確率計画法とその応用†

椎名 孝之 *

数理計画法の適用分野は、現実社会の多種多様な場面に及ぶ。現実の数理計画問題には、目的関数および制約条件に不確実要素を伴う場合が多い。不確実な状況下での意思決定にはリスクが含まれるため、現実システムの不確実性をモデル化し、確率的変動要素を考慮した解法が必要となる。そのため、数理計画法の一手法である確率計画法の紹介を行う。確率計画法は、数理計画問題に含まれるパラメータが確率変数と定義される問題であり、不確実な状況下での最適化問題を対象とする。従来は設計、計画、運用などの問題に対して、確定的な数理計画法が用いられてきたが、不確実な状況下での意思決定が重要である。本論文では、実問題に適用可能な、確率計画法に基づく数理計画モデルとその効率的な解法を示す。

キーワード: 確率計画法、罰金に対する償還請求を有する確率計画問題、機会制約条件を有する確率計画問題、多期間の確率計画問題、通信網設計、発電機起動停止問題、電力供給計画

1 はじめに

様々の分野で発生する現実の数理計画問題には、目的関数および制約条件に不確実な要素を伴う場合が多い。不確実な状況下での計画には、リスクが含まれる。電気事業における電力供給計画を例にあげる。電力供給計画は、電力需要を満たすという制約条件の下で、電力供給コストを最小化する問題である (Wood-Wollenberg [50])。電力需要および、電力供給に必要な燃料費などは確定的な値ではなく、確率的な変動を含む。電力需要が想定値より大きくなると、電力供給が満たされない可能性が生じ、また電力需要の想定を大きくとりすぎると、供給設備に余剰が生じることになる。また、電力供給に必要な燃料費が変動する場合は、電力供給の実行可能性には問題は生じないものの、供給コストの最適性が失われる可能性がある。このようなリスクは、現実の計画においては回避されなければならない。

そのため、現実のシステムに含まれる不確実な状況をモデル化し、確率的変動要素を考慮することが必要となる。このように不確実要素を直接モデルに組み入れた最適化手法は、確率計画法 (stochastic programming) と呼ばれている。特に電気事業においては、今後予定される電力自由化や規制緩和の進展 (Shahidehpour [26]) により、不確実な状況下での意思決定やリスク管理手法が重要となるため、確率計画法の理論と手法のより一層の進展が求められている。

そこで、本論文では確率計画法の基本的なモデルを紹介し、現実問題において重要性が指摘されている次の 3 つの問題への確率計画法の応用について議論する。

- 罰金に対する償還請求を有しかつ、整数条件を含む確率計画問題の通信網設計への応用
- 組合せ的な条件を含む、多期間の確率計画問題の発電機起動停止問題への応用
- 同時機会制約条件を有する確率計画問題の電力供給計画への応用

本論文は以下のように構成されている。

第 2 節では確率計画法の基礎的なモデルを示し、従来研究の問題点を示す。

第 3 節では、通信網設計問題を集線装置配置問題として定式化する。続いて、予想される将来の通信需要の増大に対応するために、各電気所で発生する通信量が不確実であると仮定すると、対応する問題は整数条件を有する確率計画問題となる。そして設備の増設費用をペナルティであると定義すると、初期投資費用と設備増設費用の期待値の総和を最小化する問題となり、逐次的に目的関数を線形近似する L-shaped 法と分枝限定法を組み合わせた手法により解を求めることができる。この手法はより複雑な多期間の問題へと拡張できる。

第 4 節では、組合せ条件を含む多期間の確率計画問題の、発電機起動停止問題への応用を考える。電力需要は時間とともに変動するため、発電機の時間帯毎の運用が、供給費用の削減のために重要な問題となって

†Applications of Stochastic Programming
Takayuki SHIINA

* 早稲田大学
Waseda University

いる。この問題に対しては、ラグランジュ緩和法を用いて発電機毎に問題を分解し、各発電機のスケジュールを効率的に求める手法を示す。

第 5 節では、確率変数の相関を考慮した同時機会制約条件を含む確率計画問題の電力供給計画への応用について論じる。電力供給においては、景気などによる長期的な需要変動や、気象条件などの変化による短期的な需要変動を想定している。供給に支障を起こすことを防ぐために、供給予備力の保有を必要としている。本節で示すモデルでは、運転計画における電力需要値を、正規分布に従う確率変数と定義する。1 日を複数に分割した時間帯毎に需要を満たすという制約条件が満たされる確率は、多次元の数値積分によって求められ、非線形最適化手法と組み合わせることによって、供給費用を最小化することができる。

最後に第 6 節では、本論文の内容をまとめ今後の課題について述べる。

2　従来の研究

2.1　確率計画法におけるアプローチ方法

本論文で取り扱う数理計画問題のパラメータの一部は、あらかじめ与えられた確率分布に従う確率変数であるとする。確率計画問題のプロトタイプを次の問題 (SP) に示す。

$$\left|\begin{array}{ll}\textbf{(SP)}:\min & g_0(x,\tilde{\xi}) \\ \text{subject to} & g_i(x,\tilde{\xi}) \leq 0, i=1,\ldots,m \\ & x \in X \subset \Re^n\end{array}\right.$$

ただし、X および $g_i(x,\tilde{\xi}):\Re^n \to \Re, i=0,\ldots,m$ は与えられているものとする。$\tilde{\xi}$ は台集合 Ξ $(\subset \Re^N)$ を持つ確率変数ベクトルである。Ξ の部分集合の族 $\mathcal{F}$ および $\mathcal{F}$ に含まれる個々の事象が発生する確率 P は与えられているものとする。すなわち確率空間 $(\Xi,\mathcal{F},P)$ が与えられているものとする。

問題 (SP) は、目的関数と制約条件に確率変数を含んでおり、確率変数の全ての実現値に対して制約を満たしかつ目的関数を最小化する x が存在しない可能性があるため、明確に定義されたものであるとはいえない。従って等価確定問題 (deterministic equivalent) に考え直す必要があり、そのために各種のアプローチが採られる。

確率計画法は、1950 年代の Dantzig [11]、Charnes-Cooper [10] らの研究に起源を有する。前者は罰金に対する償還請求を有する確率計画問題、後者は機会制約条件を持つ確率計画問題として発展した。償還請求を有する確率計画問題は、制約侵犯への罰金を目的関数に導入する。機会制約条件問題は、制約が満たされる充足確率を設定するものである。

問題 (SP) において、次のように定める。

$$g_0(x,\tilde{\xi}) = c^\top x \tag{1}$$

$$X = \{x \in \Re^n | Ax = b, x \geq 0\} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} g_1(x,\tilde{\xi}) \\ \vdots \\ g_m(x,\tilde{\xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(\tilde{\xi}) \\ -T(\tilde{\xi}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -h(\tilde{\xi}) \\ h(\tilde{\xi}) \end{pmatrix} \tag{3}$$

このとき、制約式 (3) および $g_i(x,\tilde{\xi}) \leq 0, i=1,\ldots,m$ より、次の関係が成り立つ。

$$T(\tilde{\xi})x = h(\tilde{\xi}) \tag{4}$$

ただし、$m_0 \times n$ 次元行列 A、n 次元列ベクトル c、m_0 次元列ベクトル b は確定値として与えられており、$m_1 \times n$ 次元行列 $T(\tilde{\xi})$ と m_1 次元ベクトル $h(\tilde{\xi})$ は確率変数 $\tilde{\xi}$ に従うものとする。決定の流れは次のようになる。まず、確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値 ξ を知る前に第 1 段階として変数 x を決定し、その後に ξ を観測する。このとき、制約条件が侵される場合があるため、制約式 (4) の右辺に新たな変数 $y(\xi)(\geq 0)$ を含む項 $Wy(\xi)$ を加えて制約の充足を図る。ただし $y(\xi)$ は $\bar{n}$ 次元ベクトル、W は $m_1 \times \bar{n}$ 次元行列である。付加した変数への単位当りの罰金を q_i とすると、罰金への償還請求費用 (recourse cost) $Q(x,\xi)$ が定義でき、罰金の期待値を含む目的関数を最小化する、償還請求を有する確率的線形計画問題 (stochastic linear programming problem with recourse) (SLPR) が定義できる。

$$\left|\begin{array}{rl}\textbf{(SLPR)}:\min & E_{\tilde{\xi}}\{c^\top x + Q(x,\tilde{\xi})\} \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ Q(x,\xi) = & \min\{q^\top y(\xi) \mid Wy(\xi) = h(\xi) - T(\xi)x, \\ & \quad y(\xi) \geq 0\}\end{array}\right.$$

この問題は、多期間にわたる最適化を行う確率計画問題に拡張することができる。罰金に対する償還請求を有するアプローチとは異なり、(SP) において制約条件の概念を拡張し、確率 (充足水準)α_i で第 i 制約条件が満たされるという個別機会制約条件 (separate chance constraint) または充足水準 α で同時に全ての制約条件が満たされるとする同時機会制約条件 (joint chance constraint) を用いて、機会制約条件を有する確率計画問

題 (chance constrained programming problem) (CCP) が定義できる。

$$
\left|\begin{array}{rl}
\textbf{(CCP)}: & \\
\min_{x\in X} & E_{\tilde{\xi}} g_0(x,\tilde{\xi}) \\
\text{subject to} & P(g_i(x,\tilde{\xi}) \le 0) \ge \alpha_i, i=1,\ldots,m \\
\text{or} & \\
\text{subject to} & P(g_i(x,\tilde{\xi}) \le 0, i=1,\ldots,m) \ge \alpha
\end{array}\right.
$$

確率計画法の理論的な発展に関しては、石井 [15]、Wets [48]、Ermoliev-Wets [14]、Prékopa [24]、Birge-Louveaux [9]、Ruszczyński-Shapiro [25] などに解説されており、近年の確率計画法のアルゴリズムに関するサーベイは Birge [7]、椎名 [39] などに示されている。

2.2　従来の数理計画モデルの問題点

通信網の設計に関しては、ネットワーク設計における集線装置配置問題 (Bertsekas-Gallager [5]、Ahuja-Magnanti-Orlin [1]) として取り扱うことができる。電力用の通信網を効率的に設計し、最適性が保証される効率的解法の開発が望まれており、Pirkul-Gupta [22] は、ラグランジュ緩和法を用いた近似解法を示した。しかし、現実には将来の通信需要の増大に対応したネットワーク設計が求められている。将来の通信量の不確実性を考慮すると、集線装置配置問題は、罰金に対する償還請求を有する確率的整数計画問題となる。整数条件を持たない場合、償還請求を有する確率計画問題に対して、Benders [3] の分解法を応用した L-shaped 法 (Van Slyke-Wets [47]) による解法が知られている。連続変数のみを持つ問題に対する L-shaped 法に対して、整数制約などを持つ離散的な確率計画問題は、取り扱いは困難である。Wollmer [49] は陰的列挙法と L-shaped 法とを組み合わせた解法を示した。Louveaux-Peeters [20] では、双対下降法による近似解法が示された。厳密解法としては、Laporte-Louveaux [16] では分枝カット法の枠組に L-shaped 法を含めた解法が示され、Laporte et al.[17] では、施設配置問題への応用が示されているが、大規模な問題への適用はなされていない。第 3 節では、罰金に対する償還請求を有する確率的整数計画問題に対し、L-shaped 法と分枝限定法を加えた解法の枠組を示す (椎名 [38])。さらに、集線装置配置問題は、多期間のネットワークへの投資を考慮することにより、多期間の確率計画モデル (Shiina[29]) へと拡張することが可能である。

多期間の確率計画問題の解法としては、罰金を線形関数とした Birge [6]、 Birge-Donohue-Holmes-Svintsitski [8]、凸 2 次関数の罰金を取り扱った Louveaux [18] などがあるが、複雑な組合せ的条件を考慮することは困難である。特に、期間数が多い場合は、L-shaped 法のような線形近似法は効率的ではない。そのため、ラグランジュ緩和法 (Bertsekas [4]) に基づく解法を開発し、発電機起動停止問題 (unit commitment problem) への応用を考える。発電機の起動停止問題は、時間帯毎に与えられた電力需要を満たすように、各発電機の起動停止スケジュールおよび発電量を求めるスケジューリング問題である。従来は電力需要を確定値で与えたモデル (Muckstadt-Koenig [21]、 Bard [2]) が用いられていたが、電力需要の変動を考慮したモデル (Takriti-Birge-Long [45]、 Takriti-Birge [44]) が開発された。これらの確率計画モデルでは、起動停止に関わる 0-1 変数はシナリオ毎に変動するものであったが、システムの起動停止に必要なリードタイムを考慮していないため、実際的でない。第 4 節では、これらのモデルを改良して現実のシステムの運用を反映させ、かつ電力需要の不確実性を考慮した新たな確率計画モデル (椎名 [40]) を示す。

機会制約条件を満たす実行可能解の集合が凸集合となる条件は、Prékopa[23] によって示された。しかし、同時機会制約条件は一般的に多次元の数値積分を含むかまたは、非線形性の高い制約となるため、最適化計算において取り扱いが容易ではない。第 5 節では、同時機会制約条件を電力供給計画に導入する。従来の電力供給計画は、あらかじめ想定需要を超えて供給力を保持するように予備率を与えた線形計画モデル (Delson-Shahidehpour [12]) などが用いられてきた。電力需要に影響を与える天候、気温などの急変などにも対応するために、確率変動要素をモデルに組み入れることが不可欠である。機会制約条件は、電力供給が満たされる条件として、電力供給計画に応用することができ、数値積分と非線形計画法に基づく解法 (Shiina[27]) を示す。

3　罰金に対する償還請求を有する確率計画問題

3.1　通信網設計の背景と目的

電気事業において通信網は、電力系統の保護・制御、設備運転の自動化などを目的に発展し、本店、支店、営業所などの事業所と、発電所、変電所などの電気所を相互に結ぶ伝送システムと、事業所、電気所に設置される集線装置より構成される (田村 [46])。集線装置は、キャ

リヤリレーなどの系統保護装置、監視・テレメータなどの情報の入出力装置からなる。通信網の設計は、集線装置配置問題として定式化され、Shiina [28] は、切除平面法と分枝限定法とを組み合わせた最適解法アルゴリズム (Fractional Cutting Plane Algorithm/Branch & Bound (FCPA/B&B)) を開発し、数値実験によりこの解法の有効性を示した。図 1 に電気所数が 100、集線装置設置候補地数が 40 の問題に対する最適通信網の例を示す。

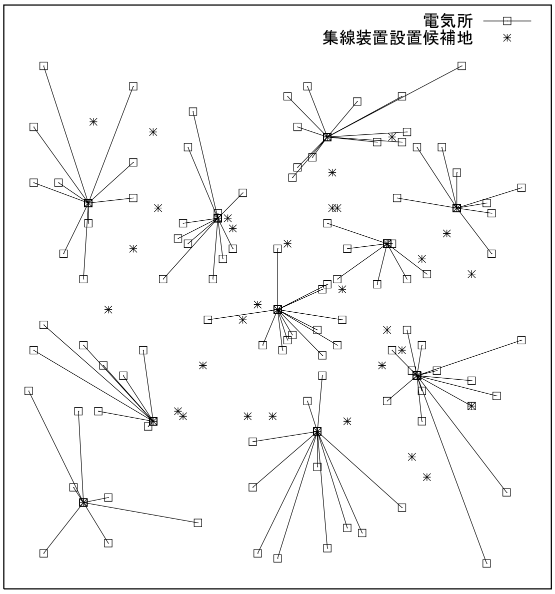

図 1: 最適通信網の例

しかし、電力用通信網においては、電力系統の保護、制御の高度化、自動化の進展によって、通信量が増大することが予想され、将来の通信量の不確実性を考慮することが不可欠であるため、将来における規模の拡張性をもった通信網設計計画が求められている。

3.2 将来の通信量の不確実性を考慮した集線装置配置問題の定式化

無向グラフ $G = (V, A)$ によって、通信網をモデル化した。点集合 V は、あらかじめ地理的な位置が与えられている電気所の集合 J、集線装置を設置する候補地の集合 I から構成される。辺集合 A は 2 点間の接続リンクを示す。各電気所は何れかの集線装置に接続しなければならない。この時、集線装置の処理能力が、それに接続する各電気所からの通信量の和を下回ってはいけない。全ての電気所を集線装置に接続し、集線装置の設置場所を選定し総設置費用最小のネットワークを設計する。椎名 [38] は不確実な状況下での集線装置配置問題を取り扱った。以下表 1 のように記号を定義する。電気所 j からの通信量 $a_j(\tilde{\xi})$ は既知の確率変数 $\tilde{\xi}$ に従うものとする。$\tilde{\xi}$ は離散的な確率分布に従い、$\tilde{\xi} = \xi$ となる確率 $P(\tilde{\xi} = \xi)$ は与えられており、確率分布の台を $\Xi(P(\Xi) = 1)$ とする。確率的集線装置配置問題のプロトタイプを以下に示す。

表 1: 集線装置配置問題の記号の定義

変数	意味
x_{ij}	電気所 j を候補地 i に存在する 集線装置に接続させるとき 1、それ以外 0
y_i	候補地 i に集線装置を設置 するとき 1、それ以外 0
パラメータ	意味
c_{ij}	電気所 j と候補地 i との接続費用
f_i	候補地 i での集線装置の設置費用
$a_j(\tilde{\xi})$	電気所 j からの通信需要
b_i	候補地 i における集線装置の処理能力

(確率的集線装置配置問題 プロトタイプ):

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I} f_i y_i \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j\in J} a_j(\tilde{\xi})x_{ij} \le b_i y_i, \quad i \in I \\
& \sum_{i\in I} x_{ij} = 1, j \in J,\ x_{ij} \le y_i, i \in I, j \in J \\
& x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, i \in I, j \in J
\end{aligned}$$

制約 $\sum_{j\in J} a_j(\tilde{\xi})x_{ij} \le b_i y_i, i \in I$ は確率変数 $\tilde{\xi}$ を含むため、等価な確定問題に定義し直す必要がある。変数 x, y は確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値を観測する前に決定され、第 1 段階決定変数となる。確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値 ξ が観測されたとき、制約 $\sum_{j\in J} a_j(\xi)x_{ij} \le b_i y_i, i \in I$ は侵される可能性があるため、この右辺に第 2 段階決定変数の $w_i(\xi)$ を付加する。この変数は、超過需要に対して行う設備の容量増設を示す。このように新たに設備を増設することは、費用増加をもたらす。装置 i における単位通信需要あたりの容量増設に対する費用を q_i とし、目的関数に設備増設費用の期待値を加える。すると問題は、罰金に対する償還請求を有する確率的整

数計画問題 (SCLP) として定義される。

$$
\begin{aligned}
&\text{(SCLP): }\min \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I} f_i y_i + \mathcal{Q}(x,y)\\
&\text{subject to} \quad \sum_{i\in I} x_{ij} = 1, j \in J\\
&x_{ij} \le y_i, i \in I, j \in J, x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, i \in I, j \in J\\
&\mathcal{Q}(x,y) = E_{\tilde{\xi}}[Q(x,y,\tilde{\xi})]\\
&Q(x,y,\xi) = \min_{w(\xi)}\{\sum_{i\in I} q_i w_i(\xi) |\\
&\qquad \sum_{j\in J} a_j(\xi)x_{ij} \le b_i y_i + w_i(\xi), w_i(\xi) \ge 0, i \in I\}, \xi \in \Xi
\end{aligned}
$$

(SCLP) は相対完全リコースを持つ。すなわち実行可能な第 1 段階決定変数 x, y がどのような値をとろうと、第 2 段階決定変数 $w(\xi)$ は実行可能解を持つことに注意されたい。

3.3 解法の枠組

解法のアルゴリズムでは、直接 $Q(x,y,\xi)$ を 第 1 段階変数 x, y の関数として捉える。L-shaped 法は、$Q(x,y,\xi)$ のエピグラフを最適性カット (optimality cut) で与えられる有限個の閉半空間の共通部分として近似していく方法であるといえる。まず、$Q(x,y,\xi)$ に対する上界を示す変数 θ_ξ を導入した主問題 (MASTER) を解く。

$$
\begin{aligned}
\text{(MASTER) : min} \quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I} f_i y_i + \theta\\
\text{subject to} \quad & \sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J\\
& x_{ij} \le y_i, \quad i \in I, j \in J\\
& x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J\\
& \theta \ge \sum_{\tilde{\xi}\in\Xi} P(\tilde{\xi} = \xi)\theta_\xi
\end{aligned}
$$

この主問題に対し、逐次 $Q(x,y,\xi)$ を近似する最適性カット (optimality cut) を加える。最適性カットは次の定理により与えられる。

定理 1 (椎名 [38])**.** $(\hat{x}, \hat{y})$ を *(SCLP)* の実行可能解とする。また、$\hat{\pi}_i$ は $max\{\sum_{i\in I}(\sum_{j\in J} a_j(\xi)\hat{x}_{ij} - b_i\hat{y}_i)\pi_i | 0 \le \pi_i \le q_i, i \in I\}$ の最適解とする。θ_ξ を $Q(x,y,\xi)$ の上界とすると、$\theta_\xi \ge \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\hat{\pi}_i a_j(\xi)x_{ij} - \sum_{i\in I}\hat{\pi}_i b_i y_i$ は *(MASTER)* の妥当不等式になる。

以下に示す整数 L-shaped 法のアルゴリズムにおいては、主問題の得られた解 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta})$ より最適性カットを添加する。最適性カットは、主問題の最適解において、$Q(\hat{x}, \hat{y}, \xi)$ を近似するものである。

整数 L-shaped 法 (ε : 許容誤差)

- **ステップ 0.** 暫定目的関数値 $\bar{z} = \infty$、目的関数の下界値 $\underline{z} = 0$ とする。
- **ステップ 1.** 主問題の最適解 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta})$ を求める。
- **ステップ 2.** $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\hat{x}_{ij} + \sum_{i\in I} f_i\hat{y}_i + \hat{\theta} > \underline{z}$ ならば、$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\hat{x}_{ij} + \sum_{i\in I} f_i\hat{y}_i + \hat{\theta} = \underline{z}$、$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\hat{x}_{ij} + \sum_{i\in I} f_i\hat{y}_i + \mathcal{Q}(\hat{x}, \hat{y}) < \underline{z}$ ならば、$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\hat{x}_{ij} + \sum_{i\in I} f_i\hat{y}_i + \mathcal{Q}(\hat{x}, \hat{y}) = \underline{z}$ とする。
- **ステップ 3.** $\bar{z} \le (1+\varepsilon)\underline{z}$ ならば終了。
- **ステップ 4.** $\xi \in \Xi$ に対して、$\hat{\theta}_\xi < Q(\hat{x}, \hat{y}, \xi)$ ならば、最適性カットを追加してステップ 1. へ。

整数 L-shaped 法と、確率変数の全実現値に対する需要制約を有する展開形 (extensive form) の混合整数計画問題に対する分枝限定法との比較を行った。$|I| = 20, |J| = 60$ のとき、単位需要量当りの容量増設費用が低い場合、分枝限定法の計算時間は、L-shaped 法の約 3 倍であるのに対して、容量増設費用が高い場合は、約 8.8 倍となり、開発した L-shaped 法が、計算時間の点でいずれも有効である。結果の詳細は、椎名 [38] を参照されたい。図 2 は目的関数が、初期投資費用と設備増設費用の和となることを表している。設備増設費用が高くなる場合、非線形性が高まるために、L-shaped 法による線形近似が有利となる。以上のように、電力

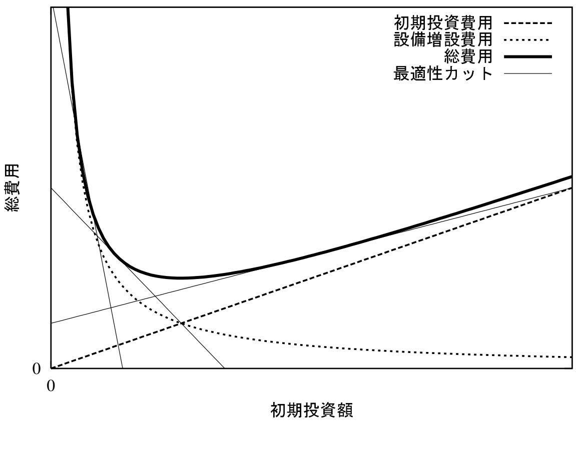

図 2: 目的関数の構造と最適性カット

用通信網においては、将来の通信量の不確実性を考慮

することが不可欠であるため、将来における設備の拡張に対応して、通信網設計計画に対する確率計画モデルを示した。そして整数条件を持ち、罰金に対する償還請求を有する確率計画問題として定式化される電力用通信網の設計問題に対し、L-shaped 法と分枝限定法とを組み合わせた最適解法アルゴリズムを示した。

3.4　モデルの拡張と電源計画への応用

多期間にわたる集線装置への設備投資を考えたモデルでは、各期の決定がその期までに実現した確率変数の履歴に依存するため、複雑な問題となる。T 期間の各期において n 個のシナリオが起こりうる場合、全体として n^T 個のシナリオを考慮しなければならない。Shiina[29] では、通信需要の単調費減少性と設備増設費用の単調非増加性を仮定して、この問題を n 個のシナリオを持つ T 個の問題へと分解できることを示した。

また、L-shaped 法に基づく解法は電源計画に応用可能である。電源計画では、電力需要と建設費用および燃料費などの変動を考慮して、発電設備の建設を計画する. Shiina-Birge [32] では、電源計画に L-shaped 法を応用した。Louveaux [19] によって示された多期間の確率計画問題が持つ分解可能性 (block separable recourse) を用いて電源計画が 2 期間の確率計画問題へ帰着できることを示し、効率的に問題を解くアルゴリズムを示した。この手法では、決定変数を次期以降に影響を与える変数群 (aggregate level decisions) と当該期のみの決定となる変数群 (detailed level decisions) に分類する。前者は設備建設に相当し、後者は発電出力に関する変数となる。設備建設に関わる変数のみを含む主問題を解き、実行不可能解を実行可能性カット (feasibility cut) で排除し、発電費用を最適性カットで近似しながら最適計画を求めるものである。

4　組合せ条件を有する多期間の確率計画問題

4.1　発電機起動停止問題の背景と目的

本節では、発電機の起動停止問題 (unit commitment problem) を考える。この問題は、時間帯ごとに与えられた電力需要を満たすように、各発電機の起動停止スケジュールおよび発電量を求める問題であり、大規模かつ複雑なスケジューリング問題である。電力系統においては、設備の補修点検を考えることが不可欠である。補修計画は、考慮する要素の離散性から、組合せ最適化問題として定式化される。椎名-久保 [43] は、補修計画に対する切除平面法と分枝限定法に基づく最適解法アルゴリズムを示した。起動停止問題においては、補修計画に基づいて稼動可能な発電機が与えられているものとする。椎名 [40] は、ラグランジュ緩和法によって各発電設備毎に問題を分割することにより、効率的にスケジュールを生成し、同時に電力需要を満たすようにスケジュールを合成するアルゴリズムを示した。本手法により、需要変動による供給費用コスト上昇のリスクを回避することができる。

4.2　シナリオツリーによる需要変動の表現

起動停止の運用を $t = 1, \ldots, T$ の離散的な時間で考える。時間帯 t における電力需要 $\tilde{d}_t$ を確率変数であると定義し、その実現値を d_t と表す。確率変数 $\tilde{d}_t$ は有限の離散分布に従うと仮定する。T 時間にわたる確率変数の実現値の組 $d = (d_1, \ldots, d_T)$ をシナリオと呼ぶ。分布の離散有限性から, シナリオの個数を S 個と定義し、s 番目のシナリオ $d^s = (d_1^s, \ldots, d_T^s)$ が生起する確率を $p_s(\sum_{s=1}^S p_s = 1)$ とする。シナリオは次の図 3 において、ツリーの根ノードから末端のノードへの路として表される。

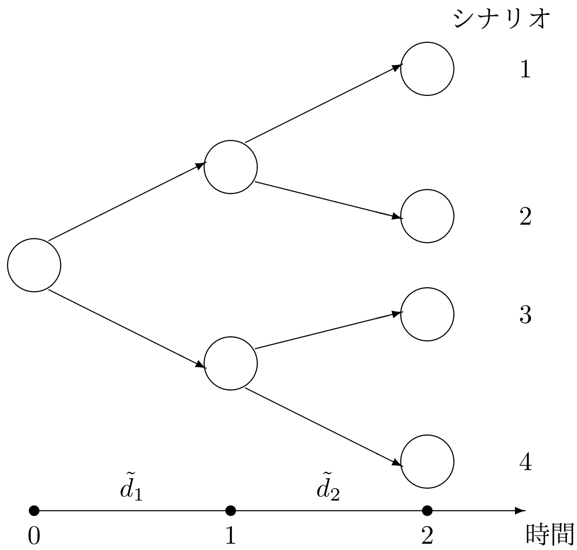

図 3: シナリオのツリー表現

2 つのシナリオ d^{s_1}, d^{s_2} $(s_1 \neq s_2)$ がある時間帯 t までの履歴において、$(d_1^{s_1}, \ldots, d_t^{s_1}) = (d_1^{s_2}, \ldots, d_t^{s_2})$ を満たす場合、これらは時間帯 t までツリー上の同じ路をたどる。2 つのシナリオ d^{s_1}, d^{s_2} に対する意思決定は等しくなければならない。意思決定者は、時間 t の段階では

シナリオ d^{s_1} と d^{s_2} が将来 2 つの異なるシナリオに分岐することを見越して決定を行うことができない。時間 t では $t+1$ 時間以降の将来に関する情報が意思決定者には与えられておらず、時間 t までの d_t の履歴に従って決定をしなければならないためである。この条件を予測不可能性条件 (nonanticipativity) と呼ぶ。シナリオの添字集合 $\{1,\ldots,S\}$ は各時間において、互いに素な部分集合に分割できる。時間 t までの履歴においてシナリオ s と等しいシナリオの添字集合を $B(s,t)$ で表す。条件 $B(s',t)=B(s,t)$ かつ $B(s',t+1)\neq B(s,t+1), s'<s$, が満たされるならば、シナリオ s とシナリオ s' は時間 $t+1$ にツリー上で分岐する。シナリオ s が全ての $s'<s$ と過去の履歴を共有しない最初の時間を $\tau(s)$ で表し、シナリオ s の分岐点と呼ぶ。シナリオ 1 に対しては、$\tau(1)=1$ とする。

4.3 確率計画法による定式化

確率計画法に基づく起動停止問題モデルを以下の問題 (SUC) に示す。現実の電力システムにおける運用では、発電機の起動停止スケジュールは需要予測に基づいて固定され、需要変動は発電機の出力によって対応するものである。供給コストの変動リスクを把握し、需要変動に応じて的確な運用を求めるためには、このような現実に即した確率計画モデルを考えることが重要である。I 個の発電機による電力供給を考える。変数 u_{it} は発電機 i の時間 t における状態を表す 0-1 変数である。変数 x^s_{it} は発電機 i のシナリオ s における時間 t の出力である。起動・停止を表す 0-1 変数 u_{it} は全シナリオを通じて固定であるが、出力を表す変数 x^s_{it} はシナリオに応じて変動することに注意されたい。関数 $f_i(x^s_{it})$ は発電機 i の燃料費を表す x^s_{it} の 2 次関数である。関数 $g_i(u_{i,t-1},u_{i,t})$ は発電機 i の起動費用を表し、$(u_{i,t-1},u_{i,t})=(0,1)$ の時に正の起動費用となり、それ以外の場合には 0 となる関数である。

目的関数は、供給コストの最小化である。供給コストは、燃料費の全てのシナリオに対する期待値と起動費用の総和となる。制約はそれぞれ、出力の総和が電力需要を満たすための条件、発電機 i が起動した場合 L_i 時間にわたり連続運転を行わなければならない条件、発電機 i が停止した場合 l_i 時間にわたり連続停止しなければならない条件、発電機の出力の上下限条件 (Q_i, q_i はそれぞれ発電機 i の出力の上限値, 下限値である)、予測不可能性条件、および起動停止の 0-1 条件を表す。

(SUC): min

$$\sum_{s=1}^{S} p_s \sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T} f_i(x^s_{it})u_{it} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T} g_i(u_{i,t-1},u_{i,t})$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{I} x^s_{it} \geq d^s_t, t=1,\ldots,T, s=1,\ldots,S$$

$$u_{it}-u_{i,t-1} \leq u_{i\tau}, \tau=t+1,\ldots,\min\{t+L_i-1,T\},$$
$$i=1,\ldots,I, t=2,\ldots,T, s=1,\ldots,S$$

$$u_{i,t-1}-u_{it} \leq 1-u_{i\tau}, \tau=t+1,\ldots,\min\{t+l_i-1,T\},$$
$$i=1,\ldots,I, t=2,\ldots,T, s=1,\ldots,S$$

$$q_i u_{it} \leq x^s_{it} \leq Q_i u_{it},$$
$$i=1,\ldots,I, t=1,\ldots,T, s=1,\ldots,S$$

$$x^{s_1}_{it}=x^{s_2}_{it}, i=1,\ldots,I, t=1,\ldots,T,$$
$$\forall s_1,s_2\in\{1,\ldots,S\}, s_1\neq s_2, B(s_1,t)=B(s_2,t)$$

$$u_{it}\in\{0,1\}, i=1,\ldots,I, t=1,\ldots,T,$$

4.4 解法のアルゴリズムと数値実験

次のアルゴリズムにより (SUC) を解く。

- **ステップ 1.** 需要制約をラグランジュ緩和した問題を解く。出力 $x^{*s}_{it}, i=1,\ldots,I, s=1,\ldots,S, t=\tau(s),\ldots,T$ を求めた後に、動的計画法により $u^*_{it}, i=1,\ldots,I, t=1,\ldots,T$ を求める。
- **ステップ 2.** 出力 $x^{*s}_{it}, t=\tau(s),\ldots,T, s=1,\ldots,S$ を修正する。
- **ステップ 3.** ラグランジュ乗数を更新する。

設備数 $I=10$、運用時間数 $T=$168(時間) のシステムを対象として数値実験を行った。1 時間毎の 1 週間の想定需要データをもとに、図 4 のようにシナリオを与えた。

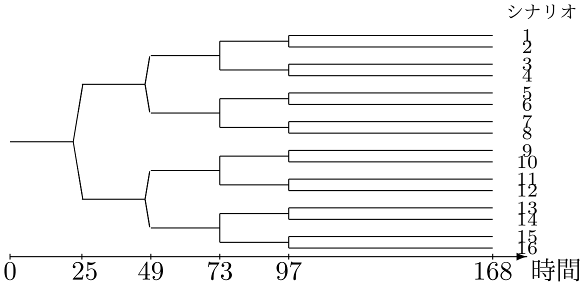

図 4: 起動停止問題のシナリオの構造

表 2: 各シナリオにおける需要変動

シナリオ	確率	時間			
		25-48 月曜	49-72 火曜	73-96 水曜	97-120 木曜
1	0.0625	0	0	0	0
2	0.0625	0	0	0	+10%
3	0.0625	0	0	+20%	0
4	0.0625	0	0	+20%	+10%
5	0.0625	0	+20%	0	0
6	0.0625	0	+20%	0	+10%
7	0.0625	0	+20%	+20%	0
8	0.0625	0	+20%	+20%	+10%
9	0.0625	+10%	0	0	0
10	0.0625	+10%	0	0	+10%
11	0.0625	+10%	0	+20%	0
12	0.0625	+10%	0	+20%	+10%
13	0.0625	+10%	+20%	0	0
14	0.0625	+10%	+20%	0	+10%
15	0.0625	+10%	+20%	+20%	0
16	0.0625	+10%	+20%	+20%	+10%

(+10%, +20%はそれぞれ、想定需要に対する増加割合を示す。)

確定的数理計画モデル（$S = 1$ である問題）と確率計画モデルの比較を行うに際し、確定的モデルとして、月火水木の各曜日の需要に対応する供給予備率を (5%, 10%, 10%, 5%)（表 2 の 16 個のシナリオにおける需要の平均値に対応）から (10%, 20%, 20%, 10%)（表 2 において最も需要の大きい第 16 シナリオに対応）まで幅 (1%, 2%, 2%, 1%) で上昇させた 6 個の問題について考える。確定的数理計画モデルを解いて得られたスケジュールを 16 個のシナリオに当てはめて、供給費用の期待値を計算する。

表 3 より予備率を低めに設定すると、供給不足が起こる可能性があり、逆に高く設定すると確率計画で得られる解よりもコストが高くなる恐れがある。

本節では、発電機起動停止問題に対して現実のシステムの運用を反映させ、かつ電力需要の不確実性を考慮した新たな確率計画モデルを示した。本手法により、供給不足に陥るというリスクを回避すると同時に、需要変動による供給費用コスト上昇のリスクを回避することができる。起動停止問題に対しては、Shiina-Birge[33] による列生成法の応用のようにさらに効率的な解法が望まれている。Shiina[30] では、列生成法とラグランジュ緩和法とを併用することにより、供給費用を減少させることを可能とした。

表 3: 確率計画と確定的計画の比較

モデル	供給費用の期待値
確率計画（提案法）	3669641
確定的 (5%,10%,10%,5%)	供給不足
確定的 (6%,12%,12%,6%)	供給不足
確定的 (7%,14%,14%,7%)	供給不足
確定的 (8%,16%,16%,8%)	供給不足
確定的 (9%,18%,18%,9%)	3858235
確定的 (10%,20%,20%,10%)	3858235

電力自由化以降の電力取引の形態は、次の 2 つに大別される。

- 電力会社－顧客との相対契約による従来と同様の電力供給
- 電力プールによる取引

プール取引とは、ある地域内の供給事業者が、プールと呼ばれる電力市場から電力を購入する。プール市場では、発電側と需要側の入札を受けて、取引量と取引価格が決定される。今後予定される電力自由化に向けて、図 5 のような電力取引を考慮したモデル (Shiina-Watanabe [36]) の開発と実用化が課題である。

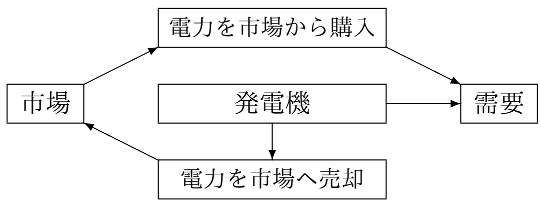

図 5: 市場での売買を考慮したモデル

5 同時機会制約条件を有する確率計画問題

5.1 電力供給計画の背景と目的

本節では、複数の制約が同時に成立するという同時機会制約条件を有する確率計画問題を取り扱う。この

問題は、一般的には非線形性の高い制約を含む。同時機会制約条件を有する問題の電力供給計画への応用を考える。電力供給計画においては、予測外の事態発生に対しても、安定した電力供給を可能とするために予め想定需要を越えて保有する供給予備力を必要としている。椎名 [37] は、機会制約条件を電力供給計画に導入した。このモデルは、電力需要を季節毎の近似負荷曲線として与え、時間帯毎の需要変動に対応して、供給力と予備力を併せた設備稼動可能容量を求めるものである。確率分布として、各時間帯の電力需要が独立な正規分布に従うと仮定したが、実際には時間帯毎の電力需要は相関がみられる。そのため、Shiina[27] では、電力需要量の相関を考慮した同時機会制約条件を含む電力供給計画モデルが示された。

5.2 機会制約条件計画問題としての定式化

新設、既設の設備稼働可能容量の総和が季節 s、時間帯 t において電力需要 $\tilde{P}_{st}$ を上回るという条件を考える。ただし、I, J, S, T をそれぞれ、新設設備、既設設備、季節、時間帯の集合とし、v_{ist}, w_{jst} をそれぞれ、新設設備 i の季節 s の時間帯 t における稼動可能容量、既設設備 j の季節 s の時間帯 t における稼動可能容量とする。

$$\sum_{i\in I} v_{ist} + \sum_{j\in J} w_{jst} \geq \tilde{P}_{st} \tag{5}$$

ここで、$\tilde{P}_{st}$ を確率変数であると定義し、この制約を機会制約条件へと拡張する。$\tilde{P}_{st}$ の時間帯 t に関する同時確率分布関数を $F_s(x) = \mathrm{P}(x_1 \geq \tilde{P}_{s1}, \ldots, x_{|T|} \geq \tilde{P}_{s|T|})$ とする。同時機会制約条件は、季節 s において、電力需要 $\tilde{P}_{st}, t \in T$ を同時に上回る設備の稼動可能容量を確率 α_s 以上で保持することを意味する。

$$F_s(\sum_{i\in I} v_{is1} + \sum_{j\in J} w_{js1}, \ldots, \sum_{i\in I} v_{is|T|} + \sum_{j\in J} w_{js|T|}) \geq \alpha_s \tag{6}$$

5.3 需要変動確率分布と Gauss 型数値積分

電力需要 $\tilde{P}_{st}, t \in T, s \in S$ が正規分布に従うと仮定する。このとき、機会制約条件を満たす解集合は、凸集合となるが、分布関数が多次元の積分を含むため、椎名 [37] では確率分布の近似式を用いた。Williams-山内の近似式 (山内 [52]) において $k = 0$ とおくと、標準正規分布の確率分布関数 $\Phi(u)$ は以下の式で近似できる。

$$\Phi(u) \approx \tilde{\Phi}(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \exp(\frac{-2u^2}{\pi})}, u \geq 0 \tag{7}$$

電力需要の分布関数を与えると、設備稼働可能容量の需要充足条件が計算できる。ここで、電力需要 $\tilde{P}_{st}$ は $t \in T$ に関して独立であるとみなす。すると、季節 s の確率分布関数 F_s は、各時間帯の周辺分布関数 f_{st} の積となる。

$$F_s(x_{s1}, \ldots, x_{s|T|}) = \prod_{t\in T} f_{st}(x_{st}) \tag{8}$$

また p_{st}, σ_{st} をそれぞれ、P_{st} の平均と標準偏差とする。すると、$\frac{P_{st}-p_{st}}{\sigma_{st}}$ は平均 0, 分散 1^2 の正規分布 $\mathcal{N}(0, 1^2)$ に従うので、制約条件は以下のようになる。

$$\prod_{t\in T} \tilde{\Phi}\left(\frac{\sum_{i\in I} y_{ist} + \sum_{j\in J} z_{jst} - p_{st}}{\sigma_{st}}\right) \geq \alpha_s \tag{9}$$

しかし、このような近似式によると、多変量正規分布の相関を表してはおらず、充足水準に対する正確な稼動可能容量保有という点で問題がある。そこで、多変量正規分布の分布関数値をを直接数値積分によって計算する。

Drezner[13] は重み e^{-x^2} の Gauss 公式によって以下のように積分値を求めている。$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)^\top \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, R)$ の密度関数を各 x_i について $-\infty$ から a_i まで m 重積分し、その値を $\Phi_m(\boldsymbol{a}, R)$ とする。$\boldsymbol{x}$ の平均は $\boldsymbol{0}$、R は相関行列でその逆行列の (i, j) 成分を r_{ij} とする。

$$\begin{aligned}\Phi_m(\boldsymbol{a}, R) \quad = \quad & \int_{-\infty}^{a_m} \cdots \int_{-\infty}^{a_1} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} (\mathrm{det} R)^{\frac{1}{2}}} \\ & \exp(-\frac{1}{2} x^\top R^{-1} x) dx_1 \ldots dx_m\end{aligned} \tag{10}$$

ここで、Gauss 公式を適用するが、数値計算上同数の分点に対しては $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{0}$ の時に誤差が小さいと経験的に言われている。そこで、次の関係式を再帰的に用いる。

$$\begin{aligned}&\Phi_m(\boldsymbol{a}, R) \\ &\quad = \quad \Phi_{m-1}(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_m, R^i_{m-1}) \\ &\quad - \quad \Phi_m(a_1, ..., a_{i-1}, -a_i, a_{i+1}, ..., a_m, R^{-i}_m)\end{aligned} \tag{11}$$

式 (11) より、積分項は $1 \sim m$ 重積分を含み、その項数は 2^m となるが、積分区間は全て $-\infty \to -a_i$ となる。R^i_{m-1} は $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_m)$ の相関行列、R^{-i}_m は $(x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, x_m)$ の相関行列である。Gauss 公式の適用に際し、$y_i = (a_i - x_i)\sqrt{r_{ii}/2}$ と変数変換

をする。このとき、$y_i : \infty \to 0$ であるから、積分は $m = 4$ の場合、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\Phi_4(\boldsymbol{a}, R) \\
= &\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \{ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{4}{2}} (\mathrm{det} R)^{\frac{1}{2}}} \exp(-y^\top y) \\
&\exp \left\{ y^\top y - \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \frac{(a_i \sqrt{\frac{r_{ii}}{2}} - y_i) r_{ij} (a_j \sqrt{\frac{r_{jj}}{2}} - y_j)}{r_{ii} r_{jj}} \right\} \\
&\prod_{i=1}^{4} (-\frac{1}{\sqrt{r_{ii}/2}}) \} dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 \\
\approx &\frac{1}{(2\pi)^2 (\mathrm{det} R)^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^{4} (-\frac{1}{\sqrt{r_{ii}/2}}) \\
&\sum_{i_1=1}^{k} \sum_{i_2=1}^{k} \sum_{i_3=1}^{k} \sum_{i_4=1}^{k} A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4} g(y_1, y_2, y_3, y_4)
\end{aligned} \tag{12}
$$

ただし、以下のように定める。

$$
g(y) = \exp \left\{ y^\top y - \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \frac{(a_i \sqrt{\frac{r_{ii}}{2}} - y_i) r_{ij} (a_j \sqrt{\frac{r_{jj}}{2}} - y_j)}{r_{ii} r_{jj}} \right\} \tag{13}
$$

積分公式は、[0,∞] 領域における Gauss 公式を領域の直積 $[0, \infty]^4$ へと拡張したものであり、$A_{i_1}, \ldots, A_{i_4}$ は $e^{-y^\top y}$ に対応する重み係数である。

5.4 数値実験

次のようなデータを用いて数値積分を行った。1 年間の 4 季節 4 日間 4 時間帯各 6 時間毎、計 16 の電力需要平均値および分散を用いて、季節毎の 4 次元正規分布関数を設定した。発電設備としては、現在既に存在する既設設備が 18 設備、導入を計画できる新設設備が 7 設備あると仮定する。

以上の条件の下で、確率的電力供給計画モデルを解いた結果を示す。非線形最適化については、最適化ソフトウェア NUOPT(山下 [51]) の信頼領域法を用い、数値積分法の Drezner[13] のサブルーチンでは、各次元における分点数を 2 点から 10 点まで、数値積分値の値の差が、与えたパラメータ 1×10^{-4} に収まるまで分点数を増加させ計算を繰り返す。以下の結果では、確率 0.95,0.99 の時いずれも 10 点以内の分点数で積分値が収束している。下の表 4 では参考のため、相関を無視した場合の結果も示した。

機会制約条件を含まない場合、各時間帯に保有する設備稼動可能容量はその時間帯の電力需要の平均値と等しくなる。すなわち、供給予備力を全く保持しない

表 4: 電力供給計画における目的関数の最適値

各季の充足確率	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99
無相関と仮定	1.08	1.14	1.24	1.29	1.40
相関を考慮	1.01	1.07	1.18	1.23	1.35

(機会制約条件を含まない場合の最適値を 1 とする)

運転となる。これに対して、各季節の需要充足確率を変化させた時の最適値の比率を図 6 に示した。何れの場合も、時間帯毎の相関を考慮した方が、最適値の比率が小さくなっている。これは時間帯毎の電力需要の相関が全て正となっているためであると考えられる。これより精密な経済運用には、相関を考慮することが不可欠であることがわかる。実際の供給計画では、供給信頼度が 1 に近い値に設定することが必要である。例えば、供給信頼度 0.99 とは、100 日間の供給計画に対して、供給不足となるのが 1 日以下となることを示す。このように供給信頼度が 1 に近づくに従い、目的関数の最適値は発散する。そこで、充足確率と最適費用の関係を以下の両対数グラフ図 7 で表現すると、対数線形に近い関係が得られ、供給の安全性と経済性のトレードオフについて、定量的な見積もりができる。図 7 から、充足確率を 0.9 から 0.99 へ上昇させた時、最適値比率が 1.18 から 1.35 へと増加し、最適値自体は $\frac{1.35}{1.18} \approx 1.15$ 倍になることが分かる。

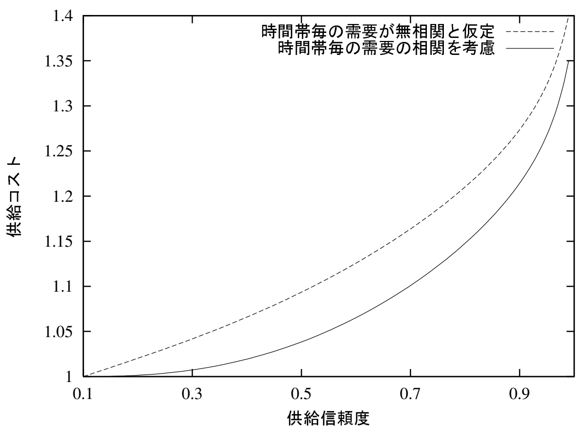

図 6: 目的関数の最適値の比率

本節では、これまで理論的には研究されてきたが、実際問題への適用が必ずしも容易でなかった同時機会制約条件を有する確率計画モデルが、数値積分法を導入することによって、電力供給計画に実用可能であることを示した。特に、変数間に相関がある場合、モンテカルロ法によるシミュレーションなどを用いずに、機

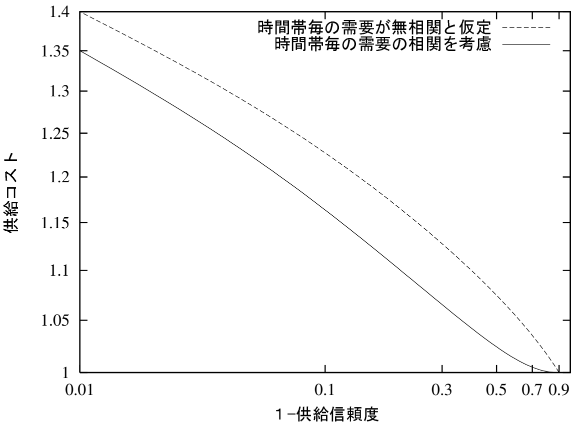

図 7: 目的関数の最適値の比率 (両対数グラフ)

会制約条件の計算を行うことができることを示した。

6 おわりに

現実の数理計画問題には不確実性が含まれる。これらの不確実性を考慮しない場合には、求めた解の実行可能性が侵されたり、または解の最適性が失われるというおそれがある。そのため、確率計画法に基づく不確実な状況下での最適化を考え、電気事業における重要性が高い、通信網設計、発電機の起動停止スケジューリング、電力供給計画へと応用した (椎名 [41])。

今後の重要な課題として、連続分布を持つ確率変数を含む確率計画問題が考えられる。連続分布を持つ問題は、シミュレーション手法とも深く関連し、応用可能性の高さからも重要である (ShiinaTokoro-Shinohara [35], Shiina [31])。他にも、組合せ条件を考慮した確率計画問題は現在最も研究が進んでいる分野であり、応用も幅広い (Shiina-Tagaya-Morito [34], 椎名 [42])。

確率計画法は、本論文に挙げた問題に限らず、多くの分野のシステムの最適化問題に対して有効であるため、今後も解法の発展および効率化と、幅広い分野で大規模な現実問題への適用が期待できる。

参考文献

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin. *Network Flows*. Prentice Hall, 1993.

[2] J. F. Bard. Short-term scheduling of thermal-electric generators using Lagrangian relaxations. *Operations Research*, Vol. 36, pp. 756–766, 1988.

[3] J. F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed - variables programming problems. *Numerische Mathematik*, Vol. 4, pp. 238–252, 1962.

[4] D. P. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, 1982.

[5] D. Bertsekas and R. Gallager. *Data Networks*. Prentice Hall, 1987.

[6] J. R. Birge. Decomposition and partitioning methods for multistage stochastic linear programs. *Operations Research*, Vol. 33, pp. 989–1007, 1985.

[7] J. R. Birge. Stochastic programming computation and applications. *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 9, pp. 111–133, 1997.

[8] J. R. Birge, C. J. Donohue, D. F. Holmes, and O. G. Svintsitski. A parallel implementation of the nested decomposition algorithm for multistage stochastic linear programs. *Mathematical Programming*, Vol. 75, pp. 327–352, 1996.

[9] J. R. Birge and F. Louveaux. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer series in operations research. Springer-Verlag, 1997.

[10] A. Charnes and W. W. Cooper. Chance constrained programming. *Management Science*, Vol. 6, pp. 73–79, 1959.

[11] G. B. Dantzig. Linear programming under uncertainty. *Management Science*, Vol. 1, pp. 197–206, 1955.

[12] J. K. Delson and S. M. Shahidehpour. Linear programming applications to power system economics, planning and operations. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 7, pp. 1155–1163, 1992.

[13] Z. Drezner. Computation of multivariate normal integral. *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 18, pp. 470–480, 1992.

[14] Y. Ermoliev and R. J.-B. Wets, editors. *Numerical Techniques for Stochastic Optimization*. Springer Series in Computational Mathematics 10. Springer-Verlag, 1988.

[15] 石井博昭. 確率論的最適化, pp. 1–40. 講座・数理計画法 10. 産業図書, 1982.

[16] G. Laporte and F. V. Louveaux. The integer l-shaped method for stochastic integer programs with recourse. *Operations Research Letters*, Vol. 13, pp. 133–142, 1993.

[17] G. Laporte, F. V. Louveaux, and L. Van Hamme. Exact solution to a location problem with stochastic demands. *Transportation Science*, Vol. 28, pp. 95–103, 1994.

[18] F. V. Louveaux. A solution method for multistage stochastic programs with recourse with application to an energy investment. *Operations Research*, Vol. 28, pp. 889–902, 1980.

[19] F. V. Louveaux. Multistage stochastic programs with recourse with block-separable recourse. *Mathematical Programming Study*, Vol. 28, pp. 48–62, 1986.

[20] F. V. Louveaux and D. Peeters. A dual-based procedure for stochastic facility location. *Operations Research*, Vol. 40, pp. 564–573, 1992.

[21] J. A. Muckstadt and S. A. Koenig. An application of lagrangian relaxation to scheduling in power-generation systems. *Operations Research*, Vol. 25, pp. 387–403, 1977.

[22] H. Pirkul and R. Gupta. Topological design of centralized computer networks. *International Transactions in Operational Research*, Vol. 4, pp. 75–83, 1997.

[23] A. Prékopa. Contributions to the theory of stochastic programming. *Mathematical Programming*, Vol. 4, pp. 202–221, 1973.

[24] A. Prékopa. *Stochastic Programming.* Kluwer Academic Publishers, 1995.

[25] A. Ruszczyński and A. Shapiro, editors. *Stochastic Programming.* Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 10. Elsevier, 2003.

[26] M. Shahidehpour, H. Yamin, and Z. Li. *Market Operations in Electric Power Systems -forecasting, scheduling and risk management-.* John Wiley & Sons, 2002.

[27] T. Shiina. Numerical solution technique for joint chance-constrained programming problem–an application to electric power capacity expansion–. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 42, pp. 128–140, 1999.

[28] T. Shiina. Integer programming model and exact solution for concentrator location problem. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 43, pp. 291–305, 2000.

[29] T. Shiina. L–shaped decomposition method for multi-stage stochastic concentrator location problem. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 43, pp. 317–332, 2000.

[30] T. Shiina. A lagrangian relaxation and column generation algorithm for stochastic unit commitment problem. *Journal of Statistics & Management Systems*, Vol. 6, , 2004.

[31] T. Shiina. Capacity expansion problem by Monte Carlo sampling method. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, Vol. 13, pp. 697–703, 2009.

[32] T. Shiina and J. R. Birge. Multistage stochastic programming model for electric power capacity expansion problem. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 20, pp. 379–397, 2003.

[33] T. Shiina and J. R. Birge. Stochastic unit commitment problem. *International Transactions in Operational Research*, Vol. 11, pp. 19–32, 2004.

[34] T. Shiina, Y. Tagaya, and S. Morito. Stochastic programming problem with fixed charge recourse. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 50, pp. 299–314, 2007.

[35] T. Shiina, K. Tokoro, and Y. Shinohara. Optimization method via Monte Carlo sampling. *International Journal of Computational Science*, Vol. 1, pp. 256–270, 2007.

[36] T. Shiina and I. Watanabe. Lagrangian relaxation method for price based unit commitment problem. *Engineering Optimization*, Vol. 36, pp. 705–719, 2004.

[37] 椎名孝之. 確率的電力供給計画モデル. 第 7 回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 37–52, 仙台, 1995. 日本オペレーションズ・リサーチ学会.

[38] 椎名孝之. コンピューターネットワーク設計に対する確率計画モデル. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 10, pp. 37–50, 2000.

[39] 椎名孝之. 確率計画法. 久保幹雄, 田村明久, 松井知己（編）, 応用数理計画ハンドブック, pp. 710–769. 朝倉書店, 2002.

[40] 椎名孝之. 確率計画法による発電機起動停止問題. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 13, pp. 181–190, 2003.

[41] 椎名孝之. 電気事業への確率計画法の応用. 知能と情報, Vol. 16, pp. 528–539, 2004.

[42] 椎名孝之. 固定費を有する確率計画法の電源計画への応用. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 54, pp. 735–738, 2009.

[43] 椎名孝之, 久保幹雄. 電力設備補修計画に対する切除平面／分枝限定法. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 8, pp. 157–168, 1998.

[44] S. Takriti and J. R. Birge. Lagrangian solution techniques and bounds for loosely coupled mixed-integer stochastic programs. *Operations Research*, Vol. 48, pp. 91–98, 2000.

[45] S. Takriti, J. R. Birge, and E. Long. A stochastic model for the unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 11, pp. 1497–1508, 1996.

[46] 田村康男（編）. 電力システムの計画と運用. オーム社, 1991.

[47] R. Van Slyke and R. J.-B. Wets. L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic linear programs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 17, pp. 638–663, 1969.

[48] R. J.-B. Wets. Stochastic programming. In G. L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan, and M.J. Todd, editors, *Optimization*, Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 1, pp. 573–629. Elsevier, 1989.

[49] R. Wollmer. Two stage linear programming under uncertainty with 0-1 integer first stage variables. *Mathematical Programming*, Vol. 19, pp. 279–288, 1980.

[50] A. J. Wood and B. J. Wollenberg. *Power Generation, Operation and Control.* John Wiley & Sons, 1996.

[51] 山下浩. 大規模システム最適化のためのアルゴリズム、モデリング、ソフトウェア. 応用数理, Vol. 6, pp. 26–37, 1996.

[52] 山内二郎（編）. 統計数値表. 日本規格協会, 1972.