
H	6	E,F
I	2	D
J	3	H,I
K	4	G,H,I

解答：

PERT ネットワーク：

クリティカルパス：

3.5 輸送問題

複数の生産拠点から複数の需要地へものを運ぶという問題はオペレーションズリサーチの誕生時点から常に中心的話題であった．状況が簡単であれば，クイズ的感覚で解けるようなアルゴリズムもあり，なじみやすいが，その奥は深い．簡単な例題を中心に解説しよう．

例題 3.1 （原料輸送問題） 早稲田工業では，3 ヵ所の工場 P1，P2，P3 で 1 種類の製品を生産し，4 ヵ所の需要地 M1，M2，M3，M4 に供給している．重量の大きな製品であるために高い輸送コストがかかる．各工場から各需要地への製品 1 単位当たりの輸送単価は既知である．総輸送費用は，輸送量 × 輸送単価で計算される．各工場の供給量，各需要地の需要量が次の表のように与えられ，さらに，工場から需要地までの輸送単価（単位はたとえば万円）が与えられたとき，総輸送費を最小とする輸送計画を求めたい．

表　輸送問題のデータ

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	6	4	3	7	10
工場 P2	1	5	6	2	25
工場 P3	5	6	8	10	15
需要量	18	9	12	11	50

総輸送費を最小化する輸送方法を求める問題を数理計画問題として定式化する．変数名の取り方はなんでもよいが，ここでは変数 x を使用し，工場 i から需要地 j への輸送量を，i と j を x の添字として x_{ij} で表現する．

(1) 変数 (variable)：x_{ij} ＝工場 i から需要地 j への輸送量

このとき，変数 x_{ij} を用いて，目的関数や制約条件は以下のように表現できる：

(2) 目的関数 (objectivefunction)，評価尺度 (performancemeasure)：

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

(3) 制約条件 (constraints)：

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &\le a_i \quad i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &\ge b_j \quad j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} &\ge 0 \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

以上のような線形計画問題は輸送問題と呼ばれている．なお，ここでは供給量の総和と需要量の総和が一致している問題を考え，需給が一致しない場合はどうするかについては後で考える．また，供給量・需要量といった「右辺定数」は正の整数であると仮定する．

ここでは，問題のシナリオを問題の名前通りに輸送に関係するものとしたが，輸送とはまったく関係のないようなシナリオで輸送問題の形に定式化できる問題がいっぱいあることに注意しておく．以下にそのようなシナリオの一つを紹介する．

例題 3.2 ある男性が４人の女性（Ｌさん，Ｏさん，Ｖさん，Ｅさん）に花束のプレゼントをすることになった．花束の内容は，カスミソウと，赤と黄色のチューリップである．ところが，Ｌさん，Ｏさん，Ｖさん，Ｅさんはそれぞれ好みが違うため，花束の内容を変えなければならない．また４人の女性にプレゼントする花の本数は同じ（１１本）にすることに決めた．下記に示すデータをもとに，４人の女性の「好み」の「総合計」が最大となるプレゼントのしかたを求めたい．花の供給量は，カスミソウ 20 本，赤チューリップ 12 本，黄チューリップ 12 本である．

表　花束作成

	L	O	V	E
カスミソウ	5	3	2	1
赤チューリップ	4	2	1	5
黄チューリップ	2	5	4	2

練習 3.3 線形計画問題として定式化した場合の制約条件を書きなさい．

解答：

3.6　輸送問題の解法

輸送問題に対しては，線形計画法に対する単体法の前身である「飛び石法」を紹介する．この解法は単体法同様，可能基底解を順次改善していく方法である．なお，輸送問題の変数は非負の連続変数と考えるが，与えられた供給量や需要量が整数の場合，変数が整数という条件を付けなくても解が必ず整数になることが知られている．

3.6.1　初期可能（基底）解の求め方

最初に実行可能な輸送ルート（解）を決める．その方法はいろいろ提案されているが，ここでは代表的な二つを紹介する．

方法１　北西隅（NW 隅）ルール（森戸が勝手に使っている俗称は「早稲田」ルール）

左上のマスから，順次，「目いっぱい」流せるだけ流す

今の問題にこの方法を適用すると次のようになる．何とか法というまでもなく，誰でも思いつく方法．この場合の輸送費用合計は

$$10 \times 6 + 8 \times 1 + 9 \times 5 + 8 \times 6 + 4 \times 8 + 11 \times 10 = 303$$

となる．

表　北西隅法による初期可能基底解
（各マス左上のカッコ内の数値は輸送単価）

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	[6] 10	[4]	[3]	[7]	10
工場 P2	[1] 8	[5] 9	[6] 8	[2]	25
工場 P3	[5]	[6]	[8] 4	[10] 11	15
需要量	18	9	12	11	50

方法２　ハウザッカー・ルール (Houthakker rule)

一番安いマスから，順次,「目いっぱい」流せるだけ流す

今の問題にこの方法を適用すると次のようになる．

1. 最初に費用最小の $P2 \to M1$ を選び 18 輸送する．需要地 $M1$ を消去する．
2. 残されたルートの中で費用最小の $P2 \to M4$ を選び 7 輸送する．工場 $P2$ を消去する．
3. 残されたルートの中で費用最小の $P1 \to M3$ を選び 10 輸送する．工場 $P1$ を消去する．
4. 残されたルートの中で費用最小の $P3 \to M2$ を選び 9 輸送する．需要地 $M2$ を消去する．
5. 需要地 $M3, M4$ の不足分 $2, 4$ は工場 $P3$ から送る．

表　ハウザッカー法による初期可能基底解

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	[6]	[4]	[3] 10	[7]	10
工場 P2	[1] 18	[5]	[6]	[2] 7	25
工場 P3	[5]	[6] 9	[8] 2	[10] 4	15
需要量	18	9	12	11	50

費用をなるべく抑えようと考えた場合には自然に思いつく方法．この場合の輸送費用合計は

$$18 \times 1 + 9 \times 6 + 10 \times 3 + 8 \times 2 + 7 \times 2 + 4 \times 10 = 172$$

となる．「早稲田」ルールに比べてちょっとややこしいが，費用が劇的に改善されているので，工夫するだけの価値がある．

3.6.2　輸送問題の可能基底解

輸送問題は線形計画問題として定式化できる．制約条件は，工場の供給量制約と需要地の需要量制約からなる．工場の数を m，需要地の数を n とすると，制約条件（非負条件を除く）の数は $m+n$ 本であるが，このうち 1 次独立な制約は $m+n-1$ 本であり（これを確認するためには証明が必要であるがここでは省略)，このため基底解における基底変数の個数は，$m+n-1$ 個

である．つまり，基底解では基底変数に対応して高々 $m+n-1$ 個の輸送路に正の流量を流し，残りの輸送路は非基底変数として流量を 0 に固定する．

表??に示す表形式を使って解を表わした際，「正の流量を流している輸送路のマス（つまり正のマス）を垂直な縦線と水平な横線のみを交互に使ってつなぎ合わせたときに，閉じた回路（閉回路）を作らない」ならば，そのような可能解が可能基底解に対応していることが知られている．

3.6.3 輸送問題における可能（基底）解の最適性の判定と解の改善

初期解の決め方同様，「飛び石」法 (stepping-stonemethod)，ポテンシャル法，別名 MODI(MOdifiedDIstribution) 法を始めとして，いろいろな方法が提案されているが，ここでは直感的に分かりやすい飛び石法について解説する．ポテンシャル法は双対問題とも関係し面白いがここでは省略する．興味ある人は，たとえば，森，森戸他，「オペレーションズリサーチ」，朝倉書店，1991，pp.113-115 を参照のこと．

前述のような性質（基底変数の個数が $n+m-1$ 個）があれば，さらに**使われていない輸送路のどれをとっても，使われていない輸送路と使われている輸送路のいくつかを使って必ず閉回路がただ一つ作れる**という性質を利用して，解を改善するアルゴリズムを作ることが出来る．たとえば，北西隅ルールによって得られた初期可能基底解の場合，ものを送っていない（つまり，非基底の）輸送路である P1 から M3 への輸送路に対して，(P1,M3)-((P2,M3)-(P2,M1)-(P1,M1)-(P1,M3) という閉回路が**一意に**定まる．新たに P1 から M3 に 1 単位輸送しようとすると，需要と供給の総量を変えない（実行可能解を得る）という制約から，(P1,M1),(P2,M3) を 1 単位減らし，(P2,M1) を 1 単位増やす必要がある．費用の増加分は $3+1-6-6=-8$ で，計画を変更した方が費用が少なくなることが分かる．したがって，輸送路 (P1,M3) を出来るだけ使うのがよい，といっても最大 (P2,M3) の現在輸送量 8 までしか輸送することは出来ない．その結果，次のような輸送計画が得られ，費用の改善効果は $8\times 8=64$ なので，この実行解の総費用は $303-64=239$ である．

表　解の改善 (1)

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	$\boxed{6}$ **2**	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ **8**	$\boxed{7}$	10
工場 P2	$\boxed{1}$ **16**	$\boxed{5}$ 9	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	25
工場 P3	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{10}$ 11	15
需要量	18	9	12	11	50

このような手順を繰り返して，実行可能解の費用を改善しながら最適解に到達することが出来る．実際，この手順をさらに繰り返すと，

- (P3,M1) と (P1,M3) を 2 増やし，(P1,M1) と (M3,M3) を 2 減らす．費用の変動は

$(3+5-6-8)\times 2=-12$，従って総費用は $239-12=227$.

表　解の改善 (2)

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ **10**	$\boxed{7}$	10
工場 P2	$\boxed{1}$ 16	$\boxed{5}$ 9	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	25
工場 P3	$\boxed{5}$ **2**	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$ **2**	$\boxed{10}$ 11	15
需要量	18	9	12	11	50

- 次に，(P2,M4) と (P3,M1) を 11 増やし，(P2,M1),(P3,M4) を 11 減らす．費用の変動は $(2+5-10-1)\times 11=-44$，従って総費用は $227-44=183$.

表　解の改善 (3)

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{7}$	10
工場 P2	$\boxed{1}$ **5**	$\boxed{5}$ 9	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ **11**	25
工場 P3	$\boxed{5}$ **13**	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$ 2	$\boxed{10}$	15
需要量	18	9	12	11	50

- 次に，(P3,M2) と (P2,M1) を 9 増やし，(P2,M1),(P3,M4) を 9 減らす．費用の変動は $(6+1-5-5)\times 9=-27$，従って総費用は $183-27=156$.

表　解の改善 (4)

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{7}$	10
工場 P2	$\boxed{1}$ **14**	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 11	25
工場 P3	$\boxed{5}$ **4**	$\boxed{6}$ **9**	$\boxed{8}$ 2	$\boxed{10}$	15
需要量	18	9	12	11	50

こうして，すべての，使っていないマス（非基底変数に対応）に対して，費用の改善が期待できなければ，すなわち，限界コスト（＝被約費用），すなわち，当該非基底変数に対する目的関数値の変化率が非負ならば，改善の余地がなくなったことになり，現在の可能基底解が最適解となる．なお，最適目的関数値は表には現れないので，このように，改善量をその都度計算して求めておく必要がある．

今の計算では，閉回路として単純なものしか扱わなかったが，使われていない輸送路をただ一

つだけ含む回路，というだけの制約なので，たとえば，次のようなものも閉路として考えて良い．

表　複雑な閉路の例

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	(6) 10	(4)	(3)	(7)	10
工場 P2	(1) 8	(5) 9	(6) 8	(2)	25
工場 P3	(5)	(6)	(8) 4	(10) 11	15
需要量	18	9	12	11	50

費用の増減，（もしその輸送路を使うならば）輸送量の上限の計算は，上の例と同じようにすればよい．この例では，仮に (P1,M4) を増やそうとすると，(P1,M1) を減らし，(P2,M1) を増やし，(P2,M3) を減らし，(P3,M3) を増やし，(P3,M4) を減らして縦横の帳尻をあわせることができる．そのときの費用の増加分は

$$7-6+1-6+8-10=-6$$

と計算できる．したがって，(P1,M4) を 1 単位増やせば費用は 6 ずつ減るので，その輸送路を使うのが徳ということが分かる．費用をできるだけ減らしたいが，流量が減るマスの流量が負になっては困る．このことから，(P1,M4) は 8 までしか送ることができない．

非基底マスの選択の基準は，単体法における軸の列の選択と変わらないので，限界コストが負のものを選択していればよい．単体法では，限界コストが最良の改善を示す列を軸の列とすることが多いが，輸送問題の場合，掃き出し演算に相当する解の改善操作の手間が比較的簡単なので，改善の可能性がある非基底マスが見つかったら，ただちに解を改善するという方法をとることも少なくない．いずれにしても，このような操作を繰り返すことによって限界コストが負の非基底マスがなくなった時点で最適解が得られる．

以上の説明では，北西隅法で初期解を求めたが，ハウザッカー法を用いると目的関数値 172 の解が最初に求まるので，最適解（この問題の最適値は 156 である）がより早く求められる．

練習 3.4 解の改善 (4) で，非基底マスの限界費用（費用の削減量）を計算して，これが最適解であることを確認しなさい．

解答：

P1-M1: ____________________

P1-M2: ____________________

P1-M4: ____________________

P2-M2: ____________________

P2-M3: ____________________

P3-M4: ____________________

練習 3.5 初期解をハウザッカー法で求めた場合に，この方法を適用して，解を改善し（1回だけ）その結果に対して，非基底マスの限界コストを計算しなさい．

解答：

初期解：

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	10
工場 P2	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	25
工場 P3	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	15
需要量	18	9	12	11	50

解の改善：

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	10
工場 P2	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	25
工場 P3	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	15
需要量	18	9	12	11	50

非基底マスの限界コスト：

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	供給量
工場 P1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	10
工場 P2	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	25
工場 P3	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	15
需要量	18	9	12	11	50

3.6.4 需要量の合計が供給量の合計と一致しない場合

需要量の合計と供給量の合計とが一致しない場合は，需要量と供給量の差に対応する需要量や供給量を持つダミーの工場やダミーの需要地を作ればよい．具体的には，「需要量の合計＞供給量の合計」となって供給不足の場合には，「需要量の合計－供給量の合計（＝不足量）」を供給量とするダミーの工場を設け，ダミーの工場と需要地の輸送単価を 0 として需給が一致した輸送問題に直して解けばよい．この場合，ダミーの工場からの供給量は，需要地での不足分に対応する．

「需要量の合計＜供給量の合計」，すなわち，供給過剰となる場合も同様にダミーの需要地を設け，工場からダミーの需要地への輸送単価は 0 として解けばよい．ダミー需要地への輸送は工場に残すものと考えればよい．

3.6.5 ソルバーによる解

理屈はどうでも，とにかく解を求めたい，という人にはソルバーがある．96 ページの定式化をそのままシートに表現すればよい．$\sum c_{ij}x_{ij}$ という計算も SUMPRODUCT という関数を使って計算させることが出来る．例題 3.1 をソルバーで解くと，当然のことながら，上で求めた最適解が得られ，目的関数の値が 156 となる．

ソルバーで解くことのメリットは，言うまでもなく，感度レポートが手にはいることである．実際に計算して感度レポートを見てみると，この最適解は，かなり安定している，つまり，費用の増減が ±2 程度ならば，計画を変える必要が無い，ということが言える．

練習 3.6 例題 3.1 をソルバーを使って解きなさい．工場 $P2$ から需要地 $M3$ への輸送費用が 6 から 4.1 にディスカウントされた場合の最適解を計算しなさい．同様に，3.9 にディスカウントされた場合についても計算しなさい．

解答：

4.1 の場合：

3.9 の場合：

3.7 施設配置問題

生産地と需要地との間の輸送ではなく，配送センターのような集荷地と需要地の間の輸送問題で，集荷地（倉庫）を借りて済ます場合は，どの倉庫を借りるか，という問題が新たに生じる．

例題 3.3 関東地方を中心に営業を行ってきた輸入品販売業のK社では，関西地方に活動を拡大するため，京阪神地方に倉庫の賃借を行う計画を立てている．賃借の候補となる倉庫は 5 箇所にあって，各倉庫の月間処理能力（供給能力）とその経費（賃借料や維持費など毎月の固定費）は次の表のように与えられている．また，関西一円に広がる 5 箇所の消費地での輸入品の需要量（トン／月）と，各倉庫から各需要地へのトン当たり輸送費（千円）も，次の表のように与えられたいる．このとき，すべての需要を満たし，毎月の総費用（輸送費＋倉庫経費）を最小にする倉庫配置と輸送計画を求めよ．

輸送単価 c_{ij}	需要地 1	需要地 2	需要地 3	需要地 4	需要地 5	供給能力 a_i	固定費 d_i
倉庫 1	4	9	5	10	5	120	120
倉庫 2	7	10	3	4	12	110	110
倉庫 3	10	11	4	6	2	80	80
倉庫 4	9	5	13	5	10	60	60
倉庫 5	4	6	12	9	3	60	60
需要 b_j	25	30	40	40	50	-	-

需要量は全部で 185 しかないので，倉庫 1 と 2 で十分，しかし，固定費も高く，場所によっては輸送費がかさむ．供給量の総和が 185 を超えるすべての組合せに対して費用を計算し，その中の最小費用となる計画を選べばよい．

組合せをリストアップすることなく，利用しない倉庫を自動的に除外して計算する方法がある．倉庫 i を借りる場合は 1，さもなければ 0 とするような変数を y_i とすると，

$$120y_1 + 110y_2 + 80y_3 + 60y_4 + 60y_5$$

は供給能力の総計になる．倉庫 i から需要地 j での輸送量を x_{ij} とすれば，y_i と共に，線形計画法の定式化が出来るであろう．

練習 3.7 上の例題を解きなさい.

解答：

借りる倉庫の番号＝ ____________________ **, 総費用＝** __________

練習 3.8 一般に，倉庫 $W_i(i = 1, \cdots, m)$ の月間処理能力を a_i，固定費を d_i，消費地 $D_j(j = 1, \cdots, n)$ の需要量を b_j，W_i から D_j への輸送費を c_{ij} として，最小費用を求める問題を数理計画問題として定式化しなさい.

解答：

練習 3.9（乗捨てレンタカーの回送）R 社は北海道の函館室蘭千歳小樽札幌旭川帯広に営業所を構え 50 台の車で観光客相手にレンタカー事業を営んでいます週末に車を借り出した客の多くが最終旅行地近くの営業所に車を乗り捨てていくため週明けの車の配置が週末の需要と著しく異なりますこのため毎週週の半ばに週末の需要に合わせて社員が手分けして車を 1 台ずつ回送しなければなりません R 社の社長は常々回送にかかる手間や時間それに費用をもっと節約できないものかと考えています下の表はある週の各営業所における週明けの配置と週末の需要 (台数) ですまた各地点間の (最短) 距離 (km) が表に与えられていますどうしたら適切な回送計画が立てられるでしょうか?

レンタカーの週明けの配置と週末の需要

	函館	室蘭	千歳	小樽	札幌	旭川	帯広
週明けの配置	10	1	25	2	6	2	4
週末の需要	4	4	13	3	15	8	2

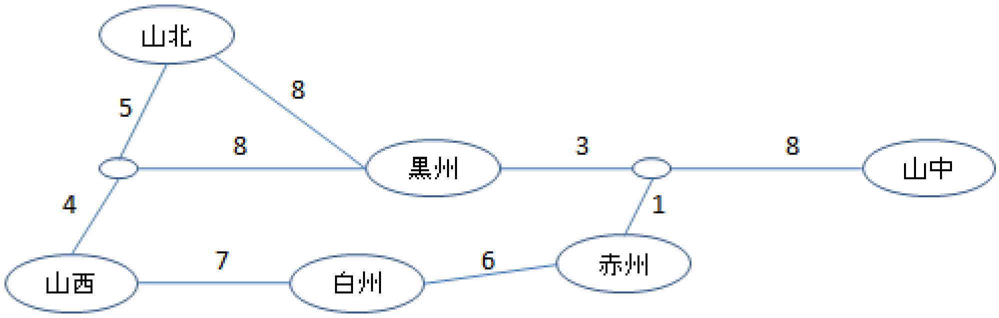
各営業所間の（最短）距離（km）

	函館	室蘭	千歳	小樽	札幌	旭川	帯広
函館	0	191	278	273	309	447	600
室蘭		0	87	161	125	263	416
千歳			0	74	38	176	329
小樽				0	38	174	327
札幌					0	138	291
旭川						0	179
帯広							0

（**ヒント**）ハウザッカー法に従うと週末の需要と週明けの台数の内の小さい方を問題から消去しても良さそう.

解答：

練習 3.10 次の問題を数理計画問題として定式化し，解きなさい．山上機械工場では，自動車部品を山北，山西，山中にある工場から，川下自動車工業の黒州，白州，赤州の各倉庫に納入している．各工場の生産量は山北では 250 単位，山西は 150 単位，山中は 100 単位である．また，需要は黒州では 200 単位，白州では 120 単位，赤州は 180 単位である．工場倉庫間の輸送経路と 1 単位当たりの輸送費は図に示すとおりである．この状況において，山上機械工業がすべての輸送費を負担するものとして，同社の総輸送費を最小にする輸送計画を求めなさい．



解答：

練習 3.11 食品製造 T 社では，全国に点在する 3 箇所の営業所（以下デポ）で発生する 4 種類の製品に対する需要を，全国 3 箇所の工場にそれぞれ 3 台ずつ（計 9 台）の機械で生産し，配送している．工場での生産は，定時生産（朝 9 時から夕方 5 時まで）と残業生産（それ以外）とに大別できる．工場からデポへの製品 1 単位当たりの輸送費，各デポの 4 種類の製品に対する需要，各機械の定時製造能力は既知であり，以下に示す表 1 －表 3 の通りである．なお，輸送単価は品種によって変わらず，輸送量に比例する．定時製造能力とは，朝 9 時から，夕方 5 時までに生産できる量であり，それ以外の時間に製造する場合は，残業費を払わなければならない．残業で製造できる量は，工場 1 と工場 2 については各機械の定時製造能力の 30 %を上限とし，工場 3（の機械）では残業はできないものとする．残業にあたっては，製品 1 個あたり 6yen の残業費がかかる．T 社は，輸送費と残業費での合計をなるべく少なくしたい（定時労働に対する人件費については，固定の給料を支払っているので，考慮しなくてよい）と考えている．どの機械にどの品種をどれだけ製造させれば，費用を最小にできるか．この問題を数理計画問題として定式化した

上で解きなさい.（2003 年度森戸研 4 年森田祐介作）

表１　各デポの品種ごとの需要（単位　個）

需要地	品種 1	品種 2	品種 3	品種 4
デポ 1	300	100	450	200
デポ 2	400	20	300	300
デポ 3	100	150	550	600

表２　工場−デポ間の輸送単価（単位　yen）

	デポ 1	デポ 2	デポ 3
工場 1	9	6	13
工場 2	7	13	6
工場 3	12	14	13

表３　各機械の提示生産能力（単位　個）

工場番号	機械：定時製造能力	
工場 1	機械 1	300
	機械 2	400
	機械 3	500
工場 2	機械 4	350
	機械 5	250
	機械 6	400
工場 3	機械 7	500
	機械 8	450
	機械 9	400

残業の場合は最大 30%，ただし工場 3 は残業不可

（**ヒント**）データがたくさん示されているが，問題を整理して冷静に考えてみると...

解答：

参考文献

1) 今野浩：線形計画法，日科技連出版社 (1987).
2) 伊理正夫：線形計画法，共立出版 (1986).
3) 刀根薫：数理計画，朝倉書店 (2007).
4) 伊理正夫，韓太舜，線形代数 (1977).

4　整数計画法

4.1　はじめに

数理計画問題として定式化することができる最適化問題の中で，決定変数が整数値しか取らないとか，あれかこれかを選択する，というように，連続変数では扱えないタイプの問題がある．それらは（混合）整数計画問題と呼ばれ，今までの線形計画法とは別の扱いが必要になる．ここでは変数に 0-1 条件や整数条件がついた典型的な整数計画モデルを解説する．

分析対象の問題を数理計画モデルとして定式化しようとするときに変数に整数条件や 0-1 条件をつけたいという状況がしばしば発生する．整数変数を導入しなければならない理由を考えると，大きく分けて以下の 3 つのタイプに分けられる．

分割不可能な離散量：Indivisible (Discrete) Quantities

本来，整数しかとりえない量，例えば，人数，機械台数，配送車台数，会社数などをモデルの変数として扱う場合にごく自然に整数条件をつけることになる．ただし，一般に整数条件がついた問題は，整数条件のつかない線形計画問題と比べてかなり解きにくくなるので，本来は離散量であるが連続量と扱っても大きな誤差を生じないと考えられる場合は通常の線形計画問題として扱った方がよい．

選択変数：Decision Variables

複数の代替案の中からどの案を選択するかを示すために使われるのが選択変数である．この種の例は枚挙にいとまなく，ある地点に倉庫をたてる／たてない，あるスケジュールを選択する／しない，ある株を買う／買わない，ある候補者を採用する／しないなど，身の回りにいくらでも例が存在する．多くの場合は，選択するかしないかに応じて 1 または 0 をとる 0-1 変数 (binary variable) を用いるが，倉庫を建てないとき $\gamma = 0$, タイプ 1 の倉庫を建てるとき $\gamma = 1$, タイプ 2 の倉庫を建てるとき $\gamma = 2$ というように自然数を対応させる場合もある．

インディケータ変数：Indicator Variables

現実の問題では，「もし $\cdots$ ならば $\cdots$」という条件が存在することが少なくない．数理計画では，線形の等式・不等式と，非負実数変数や非負整数変数あるいは 0-1 変数を使って問題を定式化しなければならないが，以下に述べるように「もし $\cdots$ ならば $\cdots$」という形の論理条件を数式で表現するためには 0-1 変数を導入する必要が生じる．論理条件を表すために導入する変数はインディケータ変数と呼ばれる．

以下では，1 番目のタイプの整数変数が登場する問題のシナリオを紹介することから始め，次の節で選択変数を用いる典型的な問題のシナリオを紹介する．

4.2 分割不可能な離散量を変数とする問題例

例題 4.1 （勤務シフトスケジューリング）西北郵便局では，各勤務シフトに対して郵便物を仕分けする作業者を何名張りつけるかを決めなければならない．この局では，月曜から金曜まで勤務し土日を休日とするシフト，火曜から土曜まで勤務し日月を休日とするシフト, . . . ，日曜から木曜まで勤務し金土を休日とするシフトがあり，それぞれに何人の作業者を張りつけるかを決めたいと考えている．一方，郵便物の週間変動を考慮して，各曜日に最低限必要な作業者数が過去のデータから分かっている

月	火	水	木	金	土	日
17 名	13 名	15 名	19 名	16 名	11 名	7 名

割り当てる総人数を最小にし，少なくとも必要最低限の人数を確保するためには各シフトに何名を割り当てればよいかを求めたい.

この問題を，モデル化のステップ（変数の定義，目的関数の定義，制約条件の定義）に従って解く.「各シフトに何名」という問題なので，変数は各シフトの人数を取ればよい．i 曜日から始まるシフトに割り付ける人数を $x_i(i = 1, 2, ..., 7)$ とする．ただし，$i = 1$ は月曜日を表すことにする．シフト i に割り当てる人数は，当然のことながら分割不可能な離散量であるため，整数変数となる．目的関数は人数の最小化なので「$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 \to$ 最小」．制約条件は各曜日ごとに働いている人数が必要な作業者以上ある，ということになる．例えば，月曜日に働いている人はシフト $1, 4, 5, 6, 7$ の人なので $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ 人いて，それが制約条件の 17 以上いなければいけない．従って $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$ という制約不等式が得られる．結局，次のような定式化になるだろう．

$$
\begin{array}{lllcl}
\text{最小化} & z = & x_1 + x_2 + \cdots + x_7 & & \\
\text{制約} & & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq & 17 \\
 & & x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq & 13 \\
 & & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 & \geq & 15 \\
 & & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 & \geq & 19 \\
 & & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \geq & 16 \\
 & & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \geq & 11 \\
 & & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq & 7 \\
 & & x_1, x_2, ..., x_7 & \in & \{0, 1, 2, ...\}
\end{array}
$$

ソルバーで整数条件を入力する方法

これを Excel ソルバーを使って解くには，変数が整数でなければいけないという制約を入力する必要がある．それには「制約条件の追加」ウィンドウで,「セル参照」に指定する変数を，不等号を選ぶメニューの中から「int」を選ぶ．そうすると,「制約条件」の欄に「整数」と表示されるので,「OK」ボタンをクリックする．あとは今までのやり方と同じ.

練習 4.1 上の問題を Excel ソルバーで解きなさい.

ヒント：A を，その要素がすべて 0 か 1 の 7×7 の行列とすると，制約式が $Ax \geq b$ のように書ける．

解答：

例題 4.2 （カッティングストック問題） 多ヶ谷金属では，一定幅，長さ 1m=100cm の貴金属の板を顧客の要求する長さに切って加工した上で製品として出荷している．ある日の顧客からの要求（以下，「需要」）は，

45cm の長さの板	97 枚
36cm の長さの板	610 枚
31cm の長さの板	395 枚
14cm の長さの板	211 枚

であった．原料は高価な貴金属であるので，なるべく無駄を少なくするよう努力したい．板をどのように切ることによって，顧客の需要を，最低限の材料，すなわち最低限の板の枚数で満足させることができるか．

100cm の板を各要求の長さに切り分けることを板取りという．今の問題で，要求を満たすような板取りの仕方としては，たとえば，$45 \times 2, 45 + 36 + 14, 31 + 14 \times 4, \ldots$ など，幾種類かあるが，それらを組み合わせて，最小の板から，所要の枚数を作ろうというのである．どういう板取りを何枚ずつ作ればよいのか，というのが問題である．このような問題は組合せ最適化問題と呼ばれる．この種の問題は，製造業の様々な分野，たとえば，鉄鋼業，フィルム等の製造，製紙業，製材業などで「板取り問題」あるいは「**カッティングストック問題**」と呼ばれており，OR の代表的な問題の一つである．この例のように 1 次元，すなわち，長さだけを考慮した問題のほかにも，2 次元，3 次元の問題が考えられる．

決定すべき変数は各板取りの枚数で，分割不可能な離散量であるため，整数変数となる．板取り方法は 8 種類があり，それを表にまとめると次のようになる．

	1 型	2 型	3 型	4 型	5 型	6 型	7 型	8 型
45cm	2	1	1	0	0	0	0	0
36cm	0	1	0	2	1	0	0	0
31cm	0	0	1	0	1	2	1	0
14cm	0	1	1	2	2	2	4	7

１型は 45cm を 2 枚切り出す，4 型は 36cm と 14cm をそれぞれ 2 枚ずつ切り出す，というように読む．x_i を i 型の板取りの何枚とすれば，それが決定すべき変数になる（$i = 1, 2, ..., 8$).

目的関数は x_i の総和の最小化．制約条件は，それぞれの長さの板が指定の枚数以上，ということになるので，例えば，45cm の板については

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 97$$

と書くことが出来る．結局，次のような定式化となる．

$$\begin{array}{lrcl}
\text{最小化} & z = x_1 + x_2 + \cdots + x_7 & & \\
\text{制約} & 2x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 97 \\
 & 2x_2 + 2x_4 + x_5 & \geq & 610 \\
 & x_3 + x_5 + 2x_6 + x_7 & \geq & 395 \\
 & x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 7x_8 & \geq & 211 \\
 & x_1, x_2, ..., x_8 & \in & \{0, 1, 2, ...\}
\end{array}$$

練習 4.2 上の問題を Excel ソルバーを使って解きなさい．

ヒント：各制約式の左辺の係数を板取りパターンを列挙した表と見比べなさい

解答：

4.3 整数計画の定型モデル ： シナリオの提示

オペレーションズリサーチのモデル分析では，現実を抽象化して，枝葉を切り落とし，対象とするシステムの本質部分を抽出してモデルを構築する．現実を抽象化するために，人々が苦労して問題解決にあたった結果，たどりついた基本構造が共通であったということが少なくない．こうした共通の構造は，一種の「公約数」であり，問題の構造を解明するという意味でも，問題を解くという意味でもきわめて重要である．よく現われる共通構造にはどのようなものがあるかをあらかじめ知っておくことは，問題の構造やその解決に早くたどりつくにあたってプラスに作用することが少なくない（=「モデルは皆の公約数」）．

基本的な問題構造として知られているものは数が多い訳ではないので，それらを頭に入れておき，そうした基本的問題構造，枠組みを通して問題を眺めてみると視界が開けるということもある．ここでは，まず整数計画問題としてしばしば現れる，いわば「定番」モデルに帰着する問題のシナリオを（集合被覆／分割問題を中心に）提示する．「問題の基本構造は単純かもしれないけれども，それが容易に見えない」ということが少なくない．イメージがわきやすいように，多くのシナリオには規模の小さな数値データを示してあるが，読者は具体的な数値にとらわれずできるだけ記号を用いた一般的な定式化を考えてもらいたい．

シナリオ 1．プロジェクト選択問題

IMSE 事業部では，総予算 b の範囲内で，複数のプロジェクトの中から，総利益を最大にするような組合せを求めたいと考えている．プロジェクトは n 種類あり，プロジェクト j を選択したときに必要な費用は $a_j(j=1,\cdots,n)$，得られる利益は $c_j(j=1,\cdots,n)$ であることが分かっている．

あるいは，入れ物（例えばナップザック）と，容積と利益が分かっているいくつかのモノが与えられたとき，ナップザックに収まり，かつその利益が最大になるようなモノの組合せを求めたい，という問題も，プロジェクトの予算配分と同じタイプの問題である．ということから，この種の問題はナップザック問題と呼ばれる．

例題 4.3 たとえば，プロジェクト数が $n=4$，予算は $b=7$（百万円）a_j, c_j は次の表のように与えられている場合，最適な割り当てはどうなるか．

プロジェクト番号	j	1	2	3	4
得られる利益（百万円）	c_j	16	19	23	28
必要な費用（百万円）	a_j	2	3	4	5

この問題はプロジェクト j に予算を割り当てるかどうか，全部で 2^4 通りの政策の中から利益が最大になるものを選ぶという問題である．割り当てられたプロジェクトからもたらされる利益を表すために，プロジェクト j に予算を割り当てる場合は 1，さもなければ 0 とする変数 x_j を使うという方法が考えられる．そこでこの問題の決定すべき変数は x_1, x_2, x_3, x_4 という 4 つの 0-1 変数で，目的関数は $16x_1+19x_2+23x_3+28x_4$ でその最大化が目標，制約条件は $2x_1+3x_2+4x_3+5x_4$ が予算以下，というものである．結局次のような定式化が得られる．

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{最大化} & z = 16x_1 + 19x_2 + 23x_3 + 28x_4 & & \\
\text{制約} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & \leq & 7 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \in & \{0, 1\}
\end{array}
$$

ソルバーで 0-1 条件を入力する方法

Excel のソルバーで変数が 0 か 1 の値しか取らない，という制約は「制約条件」を設定するウィンドウで，左辺に変数を入力し，不等号の記号を選ぶところで（「int」の次にある）「bin」を選ぶと，右辺に「バイナリ」と表示されて，左辺の変数の値が 0 または 1 であるという制約になる．そうやって解くと，プロジェクト 1, 4 に投資して 44 の利益を得る，というのが最適ということが求められる．これくらいならば，暗算でも出来るので，Excel が正しい結果を出していることが確認できる．

なお，この状況をもう少し複雑にした問題が動的計画法の章（下巻参照）で論じられている．この問題も動的計画法を使って解くことが出来る．$f_n(m)$ を n 個のプロジェクトに m の予算を割り振る場合の最大利益を表す関数とすると，

$$f_n(m) = \max\{f_{n-1}(m), f_{n-1}(m - a_n) + c_n\}$$

という漸化式が得られる．ただし，a_n, c_n はそれぞれ，n 番目に検討するプロジェクトの費用と価値を表す．そうすると，$f_1(1) = 0, f_1(m) = 16 (m \geq 2)$，$f_2(1) = 0, f_2(2) = 16, f_2(3) = 19, \ldots$ のように，順番に解いて行くことが出来る．

練習 4.3 上の問題を Excel ソルバーを使って解きなさい．

解答：

採用するプロジェクト番号＝ ________________ **総利益＝** ________

練習 4.4 上の問題を動的計画法の問題として定式化し，それを解きなさい．ソルバーで解いた結果と比較しなさい．

シナリオ 2．巡回セールスマン問題

多忙を極めるセールスマン風間は，自社を出発し，今日回るべき n 箇所の訪問先をちょうど一回ずつ立ち寄って最短時間で自社へ戻るルートを見つけようとしている．訪問先 i から j への所要時間 c_{ij} は既知である．このタイプの問題は巡回セールスマン問題として知られている．

例題 4.4 たとえば，$n = 5$ で c_{ij} が次の表のように与えられている．このとき，訪問先 1 から出発し，他の 4 つの訪問先を順番に 1 回ずつ訪問して，最後に訪問先 1 に戻る巡回路で最短のものを見付けよ．（単位：時間）

	訪問先 1	訪問先 2	訪問先 3	訪問先 4	訪問先 5
訪問先 1		3.5	3.0	4.1	4.5
訪問先 2	4.0		0.8	2.2	1.5
訪問先 3	4.0	1.2		0.8	1.0
訪問先 4	4.7	2.5	1.0		1.0
訪問先 5	5.0	1.7	1.4	2.0	

決定すべきはルートなので，ルートを変数にするというのが自然．しかし，ルートを数え上げるのは結構面倒．そこで，簡単に定義できる変数から始めて，ルートをその変数で構成する，と考える．ある訪問先 i から別の訪問先 j へ移動するかどうかを表す変数として，移動するならば 1，そうでなければ 0 という変数 x_{ij} を考える．この問題の定式化についての詳しい解説は，節を改めて述べる．

シナリオ 3．仕事の機械割り当て

仕事が n 個と機械が m 台ある．仕事 $j(j = 1, \cdots, n)$ を機械 $i(i = 1, \cdots, m)$ で処理したときの費用 c_{ij} と処理時間 t_{ij} が既知であるとする．各仕事は，いずれかの機械で 1 度だけ処理されるものとする．仕事の処理に費やすことのできる処理時間の合計は，機械ごとに決められた総処理時間の上限 b_i を越えてはならない．機械ごとの総処理時間の制約の中で，総費用を最小にする仕事の機械への割り当てを求めたい．このようなタイプの問題は一般化割当問題と呼ばれる．

例題 4.5 たとえば，$n = 7, m = 3$ で，c_{ij}, t_{ij}, b_i が次の表のように与えられているとき，最適解はどうなるか

c_{ij}	仕事 1	仕事 2	仕事 3	仕事 4	仕事 5	仕事 6	仕事 7
機械 1	30	22	27	21	50	70	28
機械 2	18	14	16	12	20	45	15
機械 3	25	17	20	23	33	80	24

t_{ij}	仕事 1	仕事 2	仕事 3	仕事 4	仕事 5	仕事 6	仕事 7	上限 b_i
機械 1	2	2	1	1	3	2	1	12
機械 2	2	2	1	3	5	2	2	10
機械 3	1	3	2	2	4	1	1	7

費用の一覧表から，機械 $\times$ 仕事のマッチングが取れたところだけを取り出して総和を計算すると，それが目的関数になる．必要な数値だけ取り出すためには，仕事 i を機械 j で処理すると

き 1，そうでなければ 0 という決定変数 x_{ij} を用いれば良い．例えば次のようになる

	仕事 1	仕事 2	仕事 3	仕事 4	仕事 5	仕事 6	仕事 7
機械 1	1	0	0	0	0	0	0
機械 2	0	1	1	1	0	1	1
機械 3	0	0	0	0	1	0	0

一つの仕事は一つの機械によってなされるので，このように列和が 1 になる．この行列と費用の行列を要素ごとに掛けたて和を取ったものが費用の合計，処理時間の行列と要素ごとに掛けたもののある行の行和はその機械の使用時間を表す．したがって，目的関数，制約式は次のようになる．

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{最小化} \quad z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{7} c_{ij}x_{ij} & & \\
\text{制約} & \displaystyle\sum_{j=1}^{7} t_{ij}x_{ij} & \leq & b_i \quad (i = 1, 2, 3) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_{ij} & = & 1 \quad (j = 1, 2, ..., 7) \\
& x_{ij} & \in & \{0, 1\}
\end{array}
$$

変数の数は全部で $nm = 21$ 個もあり，手では計算する気になれないが，Excel のソルバーならば，データ入力を間違えなければ簡単に計算することが出来る．最終的に得られる最適解は，仕事 1 を機械 1，仕事 5 を機械 3 それ以外の仕事は機械 2 に割り当てるというのが最適になる．機械 1 は 2 単位時間，機械 3 は 4 単位時間しか働かないが，それは単位時間あたりのコスト c_{ij}/t_{ij} を計算してみると，ある程度納得の行く結果になっていることが分かるだろう．

練習 4.5 上の問題を Excel ソルバーを使って解きなさい．

解答：

	仕事 1	仕事 2	仕事 3	仕事 4	仕事 5	仕事 6	仕事 7
機械番号							

総費用＝ ________________

シナリオ 4．速達配達ルート

東西郵便局では，軽トラックで小包の配達を行っている．今日は，m 軒の配送先に荷物を届けなければならない．軽トラックで回る n 本の配送ルート候補，$S_j(j = 1, \cdots, n)$ は既に与えられており，配送ルート j が i 軒目の配送先に立ち寄るとき 1，そうでなければ 0 という係数 a_{ij} が与えられている．また，それぞれのルートを採用したときの配送コストは c_j であることが分かっている．すべての配送先に最低 1 回立ち寄り，かつ，総コストが最小となる配送ルートの組合せを求めたい．

S_j はいずれも $M = \{1, 2, ..., m\}$ の部分集合である．求めたいのは，$\{S_j\}$ の中からいくつかを選んで，その和集合が M になるようにすることである．その意味で，このタイプの問題は**集合被覆問題**と呼ばれる．

練習 4.6 たとえば，$m = 6, n = 8$ として，a_{ij} が次のように与えられているとき，最適な組み合わせを求めるために数理計画問題として定式化したものを書き，ソルバーを使って最適解，最適値を求めなさい．

配送ルート	1	2	3	4	5	6	7	8
費用	990	300	240	500	180	480	350	290
1 軒目	○	○	○	○				
2 軒目			○			○		
3 軒目	○			○	○			
4 軒目	○				○	○		○
5 軒目	○	○					○	
6 軒目	○					○	○	○

（**ヒント**）ルート j を選択するとき 1，そうでなければ 0 という決定変数 x_j を使うと，例題 4.1 と同じ．

解答：

選択する配送ルート番号＝ ____________________ **総コスト**＝ ____________

シナリオ 5．子会社の再編成

オハイオ州に本社がある Moritz 社は，過去のある事情から，会社組織全体を法的には（形式的に）独立の m 個の「子会社」（たとえば，地理的に，東海岸 M 社，中西部 M 社，西海岸 M 社，...のように）に分社化している．ところが税制が変更され，このような形に分社しておくことが好ましくない状況になった．全部で m 個ある子会社を任意に組み合わせて任意の会社を自由に作ることが可能であり，また，組み合わせ j の税額 c_j が算定できるとしたときに，税額を最小とする会社の組合せプランを考えたい．ただし，現存する子会社は子会社単位で新会社に移行しなければならず，子会社の細分は許されないものとし，また，すべての子会社は新しく構成される新会社のいずれか 1 つに所属するものとする．

練習 4.7 たとえば，$m = 4$ として，c_j が次の表のように与えられている場合に，最適な組み合わせのプランを決定するために数理計画問題として定式化したものを書き，ソルバーを使って最

適解を求めなさい.

組合せ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
税　額	5	6	7	8	10	12	14	11	14	17	20	20	20	20	30
子会社 1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
子会社 2	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
子会社 3	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
子会社 4	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

（**ヒント**）子会社の組み合わせ j を採用するとき 1，そうでなければ 0 という決定変数 x_j を使う．たとえば，子会社 1 と 3，2 と 4 を併合して二つの会社を作るならば，組合せ 6 と 9 が採用され，$x_6 = x_9 = 1$ で，それ以外の x_i は 0 となるようにすればよい.

解答：

最適な組合せ＝ ______________________ **税総額**＝ __________

シナリオ 6．施設配置問題（10.7 の再掲）

関東地方を中心に営業を行ってきた輸入品販売業のＫ社では，関西地方に活動を拡大するため，京阪神地方に倉庫の賃借を行う計画を立てている．賃借の候補となる倉庫は m カ所にあって，第 i 地点の倉庫 $W_i (i = 1, \cdots, m)$ の月間処理能力は a_i（トン／月）であり，その経費（賃借料や維持費など毎月の固定費）は d_i（千円／月）である．また，関西一円に広がる消費地 $D_j (j = 1, \cdots, n)$ での輸入品の需要量 b_j（トン／月）と，W_i から D_j へのトン当たり輸送費 c_{ij}（千円）が与えられたとして，すべての需要を満たし，毎月の総費用（輸送費＋倉庫経費）を最小にする倉庫配置と輸送計画を求めたい.

練習 4.8 たとえば，$m = 5, n = 5$ として，c_{ij}, a_i, d_i, b_j が次の表のように与えられている場合に，最適な倉庫配置と輸送計画を決定するために数理計画問題として定式化したものを書き，ソルバーを使って最適解を求めなさい.

単価 c_{ij}	需要地 1	需要地 2	需要地 3	需要地 4	需要地 5	供給 a_i	固定費 d_i
倉庫 1	4	9	5	10	5	120	120
倉庫 2	7	10	3	4	12	110	110
倉庫 3	10	11	4	6	2	80	80
倉庫 4	9	5	13	5	10	60	60
倉庫 5	4	6	12	9	3	60	60
需要 b_j	25	30	40	40	50	-	-

（**ヒント**）倉庫 i から需要地 j へ輸送する量を x_{ij}，倉庫 i を配置する場合は 1，そうでなければ 0 という決定変数 y_i を使う．そうすると，倉庫 i の供給量は $a_i y_i$ となり，$y_i = 0$ ならば，必然的に $x_{ij} = 0$ とならざるをえない.

解答：

借りる倉庫の番号＝ ____________________________ ，**総費用＝** ____________

シナリオ 7．ロットサイズ決定問題

吉本工業では高価な製品 P を生産している．むこう T 期（ヶ月）の需要量 $d_t (t = 1, \cdots, T)$ は，過去の経緯から推定値がほぼ実績値として実現することが分かっている．

製品 P の生産スピードは極めて速く，いったん生産を開始すれば，数日で数期分の需要量に見合う生産量を生産することが可能である．しかしながら，この製品の生産に要する工程の段取りにはかなりの手間と費用がかかり，また，製品の性格から在庫維持費用（在庫相当額に対する金利を含む）も無視できないという．

生産管理担当者が調べたところによると，1 回の生産当たりの段取費（固定費）は生産量や前月に生産したか否かに関係なく a（万円），1 台の製品を 1 ヶ月寝かしておくことによる在庫維持費用（保管費）は h（万円）である．

1 台の製品製造費（変動費）は製造時期によって変動し，t 期の製造単価は v_t（万円）となる．段取り費用があるので，安いときになるべくまとめて一挙に生産したいが，保管費がかかるので，それとのバランスも考慮しなければいけない．

また，0 期における製品の在庫は 0 であり，T 期末の在庫が 0 になるように計画すればよいという．なお，顧客の信用を考え，品切れを絶対起こさないように計画したい．

吉本工業では，1 期ごとの各製品の生産量を決定している．当面製品 P 以外の製品を同時に考慮する必要がないものと仮定して，むこう T 期の製品 P に関する費用を最小にする生産計画を作成したい．

この種の問題は生産計画の核をなすもので，ロットサイズ決定問題と呼ばれる．この問題の定式化は節を改めて説明する．

シナリオ 8．ハブ局配置問題

USSR Postal Service では，全国に点在する n 局の主要郵便局をさらに上から統括するハブ郵便局を定め，ここを物流拠点とした郵便の輸送ネットワークを検討している．ハブとして選択される局は主要局のいずれかであるが，ハブにならない主要局からハブ局までの距離は，一定距離を越えてはならない．主要局 i と主要局 j が一定距離以内ならば 1，そうでなければ 0 という係数 a_{ij} が与えられている．このとき，ハブ局数が最小になるようなハブ局の選択を求めたい．

練習 4.9 たとえば，$m = 8$ として，$a_{ij} = 1$ となるデータが次の表のように与えられている場合に，最適なハブ局を選択する問題を整数計画問題として定式化したものを書き，ソルバーを使っ

てそれを解きなさい．

Atlanta(AT):	CH,HO,NY
Boston(BO):	NY
Chicago(CH):	AT,NY
Houston(HO):	AT
Los Angeles(LA):	SF
New York(NY):	AT,BO,CH
San Francisco(SF):	LA,SE
Seattle(SE):	SF

（**ヒント**）主要局 j をハブ局にするとき 1，そうでなければ 0 という決定変数 x_j を使う．

解答：

ハブ局の場所＝

シナリオ 9．レポート収集問題

入門実験をとった勉強熱心な森戸君は，誰にも負けない優れたレポートを書こうと，過去のレポートを集めることにした．書かなければいけないレポートは全部で m 種類，サークルの n 人の先輩に電話をしたところ，過去のレポートをきちんと保管していなかったり，年によってはレポートが返却されなかったりで，人によって保存しているレポートに大きなばらつきがあることが分かった．森戸君は，すべての実験項目に対するレポートを集めたいと考えている．一方，たとえば，先輩 j のところにレポートを借りにいくために必要なコスト（あるいは時間）c_j は，推定されているものとする．また，先輩 j がレポート i を持っているならば 1，そうでなければ 0 という係数 a_{ij} が与えられているものとする．最小のコストで，すべてのレポートを集めるためにはどの先輩に頼むのがいいかを求めたい．（この問題のシナリオは見習うべきことではありません．決して真似をしないようにしてください．）

練習 4.10 たとえば，$m=6, n=8$ として，a_{ij} を計算するデータと b_j が次の表のように与えられている場合に，最適な戦略を決定するために数理計画問題として定式化したものを書き，ソルバーを使って最適戦略を決定しなさい．

先輩	1	2	3	4	5	6	7	8
費用	2000	4300	5700	2500	3800	2800	5200	2300
レポート 1	○	○	○					
レポート 2			○	○			○	
レポート 3			○			○		○
レポート 4	○				○	○		
レポート 5		○		○	○		○	
レポート 6	○				○	○	○	○

（**ヒント**）先輩 j に借りにいくとき 1，そうでなければ 0 という決定変数 x_j を使う．

解答：

利用する先輩＝ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，**総費用**＝ ＿＿＿＿＿＿

シナリオ 10．コンサート会場の警備

あるバンドのコンサートが某アリーナで開催されることになった．そのバンドのコンサートは熱狂的なファンが殺到することで知られており，事故防止のために厳重な警備が必要と考えられる．そこで，アリーナでは，どこに警備員を配置したらよいかを綿密に検討することにした．会場担当者は，会場全体を小さなブロック $i(=1,2,\cdots,m)$ というように分け，仮に警備員をある候補地点 $j=(1,2,\cdots,n)$ に配置したときに，警備員がどのブロックを同時に見ることができるかを調べることにした．その結果，候補地点 j からブロック i が警備できるならば 1，そうでなければ 0 という係数 a_{ij} が与えられた．会場全体を最小人数の警備員で警備するための配置と，そのときの警備要員の必要人数を求めたい．

練習 4.11 たとえば，$n=7, m=7$ として，a_{ij} を計算するデータが次の表のように与えられている場合に，最適警備計画を決定するために数理計画問題として定式化したものを書き，ソルバーを使って決定しなさい．

候補地点	1	2	3	4	5	6	7
ブロック 1	○		○				
ブロック 2	○	○					○
ブロック 3		○	○				
ブロック 4				○			○
ブロック 5				○	○		
ブロック 6						○	
ブロック 7					○	○	○

（**ヒント**）候補地点 j に警備員を配置するとき 1，そうでなければ 0 という決定変数 x_j を使う．

解答：

警備員数＝

これまでのシナリオは線形の整数計画問題として定式化されるものばかりであったが，次のシナリオは，変数 $\times$ 変数という非線形な目的関数を持つ非線形整数計画問題となるであろう．より具体的には，変数と変数の積を目的関数，すなわち，2 次の目的関数を持つ 2 次整数計画問題として定式化される．

シナリオ 11．本社機能の分散

ある企業では一部本社機能を現在地 X から移転させたいと考えている．移転を実施すると，安い土地代，賃借料，政府の補助，採用の容易さ等のメリットが得られ，従来より費用の節約が期待できる．その反面，部門間の通信費が高くなってしまう．年間総通信費から再配置による利益を差し引いた金額を最小にするには，各部門をどこに配置したら良いか．

この企業は 5 部門（A,B,C,D,E）からなっている．再配置の候補は，候補地 Y と候補地 Z であり，また，現在地 X にとどまることも許されるものとする．現在地 X を含むこれらの都市には，1 都市当たり最大 3 部門のみしか配置できない．また，特定の部門を複数の都市に分散して配置することは許されないものとする．

再配置による利益は以下の通りである (単位:1000 万円／年).

p_{ij}	A	B	C	D	E
Y	10	15	10	20	5
Z	10	20	15	15	15

部門 i を都市 j に配置し，部門 k を都市 l に配置したときの通信費は $C_{ik}D_{jl}$ という形をとる．C_{ik} は部門 i と部門 k との間の年間通信量を表す (単位:1000 万).

C_{ik}	A	B	C	D	E
A		0	1	1.5	0
B			1.4	1.2	0
C				0	2
D					0.7

また，D_{jl} は都市 j と都市 l との間の単位当たりの通信費を表す (単位:万円).

D_{jl}	Y	Z	X
Y	5	14	13
Z		5	9
X			10

練習 4.12 この問題を 2 次整数計画の問題として定式化しなさい．

4.4 整数計画の定型モデル： 一般的定式化

本節では 4.3 節でシナリオを提示し，定式化を考えてもらった問題に対して一般的な定式化を示すとともに，問題の性質，代替的定式化や問題の拡張など関するコメントを与える．

4.4.1 ナップザック問題

n 個のプロジェクトが与えられたときに，総予算の枠内で総利益が最大となるようにするには，どの候補を選べばよいかを決める問題であり，選択するか否かを定める 0-1 整数計画問題である．

定数の定義

c_j	プロジェクト j を選択したときに得られる利益
a_j	プロジェクト j を選択したときに必要な予算
b	プロジェクトの合計予算の上限

変数の定義

x_j	プロジェクト j を選択するときは 1，そうでなければ 0

定式化

$$
\begin{array}{llll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{制約} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j & \leq & b \\
& x_j & \in & \{0,1\} \quad (j=1,\cdots,n)
\end{array}
$$

上の問題は **0-1 ナップザック問題**と呼ばれる．決定変数がバイナリ (binary)，すなわち，0-1 変数でなく，非負整数のナップザック問題も考えられるが，そのような問題は**整数値ナップザック問題**と呼ばれている．

4.4.2 集合被覆／集合分割／集合充填問題

集合被覆問題，集合分割問題，集合充填問題は，いずれもなんらかの集合 $M=\{1,2,\cdots,m\}$ とその部分集合の集まり（「部分集合族」）$P_1,P_2,\cdots,P_n$ が元になっている最適化問題である．4.3 節の「速達配達ルート」（シナリオ 4）では配達先の集合があり，配達ルート毎に配達先の部分集合が対応する．配達ルートの集合は，部分集合の集まり，すなわち，部分集合族を構成する．

部分集合族 $P_j, j \in K$ が与えられたとき，P_j の和集合が元の集合 M であるとき，すなわち，$\cup_{j\in K} P_j = M$ が成立するとき，その部分集合族を**被覆 (cover)** と呼ぶ．各部分集合 P_j のコスト c_j が与えられたとき，最小費用の被覆を求める問題を**集合被覆問題 (set covering problem)** と呼ぶ．集合被覆問題では，部分集合によって要素が重複して被覆されることが許されている．

一方，被覆を構成する部分集合間に「重なりがない」，言い換えれば，集合を構成する要素が被覆を構成するどれか 1 つの部分集合にだけ含まれているような被覆のことを，**分割 (partition)** と呼ぶ．すなわち，

$$P_j \cap P_k = \emptyset, \qquad j, k \in K, \quad j \neq k \tag{24}$$

を満たすとき，部分集合族は分割である．ここに，$\emptyset$ は空集合を示す．元の集合の構成要素をいくつかの部分集合に分割していることに注意する．各部分集合 P_j のコスト c_j が与えられたとき，最小費用の分割を求める問題を**集合分割問題 (set partitioning problem)** と呼ぶ．

集合被覆問題や集合分割問題が，元の集合の要素が部分集合のいずれかに含まれなくてはならないことを要請しているのに対して，**集合充填問題 (set packing problem)** は各部分集合 P_j の価値 c_j が与えられたときに，元の集合の要素が部分集合に重複して含まれてはいけないという条件の下で，総価値を最大化する部分集合族を選ぶ問題である．

これらの問題を定式化したときの共通点は，

1. いずれも 0-1 整数計画問題となる
2. 制約条件の係数行列がすべて 0 または 1 からなる
3. 右辺定数がいずれも 1 である

であり，違いは集合被覆／分割問題が最小化，$\geq$ の不等式制約または等式制約の問題であるのに対して，集合充填問題は，$\leq$ の不等式制約からなる最大化問題である点である．

集合被覆／分割問題に定式化できる問題は無数に存在し，応用例が極めて豊富である．4.3 節の複数のシナリオはこの形の問題に定式化できる．応用例としては，航空業界・鉄道バス業界などにおけるクルースケジューリング (crew scheduling) ／乗務員スケジューリングや配送計画 (vehicle scheduling; VRP と略称されることも多い) がその代表格である．選挙区割決定問題も集合分割問題の応用例の典型と言える．応用例については，Balas and Padberg (1975) や Garfinkel and Nemhauser(1972) を参照されたい．

定数の定義

c_j	部分集合 P_j のコストまたは価値
a_{ij}	部分集合 P_j に集合の要素 i が含まれるとき 1，含まれないとき 0 の係数

変数の定義

x_j	部分集合 P_j を選択するとき 1，さもなくば 0

定式化（集合被覆問題）

$$\begin{array}{llll} \text{最小化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{制約} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 & & (i = 1, \cdots, m) \\ & \qquad x_j \in \{0, 1\} & & (j = 1, \cdots, n) \end{array}$$

定式化（集合分割問題）

$$
\begin{array}{llcll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{制約} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & 1 & (i = 1, \cdots, m) \\
 & x_j & \in & \{0, 1\} & (j = 1, \cdots, n)
\end{array}
$$

定式化（集合充填問題）

$$
\begin{array}{llcll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{制約} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & 1 & (i = 1, \cdots, m) \\
 & x_j & \in & \{0, 1\} & (j = 1, \cdots, n)
\end{array}
$$

4.4.3 巡回セールスマン問題

シナリオ 2 のように，都市 $i = 1, 2, ..., n$ と，各都市間の移動時間 c_{ij} が与えられたとき，n 都市をちょうど一回ずつ立ち寄って最短時間で出発都市に戻るルートを求める問題を巡回セールスマン問題（Traveling Salesman Problem，略して TSP）という．

プリント基板に 1 本のドリルでたくさんの穴を開ける場合，最初のポジションは常に同じなので，ドリルの移動はちょうどこの巡回セールスマン問題の状況と同じである．あるいは，宅配便のトラックの動き，コンビニに商品を納入する配送トラックの動きも，この巡回セールスマンの動き，解くべき問題は同じになる．

普通の道路マップのように，全ての i, j の組合せに対し $c_{ij} = c_{ji}$ が成り立つ場合は，**対称型 TSP** と呼ぶ．一方，$c_{ij} \neq c_{ji}$ となる組合せが存在する場合，**非対称型 TSP** と呼ぶ．グラフで表現すると，対称型 TSP は無向グラフ，非対称型 TSP は有向グラフになる．以下では，非対称型 TSP の定式化を考えることにする．

定数の定義

c_{ij}	都市 i から都市 j への移動にかかる時間

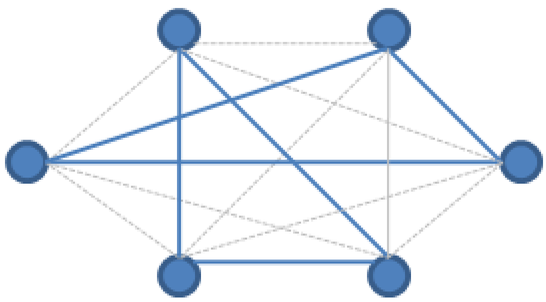
変数の定義

x_{ij}	都市 i から都市 j へ移動するときは 1，そうでなければ 0

定式化

$$
\begin{array}{llcll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & & & \\
\text{制約} & \displaystyle\sum_{j:j\neq i} x_{ij} & = & 1 & (i=1,\cdots,n) \\
 & \displaystyle\sum_{i:i\neq j} x_{ij} & = & 1 & (j=1,\cdots,n) \\
 & \displaystyle\sum_{i\in S}\sum_{j\in N-S, j\neq i} x_{ij} & \geq & 1 & S\subset N, \quad S\neq\phi, \quad S\neq N \\
 & x_{ij} & \in & \{0,1\} & (i=1,\cdots,n; \quad j=1,\cdots,n; \quad i\neq j)
\end{array}
$$

制約式の 1 本目は，全ての都市をちょうど 1 回ずつ出発するという制約．2 本目は，全ての都市にちょうど 1 回ずつ到着するという制約である．1-2 番目の制約だけならば問題は**割当問題**に他ならない．割当問題で巡回セールスマン問題が解ければよいが，割当問題の解は一般に，各点を重複なしに 1 回ずつまわる巡回路とならずに複数の**部分巡回路**からなる解となる．そこで，解が部分巡回路を構成しないという制約，すなわち，部分巡回路除去制約 (subtour elimination constraints) が必要となる．3 番目の制約式は，部分巡回路除去のための制約の 1 つの表現方法である．



以下のいずれかも，部分巡回路除去制約の表現法と知られている．後者は，補助変数 $u_i, i=1,\cdots,n$ が使われているが，導入された「補助変数が頂点 i への訪問順序を表す」と解釈できることを確かめてほしい．

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} \leq |S|-1 \quad (S\subset N, \quad 2\leq |S|\leq n-1)$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1 \quad (i=1,\cdots,n; j=1,\cdots,n)$$

練習 4.13 対称型 TSP の定式化を考えなさい．対称型 TSP は，非対称型 TSP において，たまたま $c_{ij}\neq c_{ji}$ と考えることもできるが，対称性を考慮に入れた定式化を考えてほしい．

解答：

練習 4.14 例題 4.4 を解きなさい

解答：

4.4.4 一般化割当問題

この問題は，一般化割当問題と呼ばれる問題である．ナップザック問題，巡回セールスマン問題，集合被覆／分割問題ほどの「知名度」はないかもしれないが，典型的な整数計画モデルの 1 つで，応用例が多い．また，別の問題（たとえば，配送計画問題）を解く際に，一般化割当問題が「子問題」として現われるということもある．

一般化割当問題は，名前が示すように割当問題の一般化という側面と，ナップザック問題の側面とを合わせ持つ問題である．一般化割当問題は記載のシナリオのようなスケジューリング問題など広範な応用例があり，配送計画問題 (VRP) の子問題として登場することでも有名である．

定数の定義

c_{ij}	仕事 i を機械 j で処理する費用
t_{ij}	仕事 i を機械 j で処理する時間
b_j	機械 j の総処理時間の上限

変数の定義

x_{ij}	仕事 i を機械 j へ割り当てるときは 1，そうでなければ 0

定式化

$$
\begin{array}{llcll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & & & \\
\text{制約} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}x_{ij} & \leq & b_j & (j=1,\cdots,m) \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & (i=1,\cdots,n) \\
 & x_{ij} & \in & \{0,1\} & (i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n \quad i\neq j)
\end{array}
$$

4.4.5 施設配置問題

シナリオ 6 のように，処理能力と経費の与えられた倉庫をいくつか選んで，需要量と輸送費用の与えられた消費地に最小費用で輸送する，というタイプの問題は施設配置問題と呼ばれる．

この問題では，借りた倉庫のみ供給可能で，借りない倉庫から需要地へは輸送できないという条件を，どのように表現するかがポイントになる．つまり，「もし $\cdots$ ならば $\cdots$」という論理条件を定式化に組み込む必要がある．決定変数は，倉庫 i から需要地 j への輸送量を表す連続変数 x_{ij}，および，倉庫を借りるとき 1，そうでなければ 0 という 0-1 変数 y_i の 2 種類が必要になる．

論理条件は $y_i = 1$ ならば供給能力は a_i，$y_i = 0$ ならば供給能力は 0 という必要十分条件としてもよいが，「倉庫 i を借りないときは倉庫 i から送り出してはならない」，あるいは，「倉庫 i を借りないときは倉庫 i から需要地 j に送り出してはならない」という論理条件を組み込めば十分

である．なぜだろうか（ヒント：「倉庫 i から送り出さないときは倉庫 i を借りてはならない」という条件をつけなくてもよいはず）．

y_i をインディケータ変数と考えれば，$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq a_i y_i$ とすることで，右辺定数の供給能力が，借りたときには a_i，借りないときには 0 となる．

定数の定義

a_i	倉庫 i を借りたとき供給能力
b_j	需要地 j の需要量
c_{ij}	倉庫 i から需要地 j への輸送単価
d_i	倉庫 i を借りたときの固定費

変数の定義

x_{ij}	倉庫 i から需要地 j への輸送量
y_i	倉庫 i を借りるときは 1，そうでなければ 0

定式化

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} d_i y_i & & & & \\
\text{制約} & & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} & \geq & b_j & (j=1,\cdots,n) \\
& & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leq & a_i y_i & (i=1,\cdots,m) \\
& & x_{ij} & \geq & 0 & (i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n) \\
& & y_i & \in & \{0,1\} & (i=1,\cdots,m)
\end{array}
$$

4.4.6 ロットサイズ決定問題

シナリオ 7 のように，各期の需要量と諸費用が与えられているとき，生産量を決定する問題はロットサイズ決定問題と呼ばれる．決定変数は各期の生産個数および，期末に残る在庫量である．よって，t 期の生産個数を x_t，t 期末の在庫量を I_t とする．今期の在庫量に関しては，前期末の在庫量＋今期の製造量－今期の需要量で求まるので，$I_{t-1} + x_t - d_t = I_t$ という制約条件が成り立つ．

また，生産するときのみ段取費などの固定費がかかるという条件があるので，インディケータ変数として，t 期に製造するならば 1，そうでなければ 0 という y_t を用いる．$x_t > 0$ ならば $y_t = 1$ という条件を線形制約式に置き換えるためには，生産量の上界値を M として，$x_t \leq My_t$ と表現すればよい．シナリオ 7 の場合は，全期間の需要量がその上界値として使える．

この問題は動的ロットサイズ決定問題，Wagner-Whitin モデルなどの名前で呼ばれる問題で，いわゆる経済発注量モデル，EOQ モデルの動的拡張と考えられる有名な問題で，応用面でも理論面でも重要な問題である．

定数の定義

a	生産にかかる固定費
h	製品 1 単位あたりの在庫維持費
d_t	t 期の需要量
M	上界値（ここでは，T 期の需要量合計 $\sum_t d_t$）

変数の定義

x_t	t 期の生産量
I_t	t 期末の在庫量 (ただし $I_0 = 0, I_T = 0$)
y_t	t 期に生産すれば 1，そうでなければ 0

定式化

$$
\begin{array}{llcll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} hI_t + \sum_{t=1}^{T} ay_t & & & \\
\text{制約} & I_{t-1} + x_t - d_t & = & I_t & (t = 1, \cdots, T) \\
& x_t & \leq & My_t & (t = 1, \cdots, T) \\
& I_0 & = & 0 & \\
& I_T & = & 0 & \\
& x_t, I_t & \geq & 0 & (t = 1, \cdots, T) \\
& y_t & \in & \{0, 1\} & (t = 1, \cdots, T)
\end{array}
$$

練習 4.15 シナリオ 7 の状況に対して，$T = 6, a = 100, h = 2$ として，d_t が次の表のように与えられている場合に，最適な生産計画を決定するために数理計画問題として定式化したものを書き，ソルバーを使って最適解を求めなさい．ただし，v_t は一定とします．

期 t	1	2	3	4	5	6
需要 d_t	40	35	50	20	30	35

解答：

各期の生産量＝ ______________________，**総費用**＝ __________

4.5　分枝限定法

ここでは，（線形）整数計画問題に対する最適解を求める方法について解説する．広義の整数計画問題には，一部の変数だけに整数条件がついている混合整数計画問題 (mixed integer program) とすべての変数に整数や 0-1 条件のついている全整数計画問題 (all-integer integer program) とに大別できる．混合整数計画問題の一例としては施設配置問題があり，全整数計画問題にはナップザック問題や集合被覆問題などがある．以下では，まず施設配置問題の数値例をもとに，分枝限定法 (branch and bound method) と呼ばれる解法を解説した後に，分枝限定法の一般論を述べることにする．取り上げる題材はシナリオ 6 を再掲する．

シナリオ 6（再掲）

関東地方を中心に営業を行ってきた輸入品販売業の K 社では，関西地方に活動を拡大するため，京阪神地方に倉庫の賃借を行う計画を立てている．賃借の候補となる倉庫は m カ所にあって，第 i 地点の倉庫 $W_i(i = 1, \cdots, m)$ の月間処理能力は a_i（トン／月）であり，その経費（賃借料や維持費など毎月の固定費）は d_i（千円／月）である．また，関西一円に広がる消費地 $D_j(j = 1, \cdots, n)$ での輸入品の需要量 b_j（トン／月）と，W_i から D_j へのトン当たり輸送費 c_{ij}（千円）が与えられたとして，すべての需要を満たし，毎月の総費用（輸送費＋倉庫経費）を最小にする倉庫配置と輸送計画を求めたい．（今野，鈴木編著，「整数計画法と組み合わせ最適化」，日科技連出版社，1982）

4.5.1　EXCEL ソルバーによる求解（分枝限定法を使用，詳細は不明）

シナリオ 6 をソルバーを使って解く手順を書いておく．

1. 与えられたデータを入力する

施設配置問題：分枝限定法

条件

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	需要地5	処理能力	固定費
倉庫1	6	9	5	10	5	120	120
倉庫2	7	10	3	4	12	110	110
倉庫3	10	11	4	6	2	80	80
倉庫4	9	5	13	5	10	60	60
倉庫5	4	6	12	9	3	60	60
需要	25	30	40	40	50		

2. 処理能力制約，需要制約を入力する

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
12	決定変数									
13		需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	需要地5	設置?	送出		供給
14	倉庫1	0	0	0	0	0	0	0	≦	0
15	倉庫2	0	0	40	40	0	1	80	≦	110
16	倉庫3	0	0	0	0	50	1	50	≦	80
17	倉庫4	0	0	0	0	0	0	0	≦	0
18	倉庫5	25	30	0	0	0	1	55	≦	60
19	納入	25	30	40	40	50				250
20		≧	≧	≧	≧	≧				
21	需要	25	30	40	40	50	185			
22										
23	輸送費	660								
24	倉庫固定費	250								
25	総費用	910								

- セル B14:F18 が x_{ij}，セル G14:G18 が y_i の値を計算するセルで，
- H 列には倉庫 W_i からの送出量合計，
- 19 行には需要地 D_j への総輸送量を計算する式を入力する．
- セル J14:J18 には各倉庫からの送出量上限を計算する．
- 借りれば G5:G9 に入力されている「処理能力」まで送出出来る，借りなければ 0．
- セル B21:F21 には B10:F10 をコピーしておく．
- セル B23 には輸送費合計を計算するために「=sumproduct(B5:F9,B14,F18)」と入力し，
- セル B24 には倉庫の借料（借りる場合にだけ固定費がかかる）を計算する（セル H5:H9 とセル G14:G18) の積和を計算すればよい)．
- 最後にセル B25 には二つの費用の合計を計算する式を入力する

3. それだけ準備してから，ソルバーを立ち上げる．
   - 「目的セル」はセル B25，もちろん最小値を目指す．
   - 変化させるセルは B14:G18.
   - 制約条件は 3 つ，送出量が供給量以下，納入量が需要量に等しい，セル G14:G18 は 0-1 変数，を入力する．0-1 変数は，制約条件を入力するとき，「<=」の記号の最後にある「データ」を選ぶ．そうすると，右のコラムに「バイナリ」と表示される（バイナリ binary とは 2 値ということ，binary number は 2 進数)．
   - 「オプション」の指定は今まで通り．これで実行ボタンをクリックすればよい．

ソルバーで解くと，最適値が 910 で，倉庫 2,3,5 を借りるのがよいという結果が得られる．以下ではソルバーがどのようにして最適解／最適値を求めているかを解説する．

4.5.2　実行可能解と上界値

まず，施設配置問題の可能解を求めるにあたって，すべての倉庫を借りた場合の処理能力の合計が総需要量を越えることに着目する．逆に，すべての倉庫を借りても需要を満足させられない場合には解が存在しないことは明らかである．一般に，開設する倉庫の処理能力の合計と総需要

量とは一致しないので，この問題を飛び石法で解く場合には，需給を一致させるためにダミーの需要地を設けてから解法を適用することになる．この問題を解くと，目的関数値が 1060（倉庫開設に伴う固定費を含む）であることが分かる．あるいは，費用の小さいものから割り当てるというハウザッカー法を使って基底解を計算すると 940 という実行可能解が求められる．

このことから元の施設配置問題の最適値が高々 940 であることはいうまでもない．このように最適値が，ある値以下であることが保証されている値のことを**上界値 (upper bound)** と呼ぶ．したがって，求まった可能解の目的関数値 940 は，最適値の上界値を与える．最小化問題の場合，一般に，元の問題の実行可能解の目的関数値は最適値の上界値を与える．

一旦上界値 940 が求まればそれ以降は，目的関数値が 940 未満の解を探すか，この解が最適であることを確認することになる．借りる倉庫の「すべての組合せを調べて，その中から最も良い解を見つける」という考え方はありうるが，問題の規模（すなわち，倉庫の候補地の数 m）が大きくなると，すべての組合せ 2^m 個を調べる計算の手間が急速に増え，場合によっては現実的な計算時間では解が見つからなくなる恐れがある（$m = 10$ ならば $2^{10} = 1024$，$m = 20$ ならば $2^{20} = 1048576$）．そこで，腕力に頼ってすべての候補を列挙することはせずに，すなわち，全列挙はせずに，効率よく最適解や最適値を求めることを考えたい．そのとき役立つのが，変数の整数条件を緩和した線形計画問題から得られる情報である．

練習 4.16 費用の少ないルートから割り当てるというハウザッカー法を使って，上の施設配置問題の可能解を求めなさい

解答：

	需要地 M1	需要地 M2	需要地 M3	需要地 M4	需要地 M5	処理能力
倉庫 1	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{5}$	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$	120
倉庫 2	$\boxed{7}$	$\boxed{10}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{12}$	110
倉庫 3	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	80
倉庫 4	$\boxed{9}$	$\boxed{5}$	$\boxed{13}$	$\boxed{5}$	$\boxed{10}$	60
倉庫 5	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{12}$	$\boxed{9}$	$\boxed{3}$	60
需要	25	30	40	40	50	

4.5.3 線形（LP）緩和問題

変数 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 の 0–1 整数条件（0 または 1 の値をとるという条件）を緩めて，0 以上 1 以下の実数値をとるという条件に置きかえた問題は，線形計画問題となる．EXCEL ソルバーならば，

1. 元の施設配置問題で定義した変数の 0–1(binary) 制約を除き，
2. 各変数が高々 1 を越えないという制約条件式 $y_i \leq 1 (i = 1, \cdots, 5)$ を加えて

得られる問題は**線形緩和問題**，または，**LP 緩和問題**と呼ばれる．線形緩和問題の最適値（LP 最適値）は 815，最適解は $y_1 = 0, y_2 = 0.73, y_3 = 0.63, y_4 = 0.5, y_5 = 0.42$ となる．本来は 0 または 1 の値をとるべき 5 つの変数 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 のうち，4 変数は小数値をとっている．

もし，得られた線形緩和問題の最適解で y_i がすべて 0 または 1 の値をとっていたならば，その解が最適解であることは言うまでもない．なぜなら，整数条件を緩和して得られた解が緩和した整数条件を満たすならば，その解が条件を緩和する前の問題の最適解にもなっているはずだからである．

また，線形緩和問題では変数 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 の 0–1 整数条件を緩めているので，LP 最適値は解くべき施設配置問題の最適値がそれ以上であることを保証する値，すなわち，**下界値 (lower bound)** となっている．これは，問題の条件を緩めることによって，最適目的関数値はより良く (小さく) なるか，変わらないかのいずれかであり，最適値より悪くなる（大きい）ことはありえないからである．

例えば，$y = x^2 - x$ は $x = 0.5$ で最小値 -0.25 を取るが，整数に限れば最小値は 0，しかし，$y = x^2 - 2x$ は整数に限っても，限らなくても最小値は -1.

練習 4.17 ソルバーを使って，変数 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 を「バイナリ」とする代わりに「$y_i \leq 1$」という制約条件に変えて最適解を計算しなさい．

解答：

最適解$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) =$ ____________________ **最小費用は** __________

4.5.4 解の列挙プロセス

EXCEL ソルバーをはじめ，多くのパッケージソフトウェアは，可能な組合せの全列挙を避けるために，分枝限定法と呼ばれる方法を用いて，計算の短縮を目指す．その基本的な考え方は，

- 線形緩和問題を解くことによって上界値，下界値を求め，その差を縮める努力をすること，
- そのときまでに分かっている上界値より最適解が大きくなるような問題や，下界値より最適解が小さくなるような問題は解かないようにする

ことで，計算量を減らす，ということである．

今の問題で，その具体的手順を見てみよう．まず，線形緩和問題を解くことから始める．次に，線形緩和問題の解で整数値をとらない整数変数を順次固定しながら，上界値と下界値を使って最適値と最適解を絞り込んでいく．

場合分け：その 1

線形緩和問題の最適解は $y_1 = 0, y_2 = 0.73, y_3 = 0.63, y_4 = 0.5, y_5 = 0.42$ である．変数 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 は 0 または 1 の値をとらなければいけないので，最適解で整数値をとらない変数のいずれかに着目する．ここでは，y_2, y_3, y_4, y_5 が候補になるが，まず適当に y_2 を選択して，場合分けを考えることにする．すなわち (1) $y_2 = 0$ の場合，(2) $y_2 = 1$ の場合，の 2 つに分けて考える．

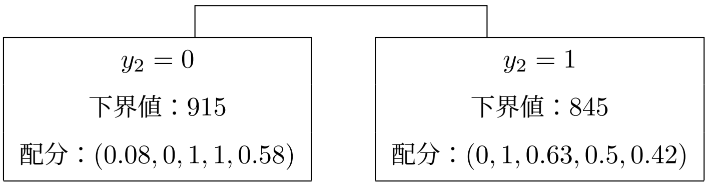
(1) 制約条件に等式 $y_2 = 0$ を加えて LP を解くと最適値が 915 となり，最適解は $y =$

$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0.08, 0, 1, 1, 0.58)$ となる．

(2) 制約条件に等式 $y_2 = 1$ を加えて LP を解くと最適値が 845，最適解が $y = (0, 1, 0.63, 0.5, 0.42)$ になる．（注：同じ最適値を持つ「代替」最適解が複数存在する場合があるので，実際に解いたときに最適解が異なることもありうる．）

これらの LP 最適値は，変数 y_2 の値を固定しない場合の LP 最適値より大きくなっている．このことからも，さらに（たとえば）変数 y_3 の値を 0 または 1 に固定した場合の LP 最適値は，固定しない場合の LP 最適値より大きいか等しいことがわかる．

また，y_2 を 0 または 1 に固定した問題の線形緩和問題（以下，LP と略称）の最適解を見ると，本来 0 または 1 の値をとるべ変数 y_1, y_3, y_4, y_5 の値に 0 または 1 でないものが含まれている．



場合分け：その 2

解くべき施設配置問題は最小化問題であるので，変数 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 の一部の値を 0 か 1 に固定して LP を解くことによって得られる解の目的関数値が小さいほうがより良い解を探り当てる可能性が高いと考えるのが自然であろう．そこで，上の 2 つの場合のうち，LP 最適値の小さいほう，すなわち，$y_2 = 1$ の場合を優先させて調べることにする．

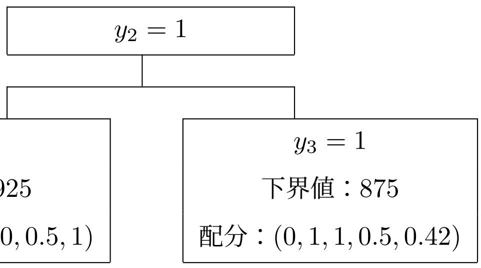
$y_2 = 1$ に固定した LP 最適解で $y_3 = 0.63$ となっている（y_4，y_5 も小数値をとっているのでそれらを選択してもよい）ので，次に y_3 を 0 と 1 に固定することを考える．

すなわち，$y_2 = 1$ で，かつ（1）$y_3 = 0$ の場合，（2）$y_3 = 1$ の場合，の二つを考えることにする．

(1) 制約条件に等式 $y_3 = 0$ を加えて LP を解くと，最適値 925，最適解 $y = (0.13, 1, 0, 0.5, 1)$ が得られる．なお，こうして条件を付けた線形緩和問題が実行不可能である場合も考えられるが，LP 緩和問題が実行不可能であるならば，一部の整数変数に条件を付けた施設配置問題も実行不可能となって，その場合についてはそれ以上調べる必要がなくなる．

(2) 制約条件に等式 $y_3 = 1$ に加えて LP を解くと，最適値 875 と最適解 $y = (0, 1, 1, 0.5, 0.42)$ が得られる．

そこで，目的関数値がより小さな $y_2 = 1$ かつ $y_3 = 1$ の場合をさらに調べることにする．



場合分け：その 3

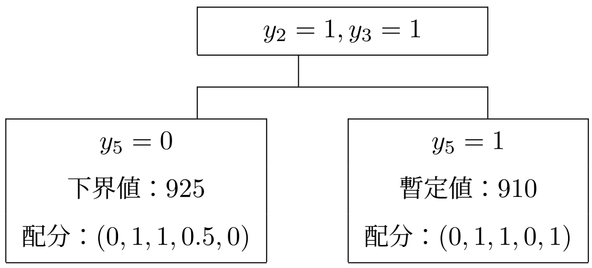
ここでは，小数値をとっている y_5（y_4 でもよい）を選んで場合分けを考える．すなわち，制約条件式 $y_2 = 1$ と $y_3 = 1$ をそのまま残して（1）$y_5 = 0$ の場合，（2）$y_5 = 1$ の場合，の 2 つを考える．

(1) 制約条件に等式 $y_5 = 0$ を加えて LP を解くと最適値 925，最適解 $y = (0, 1, 1, 0.5, 0)$ が得られ，

(2) 制約条件に等式 $y_5 = 1$ を加えて LP を解くと最適値 910 と最適解 $y = (0, 1, 1, 0, 1)$ が得られる．

後者は LP 最適解におけるすべての y_i が整数になっているので，目的関数値 910 の整数解（実行可能解）が得られたことになる．この解は，先に求めた目的関数値 1060 の可能解よりよいので，これまで見つかったなかで最良の上界値となる．ある時点まで求まっている最良の解は**暫定解**，暫定解の目的関数値，すなわち，最良の上界値は**暫定値**と呼ばれる．

今の場合，$y_2 = y_3 = y_5 = 1$ とした場合の下界値が 910 となり，それは実行可能解なので，上界値でもあるため，これ以上 y_1, y_4 について場合分けする必要がない．



場合分け：その後

$y_5 = 0$ の場合は y_4 が整数ではないので，$y_5 = 1$ の場合と同様に $y_4 = 0, 1$ に場合分けして，先の計算をする，... というように進むはずなのだが，この場合はそれ以上先へ進む必要はない．なぜならば，$y_5 = 0$ の「下界値」が 925 となっており，この先 $y_4 = 0, 1$ の場合について計算しても目的関数の値がそれ以下になることはありえない．ということは，すでに見つかっている暫定解の 910 以下の解を得る可能性が 0 なので，「**計算不要**」ということが言える．

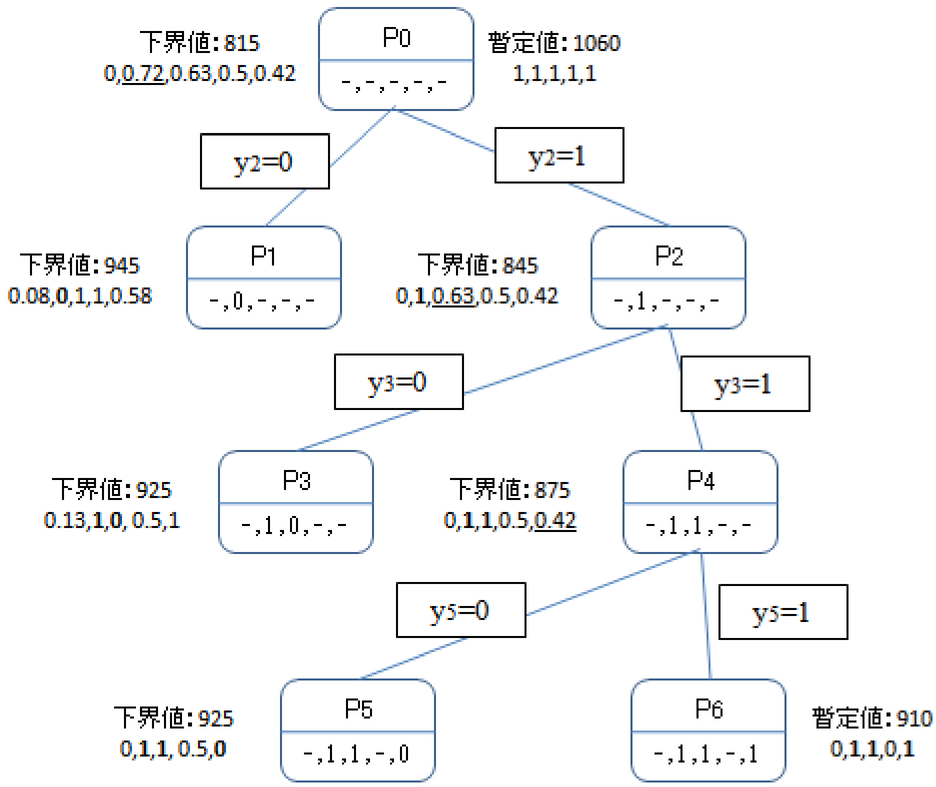
そこで，次に残されている問題，つまり，場合分けその 2 の $y_3 = 0$ のケースである．y_1, y_4 が整数ではないので，これについて場合分けを行う　...　必要はない．なぜならば，$y_3 = 0$ とすると，どんなに頑張っても目的関数の値を 925 以下にすることが出来ない（下界値 925）ということが分かっているから．

次に解くべき残された問題は，場合分けその 1 の $y_2 = 0$ のケースであるが，これも同じ理由により，それ以上場合分けを続ける必要がない．

以上の解の列挙のプロセスを図にまとめたのが**列挙木 (enumeration tree)** である．図において頂点 P の添え字は子問題の生成順序を示し，その下の文字列はどの変数がどの値に固定されているかを示している．ダッシュはその変数が固定されていないことを意味する．頂点の左側には各問題の線形緩和問題の最適値（下界値）と最適解が示されている．線形緩和問題において，変数値が固定されている変数の場合は太字で示してあり，最適解で小数値をとっている y 変数のうち，場合分け（分枝）に使う変数の値を下線で示している．頂点を結ぶ線が場合分け，す

なわち分枝に対応し，分枝する変数の値が線分の脇に示してある．暫定解が得られた場合には右側に，そのときの暫定値と共に書かれている．

上の「場合分け：その後」で説明したように，列挙木のまだ場合分けしてない頂点 P_1, P_3, P_5 はこれ以上枝分かれする必要がない．そうすると問題 P_0 の最小値は問題 P_6 の最適値 910 で，最適解は $y = (0, 1, 1, 0, 1)$ であることが分かる．当然のことながら，これは EXCEL ソルバーで元の施設配置問題を解いた結果と一致する．



施設配置問題（シナリオ６の列挙木）

この場合は，最初に子問題の解が整数解になった時点ですべての子問題からよりよい解が出る可能性がなくなったが，これは運良くそうなったのであって，一般には探索が完了していない子問題が残っている限りは場合分けを繰り返さなければならない．ここで，整数変数の場合分け（整数変数の固定）を**分枝操作 (branching operation)** と呼ぶ．一方，線形緩和問題から得られる下界値（最小化問題の場合）を利用して，ある子問題の下界値と暫定値（最良の上界値）とを比較することによって，子問題から，よりよい解が出る可能性があるか否かを判定する操作を**限定操作 (bounding operation)** と呼ぶ．

子問題の線形緩和問題が整数条件を満たす最適解を出さない場合，子問題の線形緩和問題が実行不可能か，限定操作によって探索を終了していいと判定されない限り分枝操作を繰り返さなければいけない．子問題の線形緩和問題が実行不可能になったり，限定操作によって探索を打ち切ってよいと判定されたときに子問題は**見切られて分枝停止**になったという．このようにして，分枝操作と限定操作を繰り返して，子問題を見切ることによって最適解を絞り込んでいく解法を

分枝限定法(branch and bound algorithm) と呼ぶ.

練習 4.18 次の施設配置問題を分枝限定法で解きなさい.

輸送単価 c_{ij}	需要地 1	需要地 2	需要地 3	需要地 4	処理能力 a_i	固定費 d_i
倉庫 1	6	10	5	10	60	60
倉庫 2	7	9	3	8	40	60
倉庫 3	8	7	4	6	30	50
倉庫 4	9	8	8	5	30	40
需要 b_j	25	30	40	40	-	-

解答：

4.5.5 分枝限定法の一般論，組合せ最適化問題の解法

組合せ最適化の解法は，厳密な最適解を保証する**厳密解法**と，よい解を高速に出すことを目指すものの解の最適性は保証しない**近似解法**とに大別される．ここでは近似解法については論じない.

厳密解法はさらに，解をなんらかの方法で組織的に列挙して最適解を求める**列挙（解）法 (enumerative algorithm)** と，切除平面法と呼ばれる方法に代表されるようなより解析的な解法とに分類できる．一般に，列挙法はどのような問題にも対応可能な頑健な方法であり，万能薬的なところがある．列挙法はさらに，バックトラック法 (backtrack algorithm) と分枝限定法に大別できる.

用語の整理と解法の考え方

分枝限定法は上の例のように，列挙木と呼ばれる木（を逆さにしたもの）の形をしたグラフで表現される．そのノードを頂点といい，アークを枝という．各頂点はある制約を満たす問題の集合が対応していると考える．上の例でいうと，頂点 P_4 は $y_2 = y_3 = 1$ という制約を持つ中で，最適解を求めよ，という問題の集合が対応している．そこから枝分かれしている（分枝という）頂点 P_5, P_6 は P_4 に対応している問題の集合を二つに分けて P_5 は $y_2 = y_3 = 1, y_5 = 0$ という制約を持つ中で，最適解を求めよ，という問題の集合が対応し，P_5 は $y_2 = y_3 = 1, y_5 = 1$ という制約を持つ中で，最適解を求めよ，という問題の集合が対応している．この問題ではこれ以上分枝する必要はなかったが，場合によっては，さらに制約を付け加えて分枝する必要もある．もっとも手間のかかる問題を考えると，最大で 2^5 個の頂点を持つ列挙木が得られる.

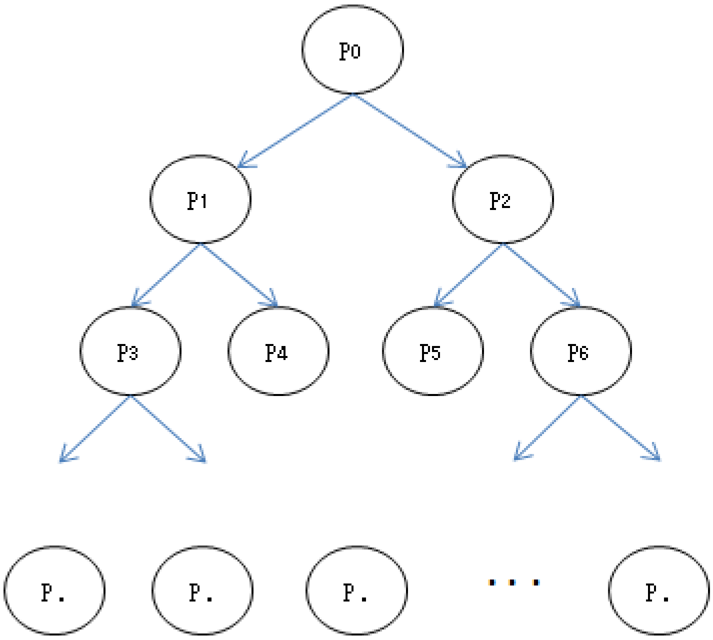
分枝限定法は，このように，制約を付け加えた問題（の緩和問題）を解き，その結果（下界値，暫定値）を利用して，最適解の範囲を狭め，分枝をなるべくしなくて済むようにして（計算量を抑え）最適解に到達する方法である.

分枝限定法で使われる基本的な用語を整理すると以下のようにまとめられる：

- 上界値＝問題の最適値がその値以下であることが保証されている値のこと
- 下界値＝問題の最適値がその値以上であることが保証されている値のこと
- 暫定値＝列挙の過程で，それまでに見つかっている最良解の目的関数の値
- 暫定解＝列挙の過程で，それまでに見つかっている最良の解

- 子問題（部分問題）＝一部の変数の値が制限（固定）された問題
- 緩和問題＝元の問題の条件を緩和した問題
- 分枝＝変数の値を制限（固定）すること（問題の集合を分割すること）
- 分枝変数＝分枝の対象となる変数（上の例で，頂点 P_4 では y_5 が分枝変数）
- 列挙木＝解の列挙の様子を木の形で表現した図のこと（頂点は子問題の集合に対応）
- 分枝頂点＝列挙木のなかで分枝の対象となる頂点
- 未分枝頂点＝まだ探索が終わっていない頂点（子問題）
- 分枝操作＝分枝すること
- 限定操作＝ある頂点をそれ以上分枝しても最適解が無い，と判断して，分枝の対象からはずすこと

分枝限定法は，分枝操作と限定操作によって最適解を絞り込んでいく方法である．分枝操作は，次の図のように，ある問題（「子問題」に対比させて「親問題」と呼ぶこともある）の実行可能領域をいくつか（通常 2 つ）に分割して，複数の「子問題」を生成する操作である．問題が n 個の変数からなる 0–1 整数計画問題の場合，分枝を n 階層繰り返して完全な列挙木を生成すれば，2^n 個のすべての解が列挙できることは図からも明らかであろう．



列挙木

限定操作は，ある子問題から得られる解が暫定解より良くはなり得ないことを確認することによって子問題を考慮の対象からはずす操作である．一般に子問題は一部の整数変数が固定されているだけでそれ自身，整数計画問題であるので，子問題を解くことは考えずに，手間をかけないで限定操作を行いたい．そのために，子問題の線形緩和問題を解くことを考える．一般に，線形計画問題は整数計画問題に対して解き易いことに注意しておく．緩和問題の最適値は，最小化問題の場合，元の問題の最適値に対する下界値を与える（最大化の場合は上界値）ので，ある子問

題の下界値が暫定値を越えるということは，その子問題から暫定解よりよい解が得られないことを意味する．したがって，子問題を考慮しなくてよいことになる．

ここで，分枝と限定とは全く対立する概念であることに注目したい．分枝操作が変数の値を制限するのに対して，限定操作は変数の整数条件を緩和して対応する線形計画問題を解く．制限（分枝）によって問題を細分化する一方で，緩和（限定）から得られる情報によってある子問題から暫定値よりよい目的関数値を持つ解が得られないことを明らかにしてゆくのが分枝限定法である．

4.5.6 分枝限定法の基本アルゴリズム

ここでは，最小化の 0–1 整数計画または 0–1 混合整数計画を想定して，分枝限定法の基本アルゴリズムを考える．

ステップ 0（初期化）： 制約のない問題に対応する頂点（つまり，一番上の頂点）だけからなる集合を未分枝頂点集合とし，暫定値を $+\infty$ に初期化する（最大化の場合は $-\infty$）．
ステップ 1（分枝頂点の選択）： 未分枝頂点集合から一つの頂点を選択し，分枝頂点とする，選択された分枝頂点を未分枝頂点の集合から取り除く．未分枝頂点集合が空集合ならば，暫定解が最適解.
ステップ 2（線形緩和問題の求解）： 選択された分枝頂点に対応する子問題の線形緩和問題を解く
ステップ 3（限定操作）： 線形緩和問題が実行不可能な場合は，分枝を停止し，ステップ 1 に戻る．「線形緩和問題の最適値 $\geq$ 暫定値」（最大化の場合は，「線形緩和問題の最適値 $\leq$ 暫定値」）の場合も分枝を停止し，ステップ 1 に戻る．
ステップ 4（暫定解と暫定解の更新）： 線形緩和問題の最適解が整数解ならば（実行可能解なので），その目的関数値が暫定値より小さいときには，暫定値と暫定解を更新してステップ 1 に戻る．
ステップ 5（分枝変数の選択と分枝操作）： 分枝変数を，線形緩和問題の最適解で小数値をとる整数変数のいずれかに定めて，2 つの子問題を生成し，それらを未分枝頂点集合に加えた後，ステップ 1 に戻る．

上に示した基本アルゴリズムでは，線形緩和問題を解いた結果が整数解にならない限り上界値の更新はないが，より早く上界値の更新を期待するならば，子問題ごとに上界値，すなわち，実行可能解を求めるように修正することもできる．

上のアルゴリズムで，一般に自由度があるのは，分枝頂点の選択と分枝変数の選択である．これらの選択をどうしようが，アルゴリズムの妥当性は失われないが，実際はこれらの選択によってアルゴリズムの挙動が大きく変わり，効率に影響する可能性が大きい．

分枝頂点の選択の代表的な方策として，

1. 下界値優先則（最大化の場合は，上界値優先則）
2. 奥行き優先則
3. 幅優先則

が上げられる．このうち，下界値優先則は，下界値が小さい子問題を優先する規則である．下界値が小さいということは，子問題がよりよい解を生む可能性を秘めているのでそういう子問題を優先的に探索しようという精神である．これに対して，列挙木の下の方に行けば行くほどより多くの変数が固定されるので，解が出やすいと考えられる．そこで，列挙木の深さの深い頂点を優先して選ぼうというのが奥行き優先則である．それに対して，浅い頂点を優先させるのが幅優先則である．列挙木の深さの浅い方（列挙木の上の方）が変数への制限が少なく，下界値も小さくなる傾向があるので，幅優先則は，下界値優先則に類似しているとも考えられる．実際の求解においては，列挙の段階に応じて，分枝頂点の選択規則をダイナミックに変えていくという戦略が用いられることが多い．

分枝変数の選択では，限定操作によって頂点を見切ることができる可能性を高めて列挙木の成長を抑えるため，分枝変数の値を制限（固定）することでなるべく目的関数値が悪化するような変数を選択するという考え方が用いられる．

練習 4.19 次のナップザック問題を分枝限定法を用いて解く手順をまとめたので，指示に従い，空欄を埋めなさい．また，手順を実行しながら，列挙木を描きなさい．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 16x_1 + 19x_2 + 23x_3 + 28x_4 \\ \text{制約} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ または } 1 \end{array}$$

手順 0　線形緩和問題を作る．

「$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0$ または 1」という「$0-1$ 条件」の代わりに「$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$」という不等式制約を付けた線形計画問題

$$\textbf{問題}Q\textbf{：} \quad \begin{array}{ll} \text{最大化} & z = 16x_1 + 19x_2 + 23x_3 + 28x_4 \\ \text{制約} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 7 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1 \end{array}$$

を「問題 Q」とする．

手順 1　ソルバーを使い，問題 Q を解く．

最適解：$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$ (1) ____________________　**最適値**＝ (2) ________

- ここで求めた最適解は変数の $0-1$ 条件を満たしていないので，実行可能解にはならないが，$\boxed{(2)}$ は，元の問題の最適値の (3) ____________（漢字 3 文字）になっている．

手順 2　手順 1 の最適解のうち，

(2.1) 整数値でない変数 (4) ________ の値が 0 に等しい，という制約を付け加えて問題 Q を解く．

最適解：$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$ (5) ____________________　**最適値**＝ (6) ________

(2.2) $\boxed{(4)}$ が 1 に等しい，という制約を付け加えて問題 Q を解く．

最適解：$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$ (7) ____________________　**最適値**＝ (8) ________

- いずれの場合も実行可能解にはならない．さらに手順を進める

手順３　手順 (2.1) の最適解のうち，

(3.1) 整数値でない変数 $\underline{\hspace{3cm}}^{(9)}$ の値が 0 に等しい，という制約を付け加えて問題 Q を解く．

最適解：$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underline{\hspace{8cm}}^{(10)}$　**最適値**＝ $\underline{\hspace{3cm}}^{(11)}$

- これは初めて見つかった実行可能解なので，$\underline{\hspace{5cm}}^{(12)}$（漢字３文字）と呼ばれる．元の問題の最適値は，$\boxed{(11)}$ 以上なので $\underline{\hspace{5cm}}^{(13)}$（漢字３文字）になっている．

(3.2) $\boxed{(9)}$ が 1 に等しい，という制約を付け加えて問題 Q を解く．

最適解：$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underline{\hspace{8cm}}^{(14)}$　**最適値**＝ $\underline{\hspace{3cm}}^{(15)}$

- これも実行可能解で，しかも $\boxed{(11)}$ より大きいので，新たな $\boxed{(13)}$ になる．
- 他の二つの変数については，これ以上分枝しても意味のある解が無いことが分かるので，これ以上分枝する必要がない．

手順４　手順 (2.2) の最適解のうち，

(4.1) 整数値でない変数 $\underline{\hspace{3cm}}^{(16)}$ の値が 0 に等しい，という制約を付け加えて問題 Q を解く．

最適解：$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underline{\hspace{8cm}}^{(17)}$　**最適値**＝ $\underline{\hspace{3cm}}^{(18)}$

- これは実行可能解ではない．

(4.2) $\boxed{(16)}$ の値が 1 に等しい，という制約を付け加えて問題 Q を解く．

最適解：$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underline{\hspace{8cm}}^{(19)}$　**最適値**＝ $\underline{\hspace{3cm}}^{(20)}$

- これは実行可能解になるが，すでに見つかっている $\boxed{(15)}$ より小さいので，最適解にはならない．

手順５　以上の計算から，この問題の最適値は $\boxed{(15)}$ であると断言できる．**終了**

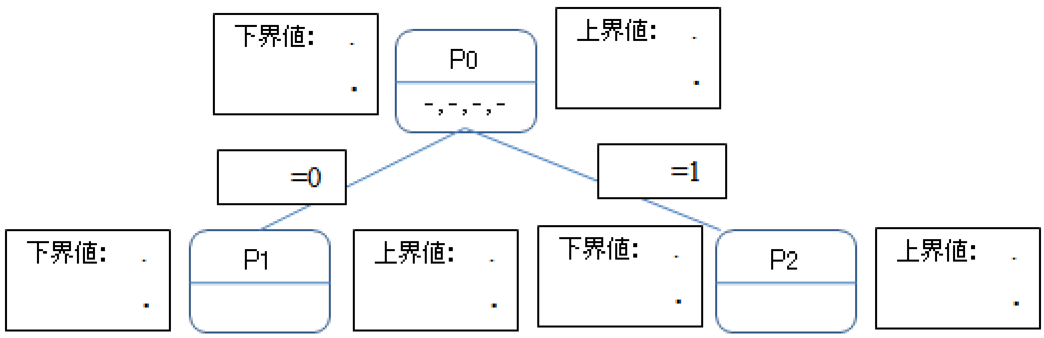
練習 4.20 手順３の「必要がない」ということと，手順５の「断言できる」ことの理由を説明しなさい．

解答：

練習 4.21 次の問題を分枝限定法で解き，列挙木を描きなさい

$$
\begin{array}{llcccccccl}
\text{最大化} & z & = & 7x_1 & + & 8x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{制約} & & & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & = & 0 \text{ or } 1
\end{array}
$$

解答：



最適値＝ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ **最適解＝** ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

上界値，下界値の計算法を説明しなさい

分枝変数の決定法を説明しなさい．

練習 4.22 次の問題を分枝限定法で解き，列挙木を描きなさい

$$
\begin{array}{llcccccccccl}
\text{最大化} & z & = & 16x_1 & + & 19x_2 & + & 23x_3 & + & 28x_4 & & \\
\text{制約} & & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & \leq & 7 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0 \text{ or } 1
\end{array}
$$

参考図書

1) 今野浩：線形計画法，日科技連出版社 (1987).
2) 伊理正夫：線形計画法，共立出版 (1986).
3) 刀根薫：数理計画，朝倉書店 (2007).
4) 伊理正夫，韓太舜，線形代数 (1977).