2017/3/31 Course N@vi

シラバス参照[2017年度/オペレーションズリサーチA/今泉 淳/椎名 孝之]

授業情報				
開講年度	2017年度	開講箇所	大学院創造理工学研究科	
科目名	オペレーションズリサーチA			
担当教員	今泉 淳/椎名 孝之			
学期曜日時限	春学期 01:金3時限			
科目区分	講義	配当年次	1年以上	単位数 2
使用教室		キャンパス	西早稲田(旧大久保)	
科目キー	5201031056	科目クラスコード	01	
授業で使用する言語	日本語			
コース・コード	MGTX66ZL			
大分野名称	経営工学			
中分野名称	経営工学			
小分野名称	数理工学(含OR, 確率·統計)			
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	修士レベル	授業形態	講義]

4 _ 14 49	
シラバス情報	
授業概要	この講義では、「基礎OR」・「OR演習」で学んだ知識をもとに、線形計画法の解法とモデル化に関する中級的内容と組合せ最適化の理論と応用に関する入門的な内容を取り扱う。 具体的には、線形計画法(LP)の初歩的知識を前提として、線形計画問題に対する改訂単体法、双対単体法、列生成法等といった単体法の拡張形、双対性、目標計画、確率計画等の線形計画問題の拡張形を扱う。また、ナップザッり問題、カッティングストック問題、集合被覆/分割問題、巡回セールスマン問題やスケジューリング、あるいはネットワークフローなどの組合せ最適化と整数計画問題を取り上げ、主として確定的最適化の諸モデルと解法を、応用例を交えて解説する。なお、時間の許す範囲で、生産システムなど経営システムエ学の関連分野でよく扱う最適化問題についても論ずる。
授業の到達目標	改訂単体法を中心とする線形計画法の数式に基づく理解 双対性の理解 AMPLによる定型的数理計画問題の定式化と実装、求解 組み合わせ最適化の定式化の習得 代表的な組み合わせ最適化問題とその解法の理解
事前・事後学習の内容	予習として、事前配布するの事前読了を求めます。各回の予習には90分~120分かかると想定されます。事後学習として、講義内容に関連する課題を解くことが求められます。課題を完了するには90分~120分かかると想定されます。
授業計画	 線形計画法(単体法)の復習(椎名) 単体表のやや詳しい見方、行列表現の基礎(椎名) 行列表示による単体法(椎名) 改対理論(椎名) 分枝限定法(椎名) ネットワーク最適化(椎名) 典型的組合せ最適化問題(その1)(今泉) 典型的組合せ最適化問題(その2)(今泉) 定式化、インディケータ変数の使用(その1)(今泉) 定式化、インディケータ変数の使用(その2)(今泉) ロットサイズ決定問題(今泉) 列生成法、カッティングストック問題(今泉) 最適化の応用(今泉)または 招聘講師による講演 理解度の確認とその解説 未定(椎名)教場試験を行う。
教科書	授業で使用するPowerPointのコピー、付随する資料や論文などをまとめて製本した小冊子を配布予定。
	森雅夫・森戸晋・山本芳嗣・鈴木久敏 著 「オペレーションズリサーチI」 A5/184ページ/1991年10月20日 ISBN978-4-254-20953-2 C3350 定価3.360円(税込)朝倉書店 刀根薫 著 「数理計画」 A5/248ページ/2007年09月20日 ISBN978-4-254-11776-9 C3341 定価4.515円(税込)朝倉書店
成績評価方法 	割合 評価基準 試験: 60% 期末試験1回のみ レポート: 20% レポートの提出を単位認定の前提とする 平常点評価: 20% 授業時間内の課題を提出していることを単位認定の前提とする
備考·関連URL	配付資料をもとに講義を行います。 数理計画ソフトウェアに関する内容は、AMPLの基礎的な使い方を除いてこの科目では扱わなくなりました。 より高度な数理計画モデルの実装・演習は、「最適化・シミュレーション演習」(秋学期、金、1限)で扱います。

Copyright © Waseda University 2006-2017.All rights reserved. Ver. 7.0.0

第1回:線形計画法

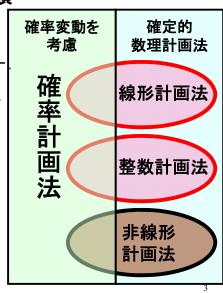
線形計画法の基本⇒中級

- 第1回 線形計画法復習
- 第2回 単体法復習、行列・ベクトル表示
- 第3回 改訂単体法(1)
- 第4回 改訂単体法(2)
- 第5回 双対理論
- 第6回分枝限定法
- 第7回 ネットワーク最適化
- ・「基礎OR」で学んだこと(確認)
- 単体法の計算:「単体表の構造」(復習)
- · 授業サポートページ(予定) http://shiina.mgmt.waseda.ac.jp

2

数理計画法の分類

- 数理計画法:制約条件下で目的関数最適化
- ・現実の問題(生産、エネルギー 経営、公共政策):目的関数お よび制約条件に不確実要素を 伴う
- ・ 線形計画法:歴史
- · 1947年 単体法 Dantzig
- · 1979年 楕円体法 Khachian 多項式時間解法, 非実際的
- · 1984年 内点法 Karmarkar 理論的には多項式時間解法, 実際的に効率的



線形計画問題

- 発泡酒(x₁×100L)とビール(x₂×100L)の生産計画 (利益最大化)
- 発泡酒利益2万円/100L, ビール3万円/100L
- 発泡酒原料(ホップ1kg/100L, 麦1kg/100L)
- ビール原料(ホップ1kg/100L, 麦2kg/100L)
- ホップは4kg, 麦は6kgしか使えない

4

標準型線形計画問題(LP)

- 非負変数 n 個 $x_1,...,x_n \ge 0$
- 等号制約 *m* 本

$$\text{(LP)} \left| \begin{array}{ll} \min & z = \sum\limits_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{subject to} & \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right|$$

標準型最小化問題への変形

$$\begin{array}{ll} \max & z=2x_1+3x_2\\ \text{subject to} & x_1+x_2\leq 4\\ & x_1+2x_2\leq 6\\ & x_1,x_2\geq 0 \end{array}$$

- $z=2x_1+3x_2$ の最大化⇒ $z=-2x_1-3x_2$ の最小化
- 非負のスラック変数x₃,x₄の導入(等式制約に変形)

6

基底形式への変形

min
$$z = -2x_1 - 3x_2$$

subject to $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
 $x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

- ・ 注意点:まず等式制約に
- z(目的関数)行の変数xの項を移項
- z-(xを含む元の目的関数項)=定数項の形に

$$\begin{vmatrix} 0 = z & +2x_1 & +3x_2 \\ 4 = & x_1 & +x_2 & +x_3 \\ 6 = & x_1 & +2x_2 & +x_4 \end{vmatrix}$$

基底形式と基底解

min
$$z = -2x_1 - 3x_2$$

subject to $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
 $x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$

- 2個(等式制約数)の基底変数(目的関数に入らない)
- 4-2個(変数総数-基底変数個数)の非基底変数

$$\begin{vmatrix} 0 = z & +2x_1 & +3x_2 \\ 4 = & x_1 & +x_2 \\ 6 = & x_1 & +2x_2 \end{vmatrix} + x_3 + x_4$$

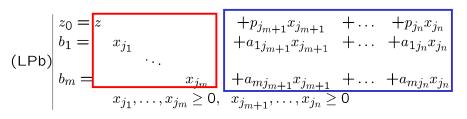
- 基底解-基底変数: x_3 = , x_4 =
- 基底解-非基底変数: $x_1 = , x_2 =$

基底形式

(LP)
$$\min \ z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$
 subject to
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m$$

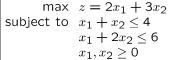
$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

- m個の基底変数と(n-m)個の非基底変数
- 制約式の連立方程式は、基底変数に関して解けており、 基底変数は目的関数に含まれない。
- $z=\sum cx$ の形式を $z+\sum px=0$ と移項 (p=-c)
- $b_1,...,b_m \ge 0$ である場合、可能基底形式



LPの実行可能領域

 x_2



• 凸多面集合

 $x_1 + x_2 \le 4$ $z = -2x_1 - 3x_2$ の等高線

実行可能領域が有 界な空でない集合な らば、最適解はある 端点で与えられる

10 X1

 $x_1 + 2x_2 \le 6$

単体表

$$\begin{vmatrix}
0 = z & +2x_1 & +3x_2 \\
4 = & x_1 & +x_2 & +x_3 \\
6 = & x_1 & +2x_2 & +x_4
\end{vmatrix}$$

単体基準より、改善可能か判断 非基底変数 基底変数

目的	基底変数	定数項	z	x_1	x_2	x_3	<i>x</i> ₄
関数	z	0	1	2	3	0	0
行	x_3	4	0	1	1	1	0
	x_4	6	0	1	2	0	1

- $z+2x_1+3x_2=0$ において、 $p_1,p_2>0$ である
- $x_1=x_2=0$ から非基底変数の値を増やせば、 zの値が減少する可能性がある。(非基底 変数 x_2 を基底変数にする。)
- $p_1 < p_2$ なので、 x_2 の値を0から θ まで増やす

非基底変数の値を増加(基底一非基底入れ換え)

$$\begin{vmatrix}
0 = z & +2x_1 & +3x_2 \\
4 = & x_1 & +x_2 & +x_3 \\
6 = & x_1 & +2x_2 & +x_4
\end{vmatrix}$$

 $x_4 = 6 - 2 \times \theta \ge 0 \rightarrow \frac{6}{2} \ge \theta$ $\theta = \frac{6}{2}$ を選択

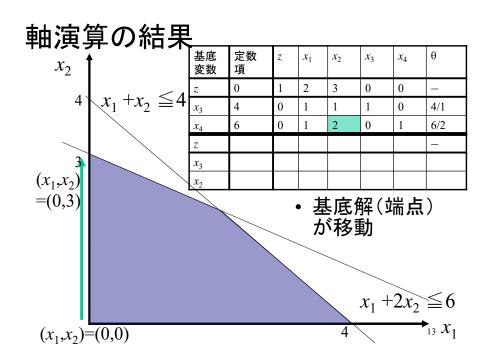
	基底変数	定数項	z	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
	z	0	1	2	3	0	0	_
	x_3	4	0	1	1	1	0	4/1
1	x_4	6	0	1	2	0	1	6/2
	基底変数	定数項	z	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
	Z(旧 Z 行一旧 Z 行×3/2)	-9						_
	z (旧 z 行一旧 2 行× $3/2$) x_3 (旧 1 行一旧 2 行× $1/2$)	-9 1						_

基底変数: x₃=4, x₄=6

基底変数: $x_3=1, x_2=3$

12

被約費用



最適性の判定

• 軸演算2回目

基底 変数	定数 項	z.	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
Z	-9	1	0.5	0	0	-1.5	_
x_3	1	0	0.5	0	1	-0.5	1/0.5
x_2	3	0	0.5	1	0	0.5	3/0.5
z							
x_1		·					
x_2							

負の 被約費用 全て負 または0

14

• $z-x_3-x_4=-10$ において、 $x_3=x_4=0$ である どの非基底変数の値を増やしても、 zの値が減少しない。 $p_3,p_4<0$

軸演算の結果 定数 x_2 -1.5 0.5 0.5 -0.5 1/0.5 0.5 0.5 3/0.5 $+x_2 \leq 4$ (x_1,x_2) $(x_1,x_2)=(2,2)$ =(0,3)• 基底解(端点) が移動 $x_1 + 2x_2 \le 6$ $(x_1,x_2)=(0,0)$

別の軸演算規則(Blandの規則)

• x_2 ではなく x_1 の値を0から θ まで増やす($p_1,p_2>0$ であるため、目的関数が改善できる)。

6 / 103

軸演算

第2回 線形計画法

tshiina@waseda.jp

- 単体法の基本定理
- · (2段階単体法)
- 行列・ベクトル表示
- ・ 授業サポートページ(予定) http://www.shiina.mgmt.waseda.ac.jp/ora/
- · 第3回 改訂単体法
- 第4回 改訂単体法(レポート課題)
- · 第5回 双対定理

単体法: 軸演算

 $\begin{array}{ll} \min & z = -2x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$

基底変数	定数項	z	x_1	x_2	x_3	<i>x</i> ₄	θ
z	0	1	2	3	0	0	_
x_3	4	0	1	1	1	0	4/1
x_4	6	0	1	2	0	1	6/2
Z.	-9	1	0.5	0	0	-1.5	_

z	-9	1	0.5	0	0	-1.5	_
x_3	1	0	0.5	0	1	-0.5	1/0.5
x_2	3	0	0.5	1	0	0.5	3/0.5

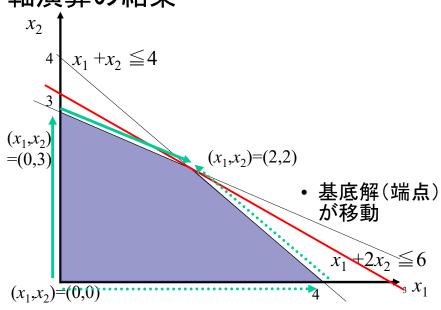
z	-10	1	0	0	-1	-1	
x_1	2	0	1	0	2	-1	
x_2	2	0	0	1	-1	1	

負の被約費用 (単体基準) 全て負 または0

• $z-x_3-x_4=-10$ において、 $x_3=x_4=0$ であるどの非基底変数の値を増やしても、 zの値が減少しない。 $p_3,p_4<0$

2

軸演算の結果



基底形式

(LP)
$$\min_{j=1}^{n} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
 subject to
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, n$$

- m個の基底変数と(n-m)個の非基底変数
- 制約式の連立1次方程式は、基底変数に関して解けており、基底変数は目的関数に含まれない。
- $z=\sum cx$ の形式を $z+\sum px=0$ と移項 (p=-c)
- *b*₁,...,*b*_m≥0である場合、可能基底形式

単体法の基本定理

定理 1 可能基底形式において, 次の(i), (ii) のいずれか一方が成り立つ. ただし j_{m+1},\ldots,j_n は非基底変数の添字を表す.

 $(i)p_{j_l} \leq 0, l=m+1,\ldots,n$ となり、現在の基底解が最適解となる.

(ii) $b \in \{j_{m+1}, \dots, j_n\}$ において $p_k > 0$ となる.

 $(iia)a_{ik} \leq 0, i=1,\ldots,m$ が成り立ち、zは下に有界でない。

 $(iib)a_{hk} > 0, h \in \{1, ..., m\}$ となる a_{hk} を軸とする軸演算を行うと、可能基底形式が得られるようなhが存在する。 新たな可能基底形式における目的関数の値は増加しない。

(ii) ある $k \in \{j_{m+1},\ldots,j_n\}$ において $p_k > 0$ となる. (iia) $a_{ik} \leq 0, i = 1,\ldots,m$ が成り立ち、 zは下に有界でない. $\min z = -x_1 - x_2$

単体表

* *	<u> ヤユ</u>	X		甘皮亦粉	中米市				
z_0		+		基底変数	定数項	x_1	x_2	x_3	x_4
+		_	\dashv	z	0	1	1	0	0
または		または		x_3	0	-1	0	1	0
0		0		x_4	0	0	-1	0	1

_							l		
$\begin{vmatrix} z_0 \\ b_1 \end{vmatrix}$	= z $=$	x_{j_1}		$x_{j_{m+1}} x_{j_{m+1}} + x_{j_{m+1}}$		$+ p_k x_k - + a_{1k} x_k$	+ +	$+p_{j_i} + a_{1j}$	$_{_{n}}^{_{_{i}}}x_{j_{n}}$
b_m	=	x_{j_m}	$+a_{mj_m}$	$x_{j_{m+1}} x_{j_{m+1}}$	+	$+ a_{mk} x_k$	+	$+a_{m_{i}}$	$_{n}x_{j_{n}}$
		x _k をθに増加 しても常に非	- 負	0のま	ま	θに増加	П	0の	まま

• 解 $x_{j_i} = b_i - a_{ik}\theta$, $x_k = \theta > 0$ は制約を満たす

 $(i)p_{j_l} \leq 0, l = m+1, \ldots, n$ となり、現在の基底解が最適解となる.

基底変数	定数項	z	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
z	-10	1	0	0	-1	-1	
x_1	2	0	1	0	2	-1	
x_2	2	0	0	1	-1	1	

• 目的関数 $z_0=z+\sum_{l=m+1}^n p_{j_l}x_{j_l}$ なので、どの非基底変数を0から増やしても改善。

(ii) ある $k \in \{j_{m+1}, \ldots, j_n\}$ において $p_k > 0$ となる. (iib) $a_{hk} > 0, h \in \{1, \ldots, m\}$ において, a_{hk} を軸とする軸演算を行うと,可能基底形式が得られるようなh が存在する. $\theta = \frac{b_h}{a_{hk}} = \min_{i \in \{1, \ldots, m\}} \{\frac{b_i}{a_{ik}} | a_{ik} > 0\}$

• 単体表

	_		
z_0		+	θ
+			
または		+	b_h/a_{hk}
0			

基底 変数	定数 項	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	x_3	<i>x</i> ₄	θ
Z	0	2	3	0	0	_
x_3	4	1	1	1	0	4/1
x_4	6	1	2	0	1	6/2

$$\begin{array}{lll} x_{j_1} = & b_i - a_{1k}\theta & = a_{1k}(\frac{b_1}{a_{1k}} - \theta) \geq 0 \\ & \vdots & & x_3 = 1(4/1 - \theta) \\ x_{j_h} = & b_h - a_{hk}\theta & = a_{hk}(\frac{b_h}{a_{hk}} - \theta) = 0 \\ & \vdots & & \\ x_{j_m} = & b_m - a_{mk}\theta & = a_{mk}(\frac{b_m}{a_{m-k}} - \theta) \geq 0 \end{array}$$

s.t. $x_1, x_2 \ge 0$

7 ()

可能基底形式が得られている 場合の単体法アルゴリズム

ステップ $\mathbf{0}$ $b_i \geq 0, i = 1, ..., m$ が満たされているものとする.

ステップ 1 $p_{j_l} \leq 0, l = m+1, \ldots, n$ ならば終了,現在の 基底解が最適解である. $p_k > 0$ を満たす $k \in \{j_{m+1}, \ldots, j_n\}$ が存在する場合はステップ2へ.

ステップ 2 $p_k = \max_{l \in \{m+1,...,n\}} p_{j_l}$ とする. $a_{1k},\ldots,a_{mk} \leq 0$ ならば無限解が存在するので終了. $a_{ik} > 0$ となるiが存在する場合はステップ 3 \sim .

ステップ 3 $\theta_h = b_h/a_{hk} = \min_{i \in \{1,...,m\}} \{b_i/a_{ik} | a_{ik} > 0\}$ とおいて a_{hk} を軸とする軸演算を行い,ステップ 1に戻る.非基底変数 x_k は基底変数となり,基底 変数 x_{j_h} が非基底変数となる.

アルゴリズム

単体表(i)単体基準チェック

z_0	z	$p \le 0$ かどうか
+ または0		

• 単体表(iia) p_k>0

z_0	+	
+ または0	ー または 0	

単体表(iib)軸演算 最小のθ

新たな基底解≧0

Z ₀	+ または	+	b_h/a_{hk}
	<i>z</i> ₀ +		θ

退化と巡回

- 軸演算において常に $b_h > 0$ ならば、有限回の反復後に最適解が得られるか、下に有界でないかを判定
- b_h=0の場合、単体表は退化している
- 一度使われた基底が再び出現し、同じ基底変換 が繰り返される現象を巡回と呼ぶ。
- 巡回を避けるためには、Blandの最小添字ルール (定理1の(ii)で p_k >0となる最小添字を選択し、 (iib)でも最小番号のhを選択)

$$\frac{b_h}{a_{hk}} = \min_{i \in \{1,...,m\}} \{ \frac{b_i}{a_{ik}} | a_{ik} > 0 \}$$

行列表示:基本

・ 基本的にベクトルは列ベクトル(縦)表示

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n), b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$c = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right), \ A = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right) = (a_1, \ldots, a_4), \ b = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right), \ x = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right)$$

12

行列表示:基底変数、非基底変数

(LP)
$$\begin{vmatrix} \min & z = c^{\top}x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{vmatrix}$$

•基底とは…線形代数から

- •線形空間Vにおける線形独立なベクトルの組 •任意のVの要素は基底の線形結合で表せる
- ・Aの線形独立なm個の列ベクトル⇒基底B
- ・基底変数に対応する制約行列の係数ベク トル

•A=(B,N)=(基底行列, 非基底行列)

rank A = m A = (B,N) $x^{\top} = (x_B^{\top}, x_N^{\top})$ $c^{\top} = (c_B^{\top}, c_N^{\top})$

13

$$\text{(LPm)} \begin{vmatrix} \min & z = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^\top \boldsymbol{x}_N \\ \text{subject to} & B\boldsymbol{x}_B + N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N \geq 0 \end{vmatrix}$$

行列表示:単体表

$$\text{(LPm)} \left| \begin{array}{ll} \min & z = c_B^\top x_B + c_N^\top x_N \\ \text{subject to} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array} \right|$$

_	Z	x_B	x_N
0	1	$-c_B^{T}$	$-c_N^{T}$
b	0	В	N

・ 基底形式だろうか?なぜ?

14

基底形式:行列表現

 $ar{c}_N^ op = c_N^ op - c_B^ op B^{-1}N$ は被約費用(reduced cost) と呼ばれ, $z = c_B^ op B^{-1} b + ar{c}_N^ op x_N, \ ar{c}_N = -p$ となる.

	z	x_B	x_N
$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B^{-1} N - c_N^{T}$
$B^{-1}b$	0	I	B-1N

 $c_B^ op B^{-1}$ を単体乗数と呼び, $oldsymbol{\pi}^ op = c_B^ op B^{-1}$ と表す.

• 基底解 $x_B = B^{-1} b$, $x_N = 0$, 目的関数值 $z = c_B^{\mathsf{T}} B^{-1} b$

軸演算と逆行列

- 逆行列の公式
- $A^{-1} = \{1/(\det A)\} \cdot (\operatorname{adj} A)^{\mathrm{T}}$ ただし $\operatorname{adj} A$ はAの余因子行列
- 普通は使わない(行列式計算など面倒)
- 逆行列の計算:
- (B, I) に基本変形を施し(I, B⁻¹)
- ・ 1番目の単体表→3番目の単体表(最適)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

第3回 改訂単体法

- 行列・ベクトル表示、改訂単体法
- 問題がある場合tshiina@waseda.jp へ連絡
- ・ 授業サポートページ(予定) http://www.shiina.mgmt.waseda.ac.jp/
- · 第3回 改訂単体法
- ・ 第4回 改訂単体法(レポート課題)
- · 第5回 双対理論

行列表示:基底変数、非基底変数

$$\begin{array}{c|c} \text{min} & z = c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- ・Aの線形独立なm個の列ベクトル⇒基底B
- ・基底変数に対応する制約行列の係数ベクトル
- •*A*=(*B*,*N*)=(基底行列, 非基底行列)

rank
$$A = m$$

 $A = (B, N)$
 $x^{\top} = (x_B^{\top}, x_N^{\top})$
 $c^{\top} = (c_B^{\top}, c_N^{\top})$

$$\text{(LPm)} \left| \begin{array}{ll} \min & z = c_B^\top x_B + c_N^\top x_N \\ \text{subject to} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array} \right|$$

2

基底形式:行列表現

- 制約行列 $Bx_B+Nx_N=b$ を基底変数 x_B について解く
- 目的関数から x を消去

•
$$x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \Rightarrow x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

・
$$z = c_B^{\mathsf{T}} x_B + c_N^{\mathsf{T}} x_N = c_B^{\mathsf{T}} (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) + c_N^{\mathsf{T}} x_N$$

$$= c_B^{\mathsf{T}} B^{-1} b + (c_N^{\mathsf{T}} - c_B^{\mathsf{T}} B^{-1} N) x_N$$

$$c_N^{\mathsf{T}} = c_N^{\mathsf{T}} - c_B^{\mathsf{T}} B^{-1} N : 被約費用(従来の -p = c)$$

	Z	x_B	x_N
$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B^{-1} N - c_N^{T}$
$B^{-1}b$	0	I	$B^{-1}N$

 $c_B^T B^{-1}$ を単体乗数と呼び、 $\pi^{T} = c_B^T B^{-1}$ と表す

• $\overline{\text{BER} x_B} = B^{-1} b, x_N = 0, \text{ Boly Mode } z = c_B^{-1} B^{-1} b$

軸演算と逆行列

- A⁻¹=1/(det A)·(adj A)^T ただし adj AはAの余
 因子行列: 普通は使わない(行列式計算など面倒)
- 逆行列の計算:(B, I)に基本変形を施し(I, B⁻¹)
- ・ 1番目の単体表→3番目の単体表(最適)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列の基本変形による計算

• (B, I) に基本変形を施し (I, B^{-1}) $J = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

基底変数	定数項	Z	<i>x</i> ₁	x_2	x_3	<i>x</i> ₄
z	0	1	2	3	0	0
x_3	4	0	1	1	1	0
x_4	6	0	1	2	0	1

$$J\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&2&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-0.5\\0&0.5\end{bmatrix}$$

	定数項	Z	x_1	x_2	r	<i>x</i> ₄
Z	-9	1	0.5	0	0	-1.5
x_3	1	0	0.5	0	1	-0.5
x_2	3	0	0.5	1	0	0.5 5

逆行列の出現位置

• (B, I)に基本変形を施し (I, B^{-1})

`						
基底変数	定数項	z	<i>x</i> ₁	x_2	x_3	<i>x</i> ₄
7	0	1	2	3	0	0
x_3 x_4	4	0	1	1	1	0
4	6	0	1	2	0	1

初期基底*B=I* の逆行列 *B-1=I* の位置に*B-1*





z	-9	1	1/2	0	0	-3/2
x_3	1	0	1/2	0	1	-1/2
x_2	3	0	1/2	1	0	1/2

D'	_	(1	1`
В		0	2

$$B^{'-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

-10	1	0	0	-1	-1
2	0	1	0	2	-1
2	0	0	1	-1	1

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{"-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

单体法: 効率化

• 単体表の軸演算を全て計算しなければならないか?

基底変数	定数項	7	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄	θ
Z	0	1	2	3	0	0	_
x_3	4	0	1	1	1	0	4/1
x_4	6	0	1	2	0	1	6/2

- 新たに基底変数となる候補の非基底変数を選ぶ には、目的関数(単体基準すなわち(負の)被約 費用)行の計算が必要
- 基底から出る基底変数の選択には、新たに基底 となる列と定数項の列の計算が必要

単体法:1反復の計算

• 入力データA, b, c を保存して、必要となる場合、その都度元データから使用(列B,Nの情報も保持)

		2.	x_B		x_N		
	$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B^{-1} N$		c_N^\intercal	
	$B^{-1}b$	0	I	<u>B</u> -1∧	<i>I</i>	$B^{-1}a_k$	
基底変数	定数項	z	x_1	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄	
z	0	1	2	3	0	0	
x_3	4	0	1	1	1	0	
x_4	6	0	1	2	0	1	
z	-9	1	1/2	0	0	-3/2	
x_3	1	0	1/2	0	1	-1/2	
x_2	3	0	1/2	1	0	1/2	

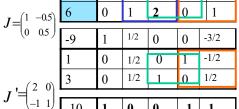
必要な情報:他には? R-1

改訂単体法:積形式の逆行列

• (B, I) に基本変形を施し (I, B^{-1}) 初期基底B=I



初期基底*B=I* の逆行列 *B⁻¹=I* の位置に*B⁻¹*



$$B=I, B^{-1}=I$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

 $(B')^{-1} = JB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

$$(B'')^{-1} = J'(B')^{-1} = J'JB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

初期基底の逆行列に軸演算行列を繰り返し掛けることによって新たな基底に対する逆行列が得られる

B⁻¹に軸演算を施すと、(B')⁻¹

・ 基底
$$B = (a_1,...,a_h,...,a_m)$$

が $B' = (a_1,...,a_k,...,a_m)$
に変わるものとする
(ただし、 $y_k = B^{-1}a_k$)

$$J_{hk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -y_{1k}/y_{hk} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & & & \\ & & \ddots & -y_{h-1,k}/y_{hk} & & & \\ \vdots & & & 1/y_{hk} & & \vdots \\ & & & -y_{h+1,k}/y_{hk} & \ddots & \\ & & & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & -y_{mk}/y_{hk} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B'J_{hk} = \left(a_1, a_2, \cdots, \left[-\frac{y_{1k}}{y_{hk}}a_1 - \cdots + \frac{1}{y_{hk}}a_k - \cdots - \frac{y_{mk}}{y_{hk}}a_m\right], \cdots, a_{m-1}, a_m\right)$$

$$= \left(a_1, a_2, \cdots, a_h, \cdots, a_{m-1}, a_m\right)$$

$$a_k = By_k = y_{1k}a_1 + \dots + y_{hk}a_h + \dots + y_{mk}a_m \downarrow^{h}$$

$$= B$$

- $(B')^{-1}B'J_{hk}B^{-1} = (B')^{-1}BB^{-1}$

.0

改訂単体法:保持すべきデータ

• 入力データA, b, c を保存して、必要となる場合、 その都度元データから使用

	\mathcal{Z}	x_B	x_N			
$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B^{-1} N - c_N^{T}$			
$B^{-1}b$	0	I	$B^{-1}N$ $B^{-1}a_k$			

必要な情報: B⁻¹の計算のために、□を保持しながら更新

	Z.	x_B	x_N			
$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B^{-1} N - c_N^{T}$			
$B^{-1}b$	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}a_k$	_	

 n >> m の場合、単体表全体を計算するよりも、 計算の手間が大幅に減少

改訂単体法: 逆行列の更新

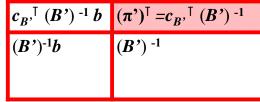
必要な情報: B⁻¹の計算のために、□を保持しながら更新

基底 *B*

	z	x_B	x_N		
$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B^{-1} N - c$		$c_N^{\;\;T}$
$B^{-1}b$	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}a_k$	

山軸演算後

基底 *B*'



初期単体表でB=I, $c_B=0$ ならば, x_B に対する目的関数の係数部分に $(\pi')^{T=}c_{B^{,T}}(B')^{-1}$ が現れるそうでない場合は当該箇所に π^{T} を入れておけばよい

• e_i 第i単位ベクトルがB'に入っていなければ、 c_{R} , 「(B') -1 e_i -0= (π') ,

改訂単体法:アルゴリズム

改訂単体法

- ステップ $\mathbf{0}$ 初期可能基底 B およびその逆行列 B^{-1} が与えられているものとする. B の列に対応する添字集合を S, N の列に対応する添字集合を T とする.
- ステップ 1 非基底変数の単体基準を $p^{\top} = c_B^{\top} B^{-1} N c_N^{\top}$ によって求める. $p \leq 0$ ならば終了,現在の基底解が最適解である. p に正の成分が存在する場合はステップ2~.
- ステップ 2 $p_k = \max_{j \in T} p_j$ とする. $y_k = B^{-1} a_k$ とし, $y_k \leq 0$ ならば 無限解が存在するので終了. y_k に正の成分が存在する場合はステップ3へ
- ステップ 3 $\theta_h = \overline{b}_h/y_{hk} = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \{\overline{b}_i/y_{ik} | y_{ik} > 0\}$ とおいて y_{hk} を軸とする軸演算を行列 $\left(\frac{c_B^{\top} B^{-1} \mathbf{b}}{B^{-1} \mathbf{b}} \middle| \mathbf{\pi}^{\top} = c_B^{\top} B^{-1} \right)$ に対して行い,ステップ1に戻る. 非基底変数 x_k は基底変数 となり,基底変数 x_k が非基底変数 となる.

13

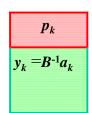
アルゴリズム図解

- ステップ1:*p*計算
- ステップ2: $y_k = B^{-1}a_k$

	Z	x_B	x_N		
$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B^{-1} N - c_N^{T}$		
$B^{-1}b$	0	I	$B^{-1}N$ $B^{-1}a_k$		

• ステップ3:軸演算

$c_B^{T} B^{-1} b$	$\pi^{T} = c_B^{T} B^{-1}$
$B^{-1}b$	B^{-1}

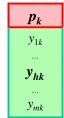


14

アルゴリズム: B-1への軸演算

ステップ3:軸演算前 B=(a₁,...,a_n,...,a_m)

$c_B^{T}B^{-1}b$	$\pi^{T} = c_B^{T} B^{-1}$
$B^{-1}b$	B -1



 $y_k = B^{-1}a_k$ $y_{hk} > 0$ 軸演算

• ステップ3:軸演算後 *B'=*(a₁,...,a_k,...,a_m)

$c_{B}^{,^{T}}(B')^{-1}b$	$(\pi')^{T} = c_{B'}^{T} (B')^{-1}$
$(B')^{-1}b$	(B ') -1



 a_k :基底 a_h :非基底

基底 $c_{B},^{\top}(B')^{-1}b \qquad (\pi')^{\top} = c_{B},^{\top}(B')^{-1}$ $(B')^{-1}b \qquad (B')^{-1}$

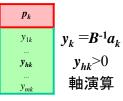
まとめ

ステップ1:p 計算
 ステップ2:y_k =B⁻¹a_k

 $R^{-1}h$

ステップ3:軸演算前 B=(a₁,...,a_h,...,a_m)

 $c_{\scriptscriptstyle R}^{\mathsf{T}} B^{-1} b \quad \pi^{\mathsf{T}} = c_{\scriptscriptstyle R}^{\mathsf{T}} B^{-1}$



• ステップ3:軸演算後 *B'=*(*a*₁,...,*a*_n)

0 ... 1 ... 0

 a_k :基底 a_k :非基底

第4回 改訂単体法 椎名孝之

- ・ 授業サポートページ http://www.shiina.mgmt.waseda.ac.jp/
- 問題がある場合 tshiina@waseda.jp
- 第4回 レポート課題提示
- 第5回 双対理論
- 第6回分枝限定法
- ・ 第7回 ネットワーク最適化

単体法:1反復の計算

• 入力データA, b, c を保存して、必要となる場合、その都度元データから使用(列B,Nの情報も保持)

	_	z	x_B		x_N	
	$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T}$	$B^{-1}N$	$-c_N^{T}$
	$B^{-1}b$	0	I	$B^{-1}N$	7	$y_k = B^{-1}a_k$
基底変数	定数項	z	<i>x</i> ₁	x_2	x_3	<i>x</i> ₄
z	0	1	2	3	0	0
x_3	4	0	1	1	1	0
x_4	6	0	1	2	0	1
z	-9	1	1/2	0	0	-3/2
x_3	1	0	1/2	0	1	-1/2
x_2	3	0	1/2	1	0	1/2

必要な情報:他には? R-1

単体法:効率化

• 単体表の軸演算を全て計算しなければならないか?

基底変数	定数項	z	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄	θ
z	0	1	2	3	0	0	_
x_3	4	0	1	1	1	0	4/1
x_4	6	0	1	2	0	1	6/2

- 新たに基底変数となる候補の非基底変数を選ぶ には、目的関数(単体基準すなわち(負の)被約 費用)行の計算が必要
- 基底から出る基底変数の選択には、新たに基底 となる列と定数項の列の計算が必要

2

B-1に軸演算を施すと、(**B**')-1

$$B'J_{hk} = \left(a_1, a_2, \cdots, \left[-\frac{y_{1k}}{y_{hk}} a_1 - \cdots + \frac{1}{y_{hk}} a_k - \cdots - \frac{y_{mk}}{y_{hk}} a_m \right], \cdots, a_{m-1}, a_m \right)$$

$$= \left(a_1, a_2, \cdots, a_h, \cdots, a_{m-1}, a_m \right)$$

$$a_k = By_k = y_{1k} a_1 + \dots + y_{hk} a_h + \dots + y_{mk} a_m \sharp \emptyset$$

$$= B$$

- $(B')^{-1}B'J_{hk}B^{-1} = (B')^{-1}BB^{-1}$
- これより $J_{hk}B^{-1}=(B')^{-1}$

4

改訂単体法:保持すべきデータ

• 入力データA, b, c を保存して、必要となる場合、 その都度元データから使用

	\boldsymbol{z}	x_B	x_N
$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B^{-1} N - c_N^{T}$
$B^{-1}b$	0	I	$B^{-1}N$ $B^{-1}a_k$

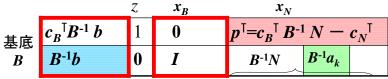
 必要な情報: B-1の計算のために、□を保持しな がら更新

	\mathcal{Z}	x_B	x_N
$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B^{-1} N - c_N^{T}$
$B^{-1}b$	0	I	$B^{-1}N$ $B^{-1}a_k$

 n >> m の場合、単体表全体を計算するよりも、 計算の手間が大幅に減少

改訂単体法: 逆行列の更新

 必要な情報: B-1の計算のために、□を保持しな がら更新



」軸演算後

		$(\pi')^{T} = c_{B'}^{T} (B')^{-1}$
基底 <i>B</i> '	(B ') ⁻¹ b	(B ') ⁻¹

初期単体表でB=I, $c_B=0$ ならば、 x_R に対する目的 関数の係数部分に $(\pi')^{T}=c_{R}$, 「(B') -1が現れる そうでない場合は当該筒 所にπ を入れておけばよ

まとめ

- ステップ1:p 計算
- ステップ2: $y_k = B^{-1}a_k$

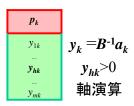
$z x_B$		_	x_N
$c_B^{T}B^{-1}b$	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B^{-1} N - c_N^{T}$
<i>B</i> ⁻¹ <i>b</i>	0	I	$B^{-1}N$ $B^{-1}a_k$

ステップ3:軸演算前 B=(a₁,...,a_h,...,a_m)

$c_B^{T}B^{-1}b$	$\boldsymbol{\pi}^{T} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{T} \boldsymbol{B}^{-1}$
$B^{-1}b$	B^{-1}

• ステップ3:軸演算後 B'=(a₁,...,a_k,...,a_m)

 $c_{B'}^{\mathsf{T}}(B')^{\mathsf{-}1}b \qquad (\pi')^{\mathsf{T}}=c_{B'}^{\mathsf{T}}(B')^{\mathsf{-}1}$ (**B**') -1 $(B')^{-1}b$



 a_k :基底 a_h :非基底 演習問題

• 改訂単体法

$$\begin{array}{ll} \max & z=x_1+x_2\\ \text{subject to} & x_1+2x_2\leq 8\\ & 2x_1+x_2\leq 10\\ & x_1,x_2\geq 0 \end{array}$$

第5回 双対理論 椎名孝之

- ・ 授業サポートページ http://www.shiina.waseda.ac.jp/
- 問題がある場合 tshiina@waseda.jp
- 第6回 分枝限定法(レポート課題提示)
- ・ 第7回 ネットワーク最適化

標準型線形計画問題(LP)の双対問題

- 主問題: 非負変数 n 個 $x_1,...,x_n \ge 0$
- 等式制約 *m* 本

min
$$c^{ op}x$$
(LP) subject to $Ax=b$
 $x>0$

- 双対問題: 変数 m個 $y_1,..., y_m$
- 不等式制約 n 本

(LP-dual)
$$\max_{\mathbf{y}^{\top} \mathbf{b}} \mathbf{y}^{\top} A \leq \mathbf{c}^{\top}$$

双対問題の導出:1

(LP)
$$\begin{array}{c|c} \min & c^{ op}x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ x > 0 \end{array}$$

• ラグランジュ乗数ベクトル $y \ge 2 \ge 0$ を $Ax = b \ge x \ge 0$ にかけ、目的関数に組み込む

$$(\mathsf{LR}(y,z)) egin{array}{ccc} \mathsf{min} & c^{ op}x + y^{ op}(b-Ax) - z^{ op}(x-0) \ &= (c^{ op} - y^{ op}A - z^{ op})x + y^{ op}b \end{array}$$

問題 (LR(y,z)) の目的関数の最適値

≤ 問題(LP)の目的関数の最適値

双対問題の導出:2

$$(\mathsf{LR}(y,z)) egin{array}{ccc} \mathsf{min} & c^{ op}x + y^{ op}(b-Ax) - z^{ op}(x-0) \ &= (c^{ op} - y^{ op}A - z^{ op})x + y^{ op}b \end{array}$$

- (LR(y,z))の変数xに符号制約はないので、目的 関数におけるxの係数ベクトルに非0成分があれ ば、目的関数値は $-\infty$ に発散(下界として意味無 し)
- 目的関数におけるxの係数ベクトルを0に保って $b^{T}y$ を最大化

(LP-dual)
$$\max_{\mathbf{y}^{ op} b} \mathbf{y}^{ op} A \leq \mathbf{c}^{ op}$$

ļ

弱双対定理

 $\begin{array}{c|c} \text{min} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x > 0 \end{array} \text{ max } \begin{array}{c} y^\top b \\ \text{subject to} & y^\top A \leq c^\top \end{array}$

- 目的関数値 $c^{\mathsf{T}}x \geq y^{\mathsf{T}}b$
- ・ 主問題: Ax=bにy「を左から掛ける $\Rightarrow y$ 「Ax=y」b
- 双対問題: $y^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \leq c^{\mathsf{T}}$ にxを右から掛ける $\Rightarrow y^{\mathsf{T}} \mathbf{A} x \leq c^{\mathsf{T}} x$
- ・この両者より $c^{\mathsf{T}}x \geq y^{\mathsf{T}}b$

主問題と双対定理に成り立つ関係

 $\begin{array}{c|c} \min & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array} \text{(LP-dual)} \begin{array}{c} \max & y^\top b \\ \text{subject to} & y^\top A \leq c^\top \\ x \geq 0 \end{array}$

- 系1:x,yをそれぞれ(LP), (LP-dual)の実行可能解とする。(LP)が無限解を持つならば、(LP-dual)は実行可能解を持たない。
- **系2**: x',y'をそれぞれ(LP), (LP-dual)の実行可能解とする。 $c^{\mathsf{T}}x'=y'^{\mathsf{T}}b$ ならば, x',y'はそれぞれ(LP), (LP-dual)の最適解となる。

6

双対定理

$$\begin{array}{c|c} \text{min} & c^\top x\\ \text{subject to} & Ax = b\\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\text{(LP-dual)} \begin{array}{c|c} \text{max} & y^\top b\\ \text{subject to} & y^\top A \leq c^\top \end{array}$$

・ 主問題(LP)が最適解を持つ場合, 双対問題 (LP-dual)も最適解を持ち, $c^{\mathsf{T}}x$ の最小値と $y^{\mathsf{T}}b$ の最大値は一致する。

双対定理の証明(方針)

$$\begin{array}{c|cccc} \min & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \text{(LP-dual)} \begin{array}{c|ccccc} \max & y^\top b \\ \text{subject to} & y^\top A \leq c^\top \end{array}$$

- 主問題(LP)の最適基底をB,基底解を $x_B^*=B^{-1}b$, $x_N^*=0$ とする。
- y * T= c_BTB-1とする。
- ・ 次の2つを示せばよい。
- 1.目的関数値は一致 *c*^T*x* * =*y* * ^T*b*
- 2. y *が双対問題(LP-dual)の実行可能解となる

双対定理の証明(概要)

 $\text{(LP)} \begin{vmatrix} \min & \boldsymbol{c}^{\top} \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} > 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \max & \boldsymbol{y}^{\top} \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^{\top} A \leq \boldsymbol{c}^{\top} \end{vmatrix}$

- 1.目的関数値は一致 $(x_B^*=B^{-1}b,x_N^*=0,y^*^{\intercal}=c_B^{\intercal}B^{-1})$ 主問題: $c^{\intercal}x^*=c_B^{\intercal}x_B^*+c_N^{\intercal}x_N^*=c_B^{\intercal}B^{-1}b$ 双対問題: $y^*^{\intercal}b=c_B^{\intercal}B^{-1}b$
- 2. y*が双対問題(LP-dual)の実行可能解となる $y*^\intercal A \leq c^\intercal$ を示す。A=(B,N)とすると, $y*^\intercal (B,N) \leq (c_B^\intercal,c_N^\intercal)$ より, 第1成分 $c_B^\intercal B^{-1} B \leq c_B^\intercal$ は明らかに成立 第2成分 $c_B^\intercal B^{-1} N \leq c_N^\intercal$ はBの最適性より成立 $p^\intercal = c_B^\intercal B^{-1} N c_N^\intercal \leq 0$ より

凸多面集合の性質

• 凸結合の定義

 $x^1, x^2 \in \Re^n, 0 \le \lambda \le 1$ であるとき、 $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ を x^1 と x^2 の凸結合という.



・ 凸集合の定義

 $S \subset \Re^n$ は, S の任意の 2 点 x^1 , x^2 の凸結合を含むとき, すなわち

 $x^1, x^2 \in \Re^n, 0 \le \lambda \le 1 \Rightarrow \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in S$

を満たすとき, 凸集合であるという.











双対理論のまとめ

○は起こり得るケース、×は起こり得ないケースを表す.

	双対問題	実行可	実行不可能	
主問題		最適解あり	無限解	
実行可能	最適解あり	0	×	X
無限解		X	×	0
実行不可能		×	0	0

相補スラック定理

定理 主問題 (LP) の実行可能解 x と, 双対問題 (LP-dual) の実行可能解 y がそれぞれ (LP) と (LP-dual) の最適解であるための必要十分条件は,

$$(\boldsymbol{c}^{\top} - \boldsymbol{y}^{\top} A) \boldsymbol{x} = 0$$

$$\boldsymbol{y}^{\top}(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0$$

が成立することである.

-10

凸多面集合

・ 超平面, 半空間の定義

ある0でないベクトル $\alpha \in \Re^n$ と $\alpha_0 \in \Re^1$ に対して定義される集合

$$H_0 = \{ \boldsymbol{x} \in \Re^n | \alpha^\top \boldsymbol{x} = \alpha_0 \}$$

を超平面といい,

$$H_{-} = \{ \boldsymbol{x} \in \Re^{n} | \alpha^{\top} \boldsymbol{x} \ge \alpha_{0} \}$$

を (超平面 H_0 で区切られる) 半空間という.

有限個の超平面,半空間の共通部分は凸 集合であり,凸多面集合と呼ばれる

(LP)の実行可能解集合

- (LP)の実行可能解集合は,有限個の超平面,半 空間の共通部分は凸多面集合であり,凸集合で ある。
- x^1, x^2 を(LP)の実行可能解とする。
- $x^1, x^2 \in \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \ge 0\}$
- x^1, x^2 の凸結合が(LP)の実行可能解になることを示す。
- $A (\lambda x^{1} + (1 \lambda) x^{2}) = \lambda A x^{1} + (1 \lambda) A x^{2}$ = $\lambda b + (1 - \lambda) b = b$
- ・非負性は明らか

13

端点(頂点)

端点(頂点)の定義

凸集合 S の点 \boldsymbol{x} は, S に含まれる相異なる 2 点 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in S$ を結ぶ開線分 $(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)$ 上の点にならないとき, すなわち,

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, 0 < \lambda < 1 \Rightarrow x = x^1 = x^2$$

という関係が成り立つとき, x を S の頂点 (端点) という.



(LP)の実行可能解集合の端点

• (LP)の実行可能解集合は,有限個の超平面,半 空間の共通部分は凸多面集合であり, 凸集合で ある。

定理 標準型線形計画問題 (LP) の 実行可能解集合を $X = \{x \in \Re^n | Ax = b, x \geq 0\}$ とすると, 実行可能基底解は X の端点である.

(LP)
$$\begin{vmatrix} \min & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ x \geq 0 \end{vmatrix}$$

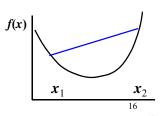
凸関数

定義 凸関数(convex function)

凸集合 $S \subseteq R^n$ に対して、関数 $f: S \rightarrow R^1$ はS上の2点 $x^1, x^2 \in S$ に対して

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$$

 $\lambda \in R^1$, $0 \le \lambda \le 1$ のときS上の凸関数という



双対問題の解釈1:生産計画

- 製造業者:製品1(y₁)と製品2(y₂)の生産計画(利益wの最大化)
- ・ 製品1の利益2万円/単位、製品2は3万円/単位
- 製品1を1単位生産するための原料(資源1は1kg, 資源2は1kg)
- 製品2を1単位生産するための原料(資源1は1kg, 資源2は2kg)
- 資源1は4kg, 資源2は6kgしか使えない

- ・ 総合商社: 資源1と資源2の買収を計画⇒買収費用zの最小化
- 資源1,2の1kgあたり価格をそれぞれ x,万円, x₂万円
- 製造業者が製品を作って売る利益より、商社に資源を売ることによる収入が大きくなければ取引が成立しない。
- 資源1を1kg+資源2を1kg売る収入 ≧ 製品1を1単位作って売る利益
- 資源1を1kg+資源2を2kg売る収入 ≥ 製品2を1単位作って売る利益

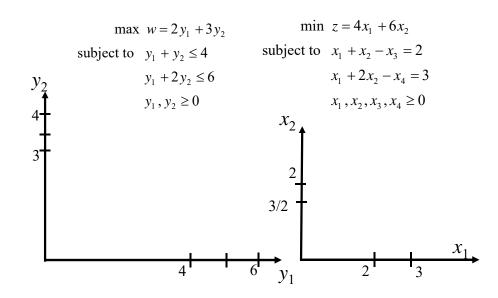
双対問題の解釈2:栄養問題

- ・ 食堂:新メニューの計画⇒食品購入費用をの最小化
- 食品1,食品2は1個当たり50円、100円、メニューに含まれる食品1,2の個数をそれぞれ x_1 個、 x_2 個
- 食品1は1個当たり栄養素1および2を50mg, 10mg含む
- 食品2は1個当たり栄養素1および2を50mg,30mg含む
- メニューで栄養素1,2のそれぞれを200mg,60mg以上摂取できるように

- 薬品販売業者:栄養素1(y₁)と栄養素2(y₂)の販売計画(利益wの最大化)
- 栄養素1の販売価格y₁円/mg, 栄養素2はy₂円/mg
- 栄養素1,2を直接食堂に販売するが、同じ分量の栄養素を含む食品の価格よりも安くなければならない。
- 食品1に含まれる栄養素1+2の価格≦食品1の価格
- 食品2に含まれる栄養素1+2の価格≦食品2の価格

双対問題の図解1

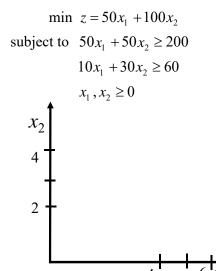
• 目的関数 $w=2y_1+3y_2 \le z=4x_1+6x_2$



双対問題の図解2

• 目的関数 $w = 200y_1 + 60y_2 \le z = 50x_1 + 100x_2$

max $w = 200y_1 + 60y_2$ y_2 subject to $50y_1 + 10y_2 \le 50$ $50y_1 + 30y_2 \le 100$ $y_1, y_2 \ge 0$



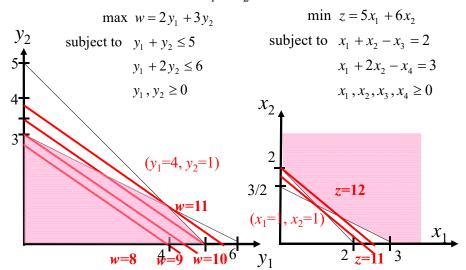
双対問題の最適解

- 製造業者:製品1と製品2の生産計画(利益最大化)
- 製品1,2の生産量 y₁, y₂
- 資源1は4kg, 資源2は6kgしか使えない
- 最適解 y₁*=2, y₂*=2
- •総合商社:資源1と資源2の買収を計画(買収費用の最小化)
- •資源1,2の1kgあたり価格をそれぞれ x₁万円, x₂万円
- •製品1,2からの利益2万、3万(円/単位)よりも高価格で買い取る必要がある
- •最適解 $x_1^*=1$, $x_2^*=1$, $x_3^*=0$, $x_4^*=0$

- •最適解において、目的関数 2 $y_1^* + 3y_2^* = 4x_1^* + 6x_2^*$
- •資源の使用制限量(4,6) \Rightarrow $(4+\Delta,6+\Delta)$ になると目的関数値は $\Delta x_1^* + \Delta x_2^*$ 増加
- •製品の価格(2,3) \Rightarrow $(2+\Delta,3+\Delta)$ になると目的関数値は $\Delta {y_1}^* + \Delta {y_2}^*$ 増加

双対問題:感度分析

- 制約の変化 y₁+y₂≤5
- 目的関数の変化 *z*=5*x*₁+6*x*₂



第6回 分枝限定法

- ・ 授業サポートページ http://www.shiina.mgmt.waseda.ac.jp/
- 問題がある場合tshiina@waseda.jp
- 第6回 分枝限定法(レポート課題提示)
- ・ 第7回 ネットワーク最適化

ナップサック問題(Knapsack Problem) KP

n個の品物のいくつかを容量bのナップサックに入れたい品物 j の大きさは a_j 価値は c_j 一価値を最大に

(KP) 最大化
$$z=\sum_{j=1}^{n} c_{j}x_{j}$$
 制約 $\sum_{j=1}^{n} a_{j}x_{j} \leq b$ $x_{i} \in \{0,1\}, \forall j$

より正確には、0-1 KP(問題データ*c,a,b*などは全て正整数) 0-1 条件の無いナップサック問題はGeneral KP(GKP).

例: (KP) 最大化
$$z=7x_1+8x_2+3x_3$$
 制約 $3x_1+4x_2+2x_3 \le 6$ $x_i \in \{0,1\}, \ \forall \ j$

ナップサック問題(KP)の緩和問題

(KP-LP)

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

s.t.
$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$
$$0 \leq x_j \leq 1, \ \forall j$$

 $c_j/a_j \stackrel{\textstyle extbf{Z}}{\geq} c_{j+1}/a_{j+1}, j=1,...,n-1$ が成り立つと仮定してよい(効率順)

最大化 $z=7x_1+8x_2+3x_3$

制約 $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6$

 $x_i \in \{0, 1\}, \ \forall j$

0-1整数計画最適解 x1=0, x2=1, x3=1

 $\Sigma_{j=1}^{r-1} a_j \leq b$ かつ $\Sigma_{j=1}^r a_j > b$ となる r が存在緩和問題の最適解は容易に求まる(貪欲解)

$$x_j = 1, j=1,...,r-1, x_r = (b-\sum_{j=1}^{r-1} a_j) / a_r,$$

 $x_j = 0, j=r+1,...,n$

緩和LP最適解は、

$$r=2$$
 のとき $x_1=1, x_2=(6-3)/4=3/4, x_3=0$

数理計画問題を解く解法 (アルゴリズム)

- ・「定式化」された問題は、適当な解法で解き、 解を求める
- ・パッケージを利用して解くか、自分でプログラムを書いて解く
- ・解法の種類(数理計画法)
 - <u>厳密解法</u>(最適性を保証する解を求める解法) → パッケージは通常、厳密解法
 - <u>近似解法</u>(最適性は保証しないが、良い解を素早く求める解法)

組合せ最適化の解法: 列挙法

- 列挙法(enumerative algorithm)
- ・いかに「すべての」解を『列挙』するか
 - 陽に(explicit)列挙/陰に(implicit)列挙
- ・ バックトラック法(backtrack algorithm)
 - 自分でプログラムするならこの方法が楽
 - 解の列挙順序はおおむね一意に定まる
- <u>分枝限定法(branch and bound method)</u>
 - パッケージはおおむね分枝限定法を利用
 - 解の列挙順序は解法の詳細に大きく依存

整数計画問題(IP)と その線形緩和問題(LP)との関係

- ・ 線形緩和問題の最適解を、四捨五入、切上げ、切下げなどにより整数値に丸めても、対応する整数計画問題の最適解が得られるとは限らない(実行可能解が得られない可能性もある)
- 線形緩和計画問題の最適(目的関数)値は、常に対応する整数計画問題(最大化問題を想定)の最適値の上界値を与える(最小化の場合は、下界値)
- もし線形緩和問題の最適解がたまたま整数値ならば、その解は対応する整数計画問題の最適解でもあり、同時に両者の最適値が一致する

LP/IPの実行可能解の集合

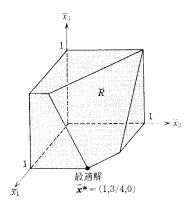


図 5.1 線形計画問題の実行可能領域

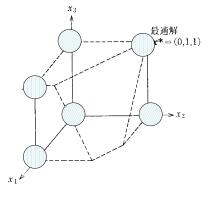


図 5.2 整数計画問題の実行可能領域

<u>分枝限定法</u> Branch and Bound Method

- 分枝(branching)変数値を制限(固定)する===>子問題、部分問題(subproblem)
- · 限定(bounding)

最適解の所在を絞り込む ===> 限定操作(探索を続けるべきか)

分枝限定法の基本用語

• 下界值、上界值

・<u>暫定(目的関数)値</u>: これまでに見つかって いる最良の解の目的関数値

・ 暫定解: これまでに見つかっている最良解

分枝変数: 分枝の対象となる変数

分枝頂点: 分枝の対象となる頂点(子問題)

・ <u>未分枝頂点</u>: まだ探索が終わっていない頂

点(子問題)

緩和問題による「上界値」算出

(最大化問題を想定)

- ・緩和問題(relaxation)= 元の問題の条件を緩和した問題
- ・代表的な緩和の方法
 - (1)整数条件を緩和
 - →線形緩和、連続緩和
 - (2)制約条件を除去
 - →ラグランジュ緩和
- ・緩和問題は、原則として、元の問題より解 きやすくなくては困る

上界值、下界值 upper/lower bounds

- ・問題が最大化か、最小化かによって、上界値と下界値の役割が逆転することに注意。 (z*は元の問題の最適目的関数値)
- ・ 最大化で考えると:

上界値: $z^* \le z$ が保証されている値 z (「緩和問題」の解は、 z^* の上界を与える)

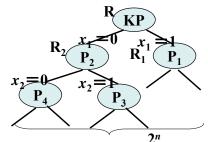
下界値: $z^* \ge z$ が保証されている値 z (任意の可能解は、 z^* の下界を与える)

・ 上界値(下界値)は小さい(大きい)ほどよい

分枝操作(branching operation)

ある問題(「親問題」)の実行可能領域をいくつかに分割して、 複数の「子問題(部分問題)」(subproblem)を生成する操作.

→ 分枝変数 (branching variable): 分割に用いた変数



R=(KP)の可能領域 $R_1=(P_1)$ の可能領域 $R_2=(P_2)$ の可能領域 $R_1\cup R_2=R$

 $R_1 \cup R_2 = R$ $R_1 \cap R_2 = \varphi$

列挙木(enumeration tree) 子問題=列挙木の頂点

限定操作(bounding operation) <最大化の場合>

ある子問題 (P_k) に分枝操作を施す必要があるか否かを判定する, 具体的には、子問題 (P_k) の緩和問題 (P_k) から得られる上界 z_k が、手元にある暫 定値 z^0 より大きいか否かを判定する操作.

O-1ナップサック問題に対する 分枝限定法の設計例

1)上界値の算出方法

線形緩和(LP)

2)<u>下界値(実行可能解)の算出方法</u>(KPは容易)

LP最適解の切り下げ

3)分枝変数の選択(どの変数で枝分かれするか?)

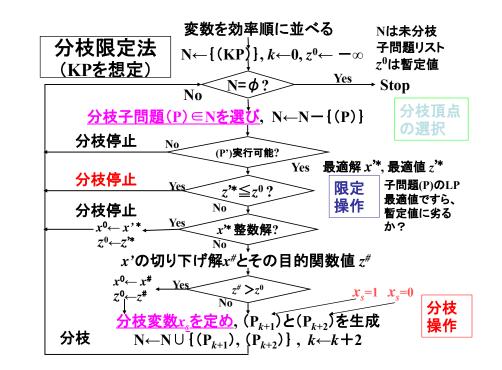
LP最適解で小数値をとる変数=0 問題番号を大きく(左子問題)

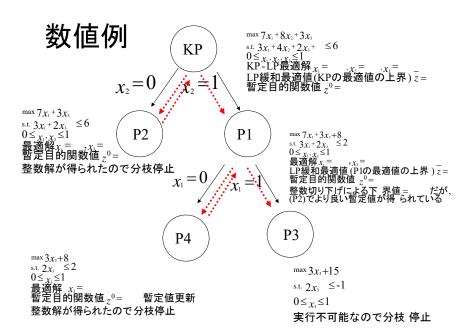
LP最適解で小数値をとる変数=1 問題番号を小さく(右子問題)

4)<u>分枝頂点(分枝子問題)の選択(どの頂点から分枝するか?)</u> 深さ(奥行)優先規則(未分枝頂点リストから最も番号の大きいもの)

分枝限定法設計のポイント

- ・ 分枝頂点の選択
 - 下界値(上界値)優先則
 - 奥行き優先則
 - 幅優先則(列挙木の中でもっとも浅い位置の未分枝頂 点)
- ・ 分枝変数の選択
 - 分枝変数の値を制限することによってなるべく目的関数値が悪化するような変数を選択
- 分枝限定法の効率を上げるには、緩和問題から得られる情報(最小化の場合下界値)がなるべく元問題の情報に近くなる定式化を工夫することも重要





第7回ネットワーク最適化

- ・授業サポートページ http://www.shiina.mgmt.waseda.ac.jp/ora/
- 質問は tshiina@waseda.jp
- 最短路問題
- 最大流問題

ネットワークに関する定義

- 有向グラフ G=(V, A)を考える(V: 点集合、A: 辺集合)
- 各辺 $(i,j) \in A$ に対して辺容量 h_{ij} が与えられている
- 各点 $i \in V$ に対して b_i が与えられている($b_i > 0$ ならば需要量、 $b_i < 0$ ならば供給量)
- x_{ij} は辺(i,j)上のフロー(流量)を表す
- V⁺(*i*)={k: (*i*,k)∈A} 点*i* から出る辺の終点集合
- $V(i) = \{k: (k,i) \in A\}$ 点i に接続する辺の始点集合

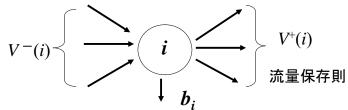
2

最小費用流問題

• 定式化 $\min \sum_{(i,j)\in A} C_{ij} X_{ij}$

subject to
$$\sum_{k \in V^{-}(i)} \chi_{ki} - \sum_{k \in V^{+}(i)} \chi_{ik} = b_i$$
, $\forall i \in V$

$$0 \le x_{ij} \le h_{ij}, \forall (i,j) \in A$$



ネットワークの例

• 流量保存則

接続行列の性質

- ・ 線形計画問題として定式化
- b,hが整数ベクトルならば最適解は必ず整数解
- 接続行列: 完全単模性を持つ(任意の小行列式が0,-1,1のどれかに等しい (totally unimodular)
- クラメルの公式:
 基底解 x_B=B⁻¹b=(1/det B)(adj B)b の分母が一1または1⇒整数性

5

最短路問題(Shortest Path Problem)

ネットワーク上の点s(始点;ソース)から点t (終点;シンク)までの最短路

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} X_{ij}$$

subject to
$$\sum_{k \in V^{-}(i)} \chi_{ki} - \sum_{k \in V^{+}(i)} \chi_{ik} = -1, \ i = s$$

$$\sum_{k \in V^{-}(i)} \chi_{ki} - \sum_{k \in V^{+}(i)} \chi_{ik} = 0, \ \forall i \in V \setminus \{s, t\}$$

$$\sum_{k \in V^{-}(i)} \chi_{ki} - \sum_{k \in V^{+}(i)} \chi_{ik} = 1, \ i = t$$

$$0 \le \chi_{ij}, \ \forall (i, j) \in A$$
最適解は $\chi_{ij} \in \{0, 1\}$

最短路問題の双対問題

$$\max_{s} \pi_{t} - \pi_{s}$$
subject to
$$\pi_{i} - \pi_{i} \leq C_{ij}, \forall (i, j) \in A$$

•任意のaについて π_i を π_i +a と置き換えても実行可能 \Rightarrow 始点で π_s =0と定める

 $\bullet\pi_i$ とは? \Rightarrow 始点sから点iへの最短距離の下界 $\bullet\pi_i$ をsからiへの最短距離と定めると双対問題の 実行可能解なので、双対問題を解いてもsからt への最短距離が求められることがわかる

最短路問題:主問題 ・辺上の数字は辺の長さ 0 3 1 2 6 5 2 3 3

min
$$10 \chi_{01} + 5 \chi_{02} + 2 \chi_{12} + \chi_{14} + 3 \chi_{21} + 2 \chi_{23} + 6 \chi_{34}$$

s.t. $-\chi_{01} - \chi_{02} = -1$
 $\chi_{01} - \chi_{12} - \chi_{14} + \chi_{21} = 0$
 $\chi_{02} + \chi_{12} - \chi_{21} - \chi_{23} = 0$
 $\chi_{23} - \chi_{34} = 0$
 $\chi_{ii} \ge 0, \forall (i, j) \in A$

最短路問題:双対問題

- π_j - $\pi_i \leq c_{ij}$
- ・ 点iまでの最短路の距離

(点iまでの最短路の距離 +(i, j) 間の距離)

Dijkstra(ダイクストラ)法

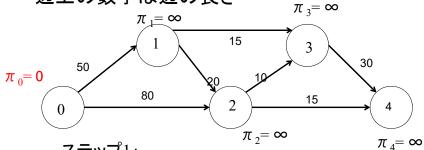
- ステップ1: $\pi_0=0, \pi_i=\infty (i\in V-\{0\}),$ $M=\{1,2,...,n\}, i=0$
- ステップ2: $M \neq \phi$ (空集合)でない場合(i)(ii)(iii) を繰り返す
 - (i) $j \in M$ に対し $\pi_i > \pi_i + c_{ii}$ ならば $\pi_i = \pi_i + c_{ii}$, $p_i = i$
 - (ii) $\min_{j \in M} \pi_j = \pi_k$ となるkを求める
 - (iii) kをMから除く、i=k とする

•M: 最短路未確定な点の集合

- 集合Mから削除されると最短路確定
- •*p*_i: 点 *j*への最短路の直前点(終了時)

最短路問題:演習

・辺上の数字は辺の長さ

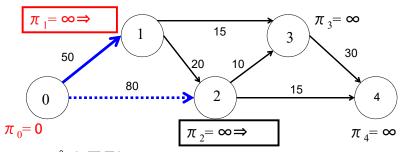


ステップ1:

 $\pi_0=0, \pi_i=\infty, (i\in M),$ $M=\{1,2,3,4\}$

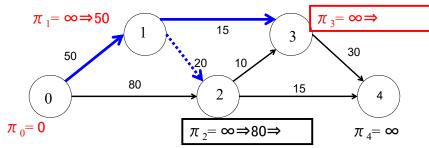
点0のみ最短路確定

i=0 よりスタート



ステップ2(1回目): *i*=0, *M*={1,2,3,4}

- (i) *M*={1,2,3,4}に到達する直前点を可能なら仮に *i*=0とする _なので<u>π₁=</u> *j*=1については *i*=2については なのでπっ=
 - j=3.4については、直接i=0と接続していないのでそのまま
- (ii) $\min_{i \in M} \pi_i = \{ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \} = \underline{\hspace{1cm}}$ 点 の最短路確定: 点 に到達する直前点が i=0となる
- (iii) <u>k=</u> をMから削除し、<u>i=</u> より再びステップ2を行う



ステップ2(2回目): *i*=1, *M*={2,3,4}

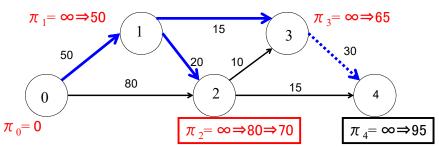
(i) M={2,3,4}に到達する直前点を可能なら仮に *i*=1とする

j=2については _____ なので π_2 = ____ , p_2 = ____ j=3については _____ なので π_3 = _____ , p_3 = ____ .

j=4については、直接*i*=1と接続していないのでそのまま

(iii) k= をMから削除し、i= より再びステップ2を行う

13

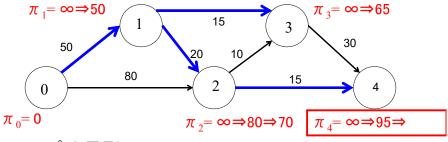


ステップ2(3回目): *i*=3, *M*={2,4}

- (i) $M=\{2,4\}$ に到達する直前点を可能なら仮に i=3とする j=2については、直接i=3と接続していないのでそのまま j=4については なので π_A , $p_A=$

14 14

16



ステップ2(4回目): *i*=2, *M*={4}

j=4については_____なので π_{4} =_____, p_{4} =____

(ii) $\min_{j \in M} \pi_j = \{ \pi_4 \} = \pi_4$

点<u>k= の最短路確定: </u>に到達する直前点が *i=*2となる

(iii) \underline{k} = $\underline{}$ $\underline{}$

最大流問題(Max Flow Problem)

- 始点(ソース)sから終点(シンク)tへのフロー vの最大化
- ・ 辺(i,j)の容量 h_{ij}

max V

subject to
$$\sum_{k \in V^{-}(i)} \chi_{ki} - \sum_{k \in V^{+}(i)} \chi_{ik} = -v, i = s$$

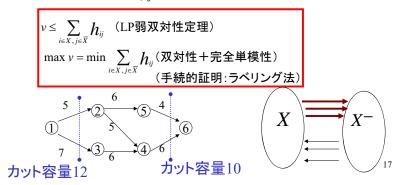
$$\sum_{k \in V^{-}(i)} \chi_{ki} - \sum_{k \in V^{+}(i)} \chi_{ik} = 0, \forall i \in V \setminus \{s, t\}$$

$$\sum_{k \in V^{-}(i)} \chi_{ki} - \sum_{k \in V^{+}(i)} \chi_{ik} = v, i = t$$

$$0 \le \chi_{ij} \le h_{ij}, \forall (i, j) \in A$$

最大フロー最小カット定理

- 始点(ソース)s、終点(シンク)t
- sを含みtを含まない任意の点集合:X
- tを含みXに含まれない点集合: $X^-=V-X$
- 辺集合 $\{(i,j)|i \in X, j \in X^-\}$ をカット (X, X^-)
- ・ カット容量 $\sum_{i \in X, \ j \in X-} h_{ij}$



最大流問題の双対問題

$$\min \sum_{(i,j)\in A} h_{ij} w_{ij}$$
 subject to $-u_i + u_j + w_{ij} \ge 0, \forall (i,j) \in A$ $u_s - u_i \ge 1,$ $w_{ij} \ge 0, \ u_j$ は符号制約無し

- •始点sを含む点集合X,終点tを含む点集合X⁻に対して
 - • $u_i=1$, $i \in X$
 - • $u_i = 0, j \in X^-$
 - • w_{ii} =1, $i \in X$, $j \in X^-$ それ以外 w_{ii} =0
- •上のように定めると双対問題の実行可能解が得られる
- •全てのケースで実行可能性が確認できる
 - $\{i \in X, j \in X\}, \{i \in X, j \in X^-\}, \{i \in X^-, j \in X\}, \{i \in X^-, j \in X^-\}\}$
- •双対問題における上の実行可能解に対する目的関数値
- ⇒カット容量と一致する

 $\sum_{(i,j)\in A} h_{ij} w_{ij} = \sum_{i\in X,j\in \overline{X}} h_{ij}$

最大流問題:完全単模性

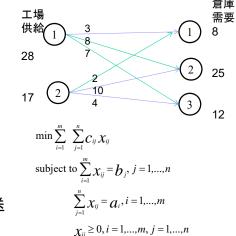
- •双対問題の最適解を(u*,w*)とする
- •完全単模性よりu*の各成分は1以上または0以下
- • $X = \{i \in V: u_i^* \ge 1\}, X^- = V X = \{j \in V: u_i^* \le 0\}$ とする
- • $i \in X, j \in X$ 「に対して $w_{ij}^* \ge u_i^* u_j^* \ge 1$
- •目的関数の下界は次のように計算できる

$$\sum_{(i,j)\in A} h_{ij} w_{ij} \ge \sum_{(i,j)\in A, i\in X, j\in \overline{X}} h_{ij} w_{ij} \ge \sum_{(i,j)\in A, i\in X, j\in \overline{X}} h_{ij}$$

- •双対問題の次の実行可能解に対する目的関数値は下界と一致⇒最小カット
 - • $u_i=1$, $i \in X$
 - • $u_i = 0, j \in X^-$
 - $\bullet w_{ii}=1$, $i \in X$, $j \in X^-$ それ以外 $w_{ii}=0$

輸送問題ふたたび

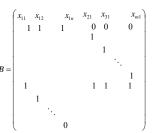
- ある製品をm箇所の工場からn箇所の倉庫に最も安い 費用で輸送する
- 各工場からの供給量:*a*_i(*i*=1,...,*m*)
- 各倉庫の需要量:b;(j=1,...,n)
- 工場iから倉庫jへの製品1 個あたりの輸送コストをc_{ii}
- 輸送費用を最小化する輸送 量 x_{ij} (i=1,...,m, j=1,...,n)を 求める



制約行列の階数

- 制約行列Aについて rankA=m+n-1
- Aの初めのm本の和 (x₁₁ x₁₂ x_{1n} x₂₁ x₂₂
- 残りのn本の和
- 次のBから最後の行 を除いてできた (m+n-1)×(m+n-1)
- 型行列Bは正則 x_{1n} の列で与因子展開





問題規模の縮小

目的関数
$$\min z = 3x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + 2x_{21} + 10x_{22} + 4x_{23}$$
 制約条件 $(1-1)$ $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ $= 28$ 制約条件 $(1-2)$ x_{11} $+ x_{21}$ $= 8$ 制約条件 $(2-2)$ x_{12} $+ x_{22}$ $= 25$ 制約条件 $(2-3)$ x_{13} $+ x_{23}$ $= 12$ 非負条件 $x_{1i} \ge 0$, $i = 1, 2, j = 1, \dots, 3$

• 最後の制約を除去

目的関数
$$\min z = 3x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + 2x_{21} + 10x_{22} + 4x_{23}$$

制約条件(1-1) $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 28$
制約条件(1-2) $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 17$
制約条件(2-1) $x_{11} + x_{21} = 8$
制約条件(2-2) $x_{12} + x_{22} = 25$
非負条件 $x_{ij} \ge 0, i = 1, 2, j = 1, \dots, 2$

2

改訂単体法復習

- ステップ1:p 計算
- ・ ステップ2: $y_k = B^{-1}a_k$

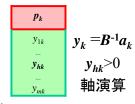
Z	x_B			x_N		
$c_B^{T} E$	B ⁻¹ b	1	0	$p^{T} = c_B^{T} B$	P-1 N —	$c_N^{\;\;\intercal}$
B-11	,	0	I	<i>B</i> ⁻¹ <i>N</i>	$B^{-1}a_k$	

ステップ3:軸演算前 B=(a₁,...,a_h,...,a_m)

$c_B^{T}B^{-1}b$	$\pi^{T} = c_B^{T} B^{-1}$
$B^{-1}b$	B^{-1}

• ステップ3:軸演算後 B'=(a₁,...,a_k,...,a_m)

$c_{B}^{T}(B')^{-1}b$	$(\pi')^{T} = c_{B'}^{T} (B')^{-1}$
(B ')-1 b	(B ') -1



 a_k :基底 a_k :非基底

23

輸送問題への改訂単体法応用

- ・ <u>ステップ1:</u> 負の被約費用 $p^{\intercal}=c_B^{\intercal}B^{-1}N-c_N^{\intercal}$ 計算 初期基底Bの逆行列が不明でも、計算可能 Bは適当な行と列の入れ換えで下三角行列に変換可能 単体乗数 $\pi^{\intercal}=c_B^{\intercal}B^{-1}$ より $\pi^{\intercal}B=c_B^{\intercal}$ を解く (下三角行列:逐次代入)
- <u>ステップ2:</u> $y_k = B^{-1}a_k$ より新たな列を計算 実際には $By_k = a_k$ より y_k を求める(逐次代入)
- ・ <u>ステップ3:</u>基底から出る列の計算 $x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$ で、列k以外は0に固定する $x_B+y_kx_k=B^{-1}b$ で x_k を可能な限り大きくする 元の基底変数で0となる変数に対応する列が非基底

定理:輸送問題で全てのa,bが整数ならば基底解も整数値

定式化のための道具

論理条件と0-1変数

 $y_A, y_B: 0-1$ 変数

 y_A : プロジェクトAが選択されたら1、さもなくば0 y_B : プロジェクトBが選択されたら1、さもなくば0

これを用いて、様々な条件を表現

)

0-1変数による論理操作の表現

Logical operation	Expression
A and B	$y_A + y_B = 2$
A or B	$y_A + y_B \ge 1$
If A then B	$y_A \leq y_B$
A If and Only If B	$y_A = y_B$

一般整数変数の0-1変数での置き換え

$$x = 0,1,\cdots,20$$

 $0-1$ 変数 y_o, y_1, y_2, y_3, y_4 を用いれば
 $x = y_o + 2y_1 + 4y_2 + 8y_3 + 16y_4$

$$z \in \{1,5,7,9,23\}$$

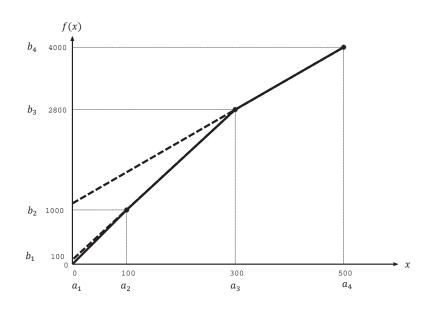
0-1変数 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 を用いれば $z = 1y_1 + 5y_2 + 7y_3 + 9y_4 + 23y_5$ $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=1$

区分線形関数

$$f(x) = 10x \text{ if } 0 \le x \le 100$$
 (1)

$$f(x) = 100 + 9x \text{ if } 100 \le x \le 300$$
 (2)

$$f(x) = 1000 + 6x \text{ if } 300 \le x \le 500$$
 (3)



隣り合う a_k と a_{k+1} の間の x は、 $0 \le \lambda \le 1$ を使って $x = \lambda_k a_k + (1 - \lambda_k) a_{k+1}$

 $f(a_k)$ と $f(a_{k+1})$ の間の f(x) は、同様に

$$f(x) = \lambda_k f(a_k) + (1 - \lambda_k) f(a_{k+1})$$

 $x=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_{r+1}a_{r+1}$ $f(x)=\lambda_1f(a_1)+\lambda_2f(a_2)+\cdots+\lambda_{r+1}f(a_{r+1})$ $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{r+1}=1,\lambda_k\geq 0$ $\forall k$ かつ、あい隣り合う高々ふたつの λ_k が同時に正の値をとれる

 $y_k: 0-1$ 変数を 設定すると $\lambda_r \le y_{r-1} + y_r$ $\lambda_{r+1} \le y_r$ $\sum_{k=1}^r y_k = 1$ $\lambda_k \ge 0 \ \forall k$ $y_k \in \{0,1\} \ \forall k$

 $\lambda_1 \leq y_1$

 $\lambda_2 \le y_1 + y_2$

 $\lambda_3 \leq y_2 + y_3$

区分線形関数の最終的な表現

```
x = 0\lambda_1 + 100\lambda_2 + 300\lambda_3 + 500\lambda_4
                       f(x) = f(0)\lambda_1 + f(100)\lambda_1 + f(300)\lambda_2 + f(500)\lambda_4
                                = 0\lambda_1 + 1000\lambda_2 + 2800\lambda_3 + 4000\lambda_4
                           \lambda_1 \leq y_1
                           \lambda_2 \leq y_1 + y_2
                          \lambda_3 \leq y_2 + y_3
                           \lambda_4 \leq y_3
         y_1 + y_2 + y_3 = 1
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1
                           \lambda_k \geq 0 \ \forall k
                           y_k \in \{0,1\} \ \forall k
```

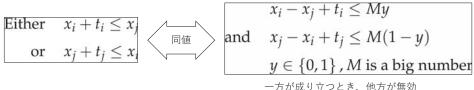
非同時成立制約 nonsimultaneous constraints either/or制約 制約の否定 if/then制約

either/or制約

xの定義域が(3,10)の外側 \Leftrightarrow Either x < 3 or x > 10 $\Rightarrow x - 3 \le My \text{ and } -x + 10 \le M(1 - y), y \in \{0,1\}$ Mは大きな数

either/or制約の実践例

ふたつのジョブi,j、加工時間 t_i,t_i 機械は高々ひとつのジョブしか処理できない前提で、開 始時刻 x_i, x_i を決定



m個中p個の制約のみが成立

$$f_i(x) - b_i \le 0, i = 1, 2, ..., m$$
 のうち p 個のみ成立して欲しい

 $y_i(\forall i)$ を 0-1 変数としたとき

$$f_i(x) - b_i \le My_i, i = 1, 2, \dots, m$$
$$\sum_i y_i = m - p$$

離接制約集合:どっちか一方

Either subset 1:
$$\left\{a_i^{\mathsf{T}}x - b_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, m_1\right\}$$

or subset 2: $\left\{c_i^{\mathsf{T}}x - d_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, m_2\right\}$

$$0-1$$
 変数 y を導入して、 $a_i^{\mathsf{T}} x - b_i \leq M y, \qquad i = 1, 2, \dots, m_1$ $c_i^{\mathsf{T}} x - d_i \leq M (1 - y), \qquad i = 1, 2, \dots, m_2$

If/Then制約

実は「If A then $B \Leftrightarrow \text{not } A \cup B$ 」

If
$$f_1(x) - b_1 \le 0$$
 then $f_2(x) - b_2 \le 0$

Either-
$$f_1(x) + b_1 < 0$$
 or $f_2(x) - b_2 \le 0$

$$f_1(x) + b_1 < My$$
 $f_2(x) - b_2 \le M(1-y)$ $f_3(x) - f_3(x) + f_3(x) +$

補遺

最大値の最小化:
$$\min \left\{\max_{i=1,...,m} f_i(x)
ight\}$$
 $\min z$ $\mathrm{s.t.} \ f_i(x) \leq z, i=1,\ldots,m$

数理計画における 定型的問題

担当 今泉 淳

問題の分類

- 線形計画問題系 ネットワークに関するものがいくつか
- 整数計画問題系(混合整数計画を含む)

典型的問題の位置づけ・それを知る意義

解法が整備されている・効率的に解き得る・ソフトがある 特別な解き方・実装済みの可能性

意思疎通の道具

多少の表現の違いはあれど、領域の共通認識 応用が期待できる

実務で使える可能性・現実の問題の帰着先応用的な問題の出発点

制約を付加したより複雑な問題(その制約を緩和した問題は簡単に解けるかも)

ネットワーク問題

- 最短路問題、最大流問題、最小費用流問題
- 輸送問題、割当問題
- 多品種最小費用流問題

ネットワークの定義

n 個の点の集合 $\mathcal{N}=\{1,2,\ldots,n\}$ それらを結ぶ枝の集合 $\mathcal{A}=\{(i,j) | i\in\mathcal{N}, j\in\mathcal{N}\}$ をもつ構造

最短路問題の定義

与えられたネットワークの各枝 (i,j) に長さ d_{ij} が与えられているとき、特定の2点を結ぶルートのうちそのルートに含まれる枝の長さの総和が最小のものを求める問題

最短路問題の記号の定義

変数 x_{ij} : 枝 (i,j) を通る場合 1, さもなくば 0

定数 d_{ij} : 枝 (i,j) の長さ

最短路問題の定式化

点 1 から点 n への最短路を求める問題:

$$\min \qquad z = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} d_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

s.t.
$$\sum_{j \in B(i)} x_{ji} - \sum_{j \in A(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & (i = 1) \\ 0 & (i \neq 1, n) \\ 1 & (i = n) \end{cases}$$
 (2)

$$x_{ij} \ge 0, \quad \forall \ (i,j) \in \mathcal{A}$$
 (3)

ここで、 $A(i) = \{j \in \mathcal{N} | (i,j) \in \mathcal{A}\}, B(j) = \{j \in \mathcal{N} | (j,i) \in \mathcal{A}\}$

解法・応用・発展的問題

解法

見かけはLP、通常「ダイクストラ法」「Ford・Fulkerson法」で最適化

応用

(一例として) WWモデルの最適化の際に現れる

発展的問題

資源制約付き最短路問題:枝(i,j)を通過する際 $(r_{ij}{}^k$ の 資源の消費を伴い、パス全体で消費量上限を R^k とする (資源がK種類)

最大流問題の定義

与えられたネットワークの各枝 (i,j) に容量 $a_{ij} \geq 0$ が与えられているとき、点1を入口(ソース)とし、点nを出口(シンク)とする流量vを最大にするような各枝の流量を求める問題

最大流問題の記号の定義

変数 x_{ii} 枝 (i,j) の流量 (≥ 0)

v ソースからの流出量(=シンクへの流入量)

定数 a_{ii} 枝 (i,j) の容量 (流量の上限)

最大流問題の定式化

点 1 から点 n への最大流を求める問題:

$$\max v$$
 (1)

s.t.
$$\sum_{j \in B(i)} x_{ji} - \sum_{j \in A(i)} x_{ij} = \begin{cases} -v & (i = 1) \\ 0 & (i \neq 1, n) \\ v & (i = n) \end{cases}$$

$$0 \le x_{ij} \le a_{ij}, \quad \forall \ (i,j) \in \mathcal{A}$$
 (3)

最小費用流問題の定義

与えられたネットワークの各枝 (i,j) に容量 $a_{ij} \geq 0$ と,枝 (i,j) 上 に 1 単位のものを流すために費用 c_{ij} がかかるとき,点 1 を入口(流 入口)とし,点 n を出口(流出口)とする流量 v を最小の費用で流すような流し方を求める問題

最小費用問題の記号の定義

変数 x_{ij} 枝 (i,j) の流量 (≥ 0)

定数 v ソースからの流出量(=シンクへの流入量)

 a_{ii} 枝 (i,j) の容量 (流量の上限)

 c_{ii} 枝 (i,j) に一単位流したときの費用

最小費用流問題の定式化

点 1 から点 n への流量 v を流す際の最小費用流を求める問題:

$$\min \qquad z = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

s.t.
$$\sum_{j \in B \ (i)} x_{ji} - \sum_{j \in A \ (i)} x_{ij} = \begin{cases} -v & (i = 1) \\ 0 & (i \neq 1, n) \\ v & (i = n) \end{cases}$$
 (2)

$$0 \le x_{ij} \le a_{ij} \qquad (\forall (i,j) \in \mathcal{A}) \tag{3}$$

解法・応用・発展的問題

解法

見かけはLP、通常「主・双対法」や「クライン法」など 発展的問題

多品種流問題:複数の品種、品種kにvk、各枝で合計流量に上限

輸送問題の定義

複数の供給地と複数の需要地があり、供給地はそれぞれ供給量、需 要地はそれぞれ需要量、が与えられ、さらに各供給地・需要地間の 「製品単位量あたり」の輸送費用が与えられている。このとき、各 供給地の供給量内で、各需要地の各需要量を満足しつつ、その輸送 費用を最小にするよう各供給地・需要地間の輸送量を決定する問題

輸送問題の記号の定義

供給地が mヶ所、需要地が nヶ所あるとする。

a; 供給地 i の供給量

定数 b_i 需要地 j の需要量

 c_{ii} 供給地iと需要地jの間の製品単位当りの輸送費用

変数 x_{ii} 供給地 i と需要地 j の間の輸送量

輸送問題の定式化

min
$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$
 (1)

s.t.
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \qquad i = 1, ..., m$$
 (2)
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, ..., n$$
 (3)
$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n$$
 (4)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, \dots, n$$
 (3)

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$
 (4)

解法・発展

解法

初期実行可能基底解を「北西隅ルール」 そこから目的関数値を改善する「飛び石法」(単体法 と関係)

発展

供給地の設置の可否までもを意思決定に含めた「施設 配置問題

割当問題の定義

n個の候補が二組あり、一方の組の一つの要素からもう一方の組の いずれかの要素への対応関係を、対応関係に与えられているコスト が所与の元で、全体のコストが最小になるように決定する問題

割当問題の記号の定義・定式化

 x_{ij} は「一方の側のiを,もう一方の側のjに割り当てるとき 1,さもなくば 0」となる 0-1 変数, c_{ij} は,そのiをjに割り当てる際のコストとする。

min
$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$
 (1)

s.t.
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., n$$
 (2)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \dots, n$$
 (3)

$$ij \in \{0,1\}, \quad i,j = 1,...,n$$
 (4)

最小費用多品種流問題の定義

p 種類の品種があり、与えられたネットワークにおいて、品種 r に対してソース s_r からシンク t_r まで q_r の流量を流さなければいけない。一方、各枝 (i,j) に容量 $a_{ij} \geq 0$ と、枝 (i,j) 上に 品種 r を 1 単位のものを流すために費用 c_{ij}^r がかかるとき、最小の費用で流すような流し方を求める問題

multicommodity flow problem

目的関数は各種(最小費用流以外のバリエーションあり)

最小費用多品種流問題の記号の定義

 S_r 品種rのソース

tr 品種 r のシンク

a_{ij} 枝 (i, j) の容量

 c_{ii}^r 品種 r を枝 (i,j) に 1 単位流すときの費用

 x_{ii}^r 品種 r の枝 (i,j) の流量

最小費用多品種流問題の定式化

min
$$z = \sum_{r=1}^{p} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij}^{r} x_{ij}^{r}$$
 s.t. $\sum_{j \in N_{i}^{+}} x_{ij} - \sum_{j \in N_{i}^{-}} x_{ji} = \begin{cases} q_{r} & (i = s_{r}) \\ 0 & (i \neq s_{r}, t_{r}) \\ -q_{r} & (i = t_{r}) \end{cases}$ $N_{i}^{+} : \{j | (i,j) \in \mathcal{A}\}$ $N_{i}^{-} : \{j | (j,i) \in \mathcal{A}\}$

 $N_i^+:\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}$ iから出て行く枝の終点

iに入ってくる枝の始点

解法・応用

解法

単体法の延長上の解法

応用

ロジスティクス系の問題で品種を意識するケース (海外の) 鉄道系の問題でこの形に帰着するもの

整数計画系の問題

- 集合被覆問題
- 巡回セールスマン問題
- 施設配置問題
- •一般化割当問題
- ジョブショップスケジューリング問題
- •制約付き最短路問題

集合被覆問題

$$\min \qquad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

s.t.
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1, \quad i = 1, \dots, m$$
 (2)

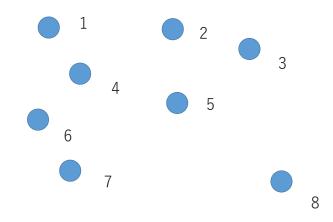
$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \dots, n$$

 a_{ij} は定数で0もしくは1のいずれか

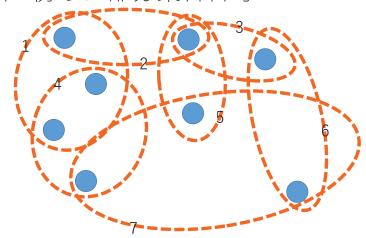
言葉による説明

- •集合Mが所与:i=1,...,m (要素がm個)
- ・その集合の部分集合が所与 $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}), a_{ij} \in \{0,1\}, j = 1, ..., n$ (部分集合がn個)
- •部分集合には費用が所与c_i
- •部分集合をうまく選び、Mの全要素が、選んだ部分集合に含まれるようにする
- その際の費用総和を最小に

集合:傍らは要素番号

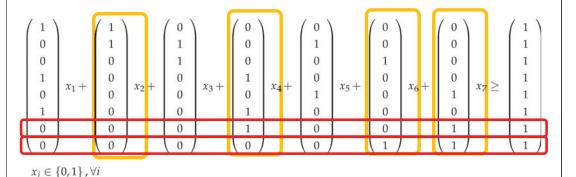


集合:傍らは部分集合番号

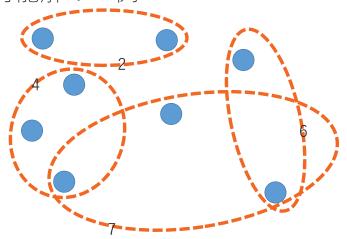


具体例に対する定式化

具体例に対する実行可能解の例



実行可能解の一例



解法・応用・発展的問題

解法

- 分枝限定法
- 近似解法としてはラグランジュ緩和
- 列が列挙されていない場合は列生成法

応用

- ・配送計画問題(列が配送車1台のルート)
- ・ 鉄道・航空の乗務員行路作成問題 (列が一乗務員の仕事内容)

発展的問題

「=」制約で「集合分割問題」

巡回セールスマン問題の定義

n 個の都市があり、都市i から都市j へ行く費用 c_{ij} が与えられているものとし、n 個の都市を全て1 度づつ巡って出発した都市に戻って来る道筋(巡回路)の中から、通過した道の費用総和を最小にする問題

Traveling Salesman Problem, TSP と略称

都市のことを「点」「ノード」,都市と都市の間を直接結ぶ要素のことを「枝」「アーク」とも呼称

巡回セールスマン問題の記号の定義

都市の集合 $N = \{1, \ldots, n\}$

変数 x_{ii} : 枝 (i,j) を通る場合 1, さもなくば 0

定数 c_{ij} : 枝(i,j)の費用

巡回セールスマン問題の記号の定義

$$\min z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} (1)$$

s.t.
$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N$$
 (2)

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N$$
 (3)

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in N \setminus V} x_{ij} \ge 1, \quad \forall V \subset N \quad (V \ne \phi, V \ne N)$$
 (4)

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i,j \in N \tag{5}$$

制約式の意味

- 各点は
 - 入る枝が一本必ず選ばれる
 - 出る枝が一本必ず選ばれる
- ・巡回路がひとつになっている(部分巡回路除去制約)

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in N \setminus V} x_{ij} \ge 1, \quad \forall V \subset N \ (V \ne \phi, V \ne N)$$

いかなる点集合の分割であっても、一方から他方への枝が少なく とも一本選ばれる

分類・解法・応用・発展的問題

分類

- 非対称: d_{ii} ≠ d_{ii}
- 対 称: $d_{ii} = d_{ii}$ 、変数も片方で十分

解法

- 分枝限定・分枝切除法、ただし定式化をまともには解かない
- 近似解法としてはLKを代表とするヒューリスティック(多数)

応用

- プリント基板の実装
- 製鉄の圧延スケジューリング

発展的問題

より実務的には配送計画問題:「デポ」から複数の巡回路

施設配置問題の定義

「複数の供給地(の候補)」「複数の需要地」があり、

- 各供給地はそれぞれの設置費用と供給能力
- 各需要地はそれぞれ需要量
- 各供給地・需要地間の「製品単位量あたり」の輸送費用

が所与で、「どの供給地を設置するか」と「設置された供給地の能 力内で各需要地の需要量を満足するよう各供給地・需要地間の輸送 量」を、設置費用と輸送費用の和を最小にするように決める問題

施設配置問題の記号の定義

供給地iの供給能力

定数 b_i 需要地 j の需要量

 c_{ii} 供給地iと需要地jの間の製品単位当りの輸送量

供給地iを建てるために必要な費用

変数 x_{ii} 供給地iと需要地jの間の輸送量

供給地 i を設置するならば 1, さもなくば 0

施設配置問題の定式化

min
$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i$$
 (1)

s.t.
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i y_i, \qquad i = 1, \dots, m$$
 (2)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n (3)$$

$$x_{ij} \ge 0,$$
 $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$ (4)

$$x_{ij} \ge 0,$$
 $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$ (4)
 $y_i \in \{0, 1\},$ $j = 1, ..., n$ (5)

解法・応用・発展的問題

解法

- 分枝限定法、切除平面法
- 近似解法としてはラグランジュ緩和

発展的問題

- 多数の派生形あり
- 一ヶ所でも施設を開設すれば全需要が満たせるような「能力 制約なし施設配置問題
- ⇔ここでの紹介は厳密には「能力制約つき施設配置問題」
- ネットワーク設計問題

一般化割当問題の定義

m台の機械とn個の仕事があり、仕事を機械に割り当てる。機械iに仕事j割り当てる際の負荷は a_{ij} 、費用は c_{ij} であり、機械iに割り当てた仕事の負荷合計は b_i を超えてはならない。このとき、各機械の負荷上限を守りつつ、全仕事を必ずいずれかの機械に割り当てる場合の費用総和を最小にする問題。

Generalized Assignment Problem, GAP と略称

一般化割当問題の記号の定義

 a_{ii} 機械iに仕事jを割り当てた際の負荷

定数 c_{ii} 機械iに仕事jを割り当てた際の費用

bi 機械 i に割り当てられた仕事の負荷総和の上限

変数 x_{ii} 機械iに仕事jを割り当てるとき1、さもなくば0

一般化割当問題の定式化

min
$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$
 (1)

s.t.
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$
 (2)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \dots, n,$$
(3)

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$
 (4)

解法

- •分枝限定法、分枝価格法
- ・近似解法としては(制約の形から)ラグランジュ緩和

機械スケジューリング問題:概念定義

機械	加工をする場所
ジョブ	「注文」「オーダー」に対応 ひとつ以上の「作業」からなる
作業	ジョブの構成要素 「加工時間」と「加工をどの機械で行うか」が所与
技術的加工順序	ジョブの機械の訪問順序 ジョブ内の作業順に機械をならべたもの

スケジューリング問題の種類

組合せ最適化分野の理論研究で定義が明確になされているもの

- —機械
- 並列機械
- ・フローショップ
- ・ジョブショップ

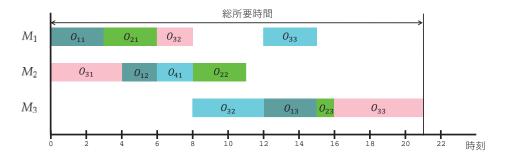
ジョブショップスケジューリング問題の定義

- n個のジョブを m 台の機械で処理する
- 各ジョブは *m* 台の機械を各 1 回だけ訪問する (そこで加工を受ける)
- ジョブごとに技術的加工順序は異って良い。
- ジョブiの第j番目の作業 (O_j) の加工時間とそれがどの機械で加工 を受けるかは所与である。
- 総所要時間を最小にするような各作業の開始時刻を求める。

例題:4ジョブ3機械問題

	作業	1	作業	2	作業3		
	加工時間	機械	加工時間	機械	加工時間	機械	
ジョブ1	3	1	2	2	3	3	
ジョブ2	3	1	2	2	1	3	
ジョブ3	4	2	2	1	5	3	
ジョブ4	2	2	4	3	3	1	

スケジュール例



このスライドに限って O_{ij} を「ジョブiの作業j」を意味するものとする

Muth and Thompson 10ジョブ10機械問題

Fish	isher and Thompson 10x10 instance, alternate name (mt10)										t10)								
10	10																		
0	29	1	78	2	9	3	36	4	49	5	11	6	62	7	56	8	44	9	21
0	43	2	90	4	75	9	11	3	69	1	28	6	46	5	46	7	72	8	30
1	91	0	85	3	39	2	74	8	90	5	10	7	12	6	89	9	45	4	33
1	81	2	95	0	71	4	99	6	9	8	52	7	85	3	98	9	22	5	43
2	14	0	6	1	22	5	61	3	26	4	69	8	21	7	49	9	72	6	53
2	84	1	2	5	52	3	95	8	48	9	72	0	47	6	65	4	6	7	25
1	46	0	37	3	61	2	13	6	32	5	21	9	32	8	89	7	30	4	55
2	31	0	86	1	46	5	74	4	32	6	88	8	19	9	48	7	36	3	79
0	76	1	69	3	76	5	51	2	85	9	11	6	40	7	89	4	26	8	74
1	85	0	13	2	61	6	7	8	64	9	76	5	47	3	52	4	90	7	45

ジョブショップスケジューリング問題の記号の定義

定数	p_{ijk}	ジョブ J_i の作業 O_j の機械 M_k における加工時間
変数	x_{ij}	ジョブ J_i の作業 O_j の機械 M_k 上の加工終了時刻
	y_{stk}	M_k において $J_t \prec J_s$ のとき 1、さもなくば 0
	z	総所要時間
	k_i	J_i の最終作業を加工する機械
	u, v	J_i,J_i の作業中、 M_k で行われるものの添え字

ジョブショップスケジューリング問題の記号の定義

状態 (i,j,k) ジョブ J_i の作業 O_j が機械 M_k 上で加工される状態

 J_s の作業 O_u と J_t の作業 O_v が M_k で加工されるとき、(s,u,k) と (t,v,k) のいずれかが先行する。

 $J_i \prec J_i$: 「 J_j が J_i に対して先行する」を意味する

 $x_{sk} - x_{tk} \ge p_{suk}$ $J_t \prec J_s$ のとき

 $x_{tk} - x_{sk} \ge p_{tvk}$ $J_s \prec J_t$ のとき

ジョブショップスケジューリング問題の定式化

 $\min z$

s.t.
$$x_{ik_i} \leq z$$
 $i = 1, ..., n$ $x_{ik} - x_{ih} \geq p_{ilk}$ $(i, l - 1, h) \prec (i, l, k)$ $x_{ik} - x_{jk} + My_{ijk} \geq p_{iuk}$ $i, j = 1, ..., n, k = 1, ..., m$ $x_{jk} - x_{ik} + M(1 - y_{ijk}) \geq p_{jvk}$ $i, j = 1, ..., n, k = 1, ..., m$ $x_{ik} \geq 0$ $i = 1, ..., n, k = 1, ..., m$ $x_{ijk} \in \{0, 1\}$ $i, j = 1, ..., n, k = 1, ..., m$

解法・研究の方向

• 最適解のためには分枝限定法

下界値(緩和問題)をどうするか?

⇒ひとつのやり方として「一機械緩和」

特定機械で加工される各ジョブの作業の

その加工までに絶対にかかる時間 (「段取り時間」と称する)

その加工の後に絶対にかかる時間 (「片付け時間」と称する)

を計算

「段取り時間・片付け時間つき一機械問題」と機械台数分解くと、その 最大値が下界を与える

• 近似解法:メタ解法の適用など多数

制約付き最短路問題

与えられたネットワークの各枝 (i,j) に長さ d_{ij} とそこを通る際の費用 c_{ij} が与えられているとき、特定の 2 点を結ぶルートのうち、ルート上の枝の費用総和が C 以下で、そのルートに含まれる枝の長さの総和が最小のものを求める問題

別名「資源制約付き最短路問題」

Resource Constrained Shortest Path Problem, RCSPP と略称 説明は一資源の問題、複数種の資源の問題が一般形

制約付き最短路問題の定式化

点 1 から点 n への最短路を求める問題:

$$\min z = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} d_{ij} x_{ij} (1)$$

s.t.
$$\sum_{j \in B(i)} x_{ji} - \sum_{j \in A(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & (i = 1) \\ 0 & (i \neq 1, n) \\ 1 & (i = n) \end{cases}$$
 (2)

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \le C \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall \ (i,j) \in \mathcal{A}$$
 (4)

 $\angle \angle \mathcal{C}$, $A(i) = \{j \in \mathcal{N} | (i,j) \in \mathcal{A}\}, B(j) = \{j \in \mathcal{N} | (j,i) \in \mathcal{A}\}$

解法・応用

解法

- 一般にはラベリング法:これだけでかなりの数の研究
- 近似解法としてはラグランジュ緩和など(費用制約がなければ単純な最短路問題)

応用

- 航空・鉄道の乗務員スケジューリング
 - ある乗務員の基地から出発して基地へもどるまでの仕事内容(行路、pairing)
 - ・ 点がレグ (便・列車 (の一部)、枝が乗り継ぎ可能なレグのペア
 - 資源:行路に課される各種制約 (ex:レグの総和時間の上限)

ラグランジュ緩和

整数計画問題で

- •面倒な制約を(目的関数に組み込み)取り除く
- •残った制約(と目的関数)からなる問題を「見慣れた 問題」に持ち込む
 - 最適化はさほど難しくないはず
 - 元の問題の最適解よりも、良い最適解を提供する可能性
 - 下の問題から見れば「下界値」を提供

元の問題の定義

(P) min z = cx

s.t. $A_1x \geq b_1$

 $A_2x \geq b_2$

 $x \in B^n$

x は n 次元の列ベクトル、要素は 0 もしくは 1

 A_1 は $m_1 \times n$ 行列、 A_2 は $m_2 \times n$ 行列

 b_1 は m_1 次元の列ベクトル、 b_2 は m_2 次元の列ベクトル

cはn次元の行ベクトル

 $z_{\mathbf{P}}^*$ は最適値

厄介な制約と扱いやすい制約

前提 $A_1x \geq b_1$ が「厄介な」制約

 $A_2x \geq b_2$ が「扱いやすい」制約

意味:以下が元問題に比べて簡単に解ける

min z = cx

s.t. $A_1x \geq b_1$

 $A_2x \geq b_2$

 $x \in B^n$

ラグランジュ緩和による緩和問題導出(1) 非負の要素をもつ m_1 次元の行ベクトル λ

 $A_1x - b_1 \ge 0$ 厄介な制約を移項

$$\lambda(A_1x-b_1)\geq 0$$
 λ ϵ λ t

 $\lambda(b_1 - A_1x) \leq 0$ 不等号の向きを反対に

ラグランジュ緩和による緩和問題導出(2)

非正の式を目的関数に加えた

$$(P')$$
 min $z=cx+\lambda(b_1-A_1x)$ s.t. $A_1x\geq b_1$ $A_2x\geq b_2$ $x\in B^n$ $z_{\mathbf{p}'}^*$ 最適値

ラグランジュ緩和による緩和問題導出(3)

一つ目の制約を取り去った

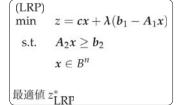
(LRP)
$$\min \quad z = cx + \lambda(b_1 - A_1x)$$
 s.t. $A_2x \geq b_2$ $x \in B^n$

 $z_{
m LRP}^*$ 最適値

三つの問題の比較

$$(P)$$
 min $z=cx$ s.t. $A_1x \geq b_1$ $A_2x \geq b_2$ 最適值 z_P^* $x \in B^n$

$$egin{aligned} (\mathrm{P'}) & & & & \\ \min & & z = cx + \lambda(b_1 - A_1x) \\ & & \mathrm{s.t.} & & A_1x \geq b_1 \\ & & & A_2x \geq b_2 \\ & & & x \in B^n \\ & ag{b}$$
 最適値 $z_{\mathrm{P'}}^*$



これら三つの間に $z_{
m P}^* \geq z_{
m P'}^* \geq z_{
m LRP}^*$ が成立

理由 $z_{\mathbf{P}}^* \geq z_{\mathbf{P}'}^*$ 目的関数から非正の値を加えているので $z_{\mathbf{P}'}^* \geq z_{\mathbf{I},\mathbf{RP}}^*$ 制約が緩い問題のほうが最適値がよくなる可能性

LRPの性質

- Pよりも解きやすい(最適化が簡単)
- Pの最適解に対して、LRPの最適解は等しいか小さい

これらからいえること

元の問題の**下界値**を比較的簡単に得られる

下界值

元の問題の最適値と等しいか小さい値 元の問題の最適値はこの値以上



制約付き最短路問題のラグランジュ緩和 問題

min
$$z = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} (d_{ij} + \lambda c_{ij}) x_{ij} - \lambda C$$
 (1)

s.t.
$$\sum_{j \in B(i)} x_{ji} - \sum_{j \in A(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & (i = 1) \\ 0 & (i \neq 1, n) \end{cases} (2)$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}$$
(3)

枝の長さが $c_{ij} + \lambda d_{ij}$ の単純な最短路問題

残された課題

• λ の値をどう設定するか? その値に応じて下界値は変化 下界値は大きいほうが良い

解決方法として

下界値を最大化する λ を変数とする問題: ラグランジュ双対問題

- 適当なλで出発
- 最適化の結果に応じてλの値を修正(通常「劣勾配法」)
- ・最適化とλの修正を反復し、下界値が収束したらば終了(近 似最適解)

カッティングストック問題

担当 今泉 淳

本項の説明手順

- CS問題の定義・定式化
- LP版CS問題と列生成
- 標準LPとLP版CS問題の違い
 - 列生成のための $ar{c_i}$ 計算、そのための π の読み取り方
- 列生成子問題:CSではKP

カッティングストック問題

- 問題の定義と定式化
- LP版CS問題の解法の基本的考え方
- 被約費用を最小化するパターンを求める問題
 - (整数値)ナップザック問題
 - 動的計画法

答を見つけるうえでのポイント

- 列全部が必ずしも見えてないLP
 - 列の要素にルール(条件)あり
- どう解く?
 - ⇒ 被約費用最小の列をどうやって見つけるか
- 被約費用:π(双対価格)の値はどこから? ⇒単体表の初期実行可能解の基底変数の目的関数行 しかしそれはスラック変数が前提なので、要修正
- 列の要素:制約式の係数に条件(制約)あり ⇒被約費用を最小の列の要素の値の発見⇒KPに帰着

(1次元) カッティングストック問題

- 45cm の長さの板 x 97枚
- 36cm の長さの板 x 610枚
- 31cm の長さの板 x 395枚
- 14cm の長さの板 x 211枚

← 100cm **→**

45cm 36cm 14cm

色々な切り出し方:パターン

LP版カッティングストック問題

- 整数計画は(LPに比べて)解きにくい
- LP版CS問題:切上げ解は必ず実行可能
- 板の長さLが需要の長さに比べて長いと、 パターンの数は膨大
 - 「パターンが多くて列挙不可」は色々な場面 に現れる: VRP,CSP, etc.
- 予め全パターンを列挙しておくことは無理
- 必要に応じパターンを生成できないか?⇒列生成法:改訂単体法で必要な情報を復元

定式化(IP版CS)

min $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots$

s.t.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 + \dots = \begin{pmatrix} 97 \\ 610 \\ 395 \\ 211 \end{pmatrix}$$

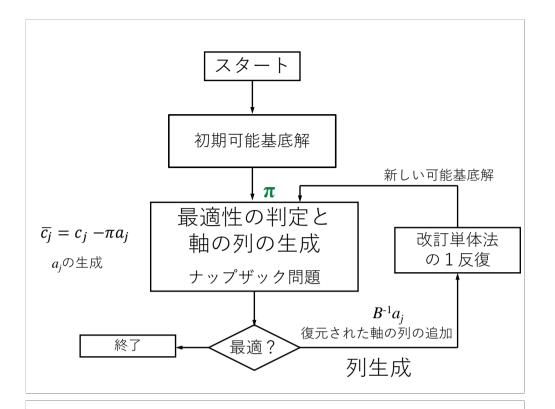
 x_i : 第iパターンの使用枚数(非負の整数)

定式化(LP版CS)

min $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots$

s.t.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 + \dots = \begin{pmatrix} 97 \\ 610 \\ 395 \\ 211 \end{pmatrix}$$

 x_i : 第jパターンの使用枚数(非負の実数)



被約費用と双対価格との関係

 x^{B} を基底変数とする基底形式(B^{E} を基底とする基底形式) (=単体表)の行列ベクトル表現 min $z - (c^{N} - c^{B}B^{-1}N)x^{N} = c^{B}B^{-1}b$ s.t. $x^{B} + B^{-1}Nx^{N} = B^{-1}b$ $(x^{B} \ge 0, x^{N} \ge 0)$ 非基底変数 x^{N} の被約費用 $c^{N} - c^{B}B^{-1}N = \overline{c^{N}}$

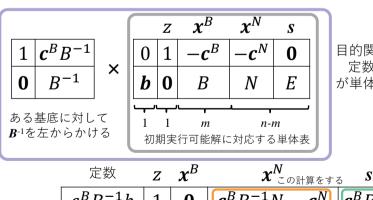
個別の非基底変数 x_j の被約費用 c_j $\overline{c^B B^{-1}} A_j = \overline{c_j}$ π π π (双対価格)

基底解と単体表(復習)

$$\min \quad z = cx \qquad \text{s.t.} \qquad A x = b, \qquad x \ge 0$$

- A, x および c を<u>基底</u>部分と<u>非基底</u>部分に分解 $A=(B,N), \quad x=(x^B,x^N), \quad c=(c^B,c^N)$
- ・ 元の問題を書きなおすと
 min $z = c^B x^B + c^N x^N$ s.t. $B^{-1}x$ $B x^B + N x^N = b$ $x^B = B^{-1}b B^{-1}Nx^N$ $x^B \ge 0$, $x^N \ge 0$
- x^B を基底変数とする基底形式 (Bを基底とする基底形式) (=単体表) の行列ベクトル表現 min z^- ($c^{N-}c^BB^{-1}N$) $x^N=c^BB^{-1}b$ s.t. x^B + $B^{-1}N$ $x^N=B^{-1}b$ $(x^B \ge 0$, $x^N \ge 0$)

標準LPの単体表での操作



目的関数も制約式も 定数 = 変数の和 が単体表のルール

 $c^B B^{-1} = \pi$:定義

LP版CS問題を列生成+改訂単体法で解く 標準的改訂単体法との違い

- 1) 初期可能基底形式の設定にあたって注意 スラック変数でなく、実際のパターンに対応する変数を初期基底変数とするため
- 2) 双対価格の現われ方が違うので注意 「通常 π (ないし π)が見えていたところに π 1 ($1-\pi$)がある;初期基底変数の元の問題の目的関数の係数が1だから
- 3)列(=パターン)があらかじめ列挙されていないので、その生成が必要(ナップザック問題)

定式化の変形

単体表上では「 $0=z-x_1-x_2-x_3-x_4+\dots$ 」

min $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots$

s.t.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 + \dots = \begin{pmatrix} 97 \\ 610 \\ 395 \\ 211 \end{pmatrix}$$

 x_i : 第jパターンの使用枚数 (非負の実数)

(単体表上で)目的関数から、制約式を辺々加えた「 $97+610+395+211=x_1+x_2+x_3+x_4+\dots$ 」を減じる

定式化の変形

 $\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots$

s.t.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 + \dots = \begin{pmatrix} 97 \\ 610 \\ 395 \\ 211 \end{pmatrix}$$

 x_i : 第jパターンの使用枚数(非負の実数)

目的関数に基底変数があるので、基底形式ではない

LP版CS問題の初期可能基底解

元問題	右辺定数	<i>x</i> ₁	x 2	<i>x</i> ₃	x 4		基底変数	
	0	-1	-1	-1	-1	-1	z	
	97	1	0	0	0		<i>x</i> ₁	45cm
	610	0	1	0	0		<i>x</i> ₂	36cm
	395	0	0	1	0	•••	<i>x</i> ₃	31cm
	211	0	0	0	1		<i>x</i> ₄	14cm

元の定式化(基底形式ではない)

初期単体表	右辺定数	<i>x</i> ₁	x 2	х 3	<i>x</i> ₄		基底変数	
	1313	0	0	0	0		z	
	97	1	0	0	0		<i>x</i> ₁	45cm
	610	0	1	0	0		x 2	36cm
	395	0	0	1	0	•••	<i>x</i> ₃	31cm
	211	0	0	0	1	•••	x 4	14cm

目的関数行に制約の各行を加えた(基底形式)

双対価格 $\pi = c^B B^{-1}$ の読み方

初期単体表	右辺定数	<i>x</i> ₁	x 2	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄	 基底変数	
	1313	0	0	0	0	 z	
	97	1	0	0	0	 <i>x</i> ₁	45cm
	610	0	1	0	0	 x 2	36cm
	395	0	0	1	0	 x 3	31cm
	211	0	0	0	1	 x 4	14cm

通常のこの行 $\pi a_i - c_i$

通常のスラック変数部 $\pi a_i - c_i = \pi a_i - 0 = \pi a_i$

CSの初期基底変数部 $\pi a_i - c_i = \pi a_i - 1$ (1減じられている)

双対価格自身が現れない理由

その結果

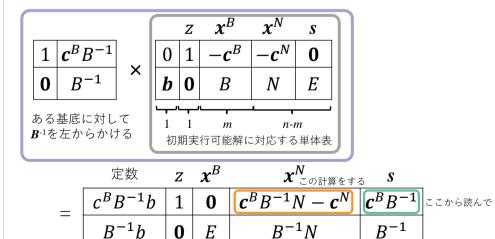
基底の逆行列 B^{-1} の「上」に双対価格が現われない

理由: $\bar{c_j}=c_j-\pi A_j$ であり、 $c_j\neq 0$ のため(ただし、 A_j は単位ベクトル)、 B^{-1} の「上」に π_i-c_j が現われる(単体表には $-c_j$ が現われることに注意)ため、 B^{-1} の上に現われる数値に c_j を加えたのが π の値

双対価格 $\pi = c^B B^{-1}$ の読み方

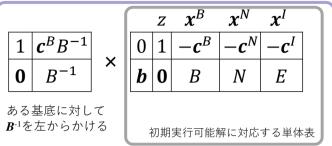
初期単体表	右辺定数	<i>X</i> ₁	x 2	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄		基底変数	
	1313	0	0	0	0		z	
	97	1	0	0	0		<i>x</i> ₁	45cm
	610	0	1	0	0		x 2	36cm
	395	0	0	1	0		<i>x</i> ₃	31cm
	211	0	0	0	1		<i>x</i> ₄	14cm
の値 a _j – c _j		1						
	(π_1,π_2,π_3)	$ au_3$, π_4	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	_ 1	$=\pi_1$	- 1=	0	

標準LPの単体表での操作(再)



 $c^B B^{-1} = \pi$:定義

単体表での操作: CSの場合



	T T	リ <u></u> 別夫/	丁山肥	件に刈心する単体衣	
	定数	Z	\boldsymbol{x}^{B}	x^N	$oldsymbol{x}^I$
=	$c^B B^{-1} b$	1	0	$c^B B^{-1} N - c^N$	$c^B B^{-1} - c^I$
_	$B^{-1}b$	0	E	$B^{-1}N$	B^{-1}
				$c^BB^{-1}=\pi$:定事	

パターンの生成

パターン = 列
$$\mathbf{a}_i = (a_1, a_2, \cdots, a_m)^t$$

$$\min \bar{c}_j = c_j - \pi^t \mathbf{a}_j$$

$$= 1 - (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)(a_1, a_2, \dots, a_m)^t$$

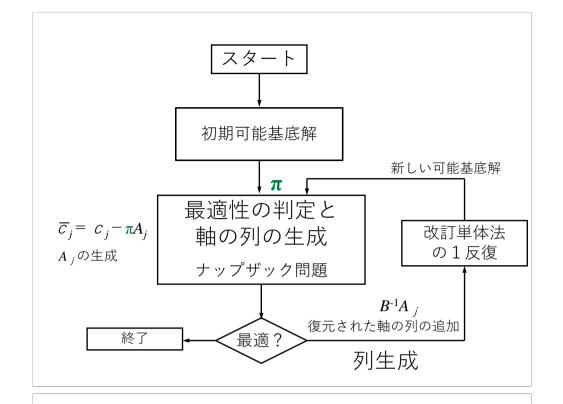
$$= 1 - (\pi_1 a_1 + \pi_2 a_2 + \pi_3 a_3 + \dots + \pi_m a_m)^t$$

等価

$$\max (\pi_1 a_1 + \pi_2 a_2 + \pi_3 a_3 + \dots + \pi_m a_m) - 1$$

s.t.
$$l_1a_1 + l_2a_2 + l_3a_3 + \dots + l_ma_m \le L$$

 $l_i:i$ の長さ $a_i:i$ の本数(非負整数)



初期実行可能解に対するKP

$$\max \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 1$$
 skata pingka max

s.t.
$$45a_1 + 36a_2 + 31a_3 + 14a_4 \le 100$$

 $a_i :$ #
#
#
#
#
#

60 / 103

ナップサック問題

初期実行可能解に対するKP

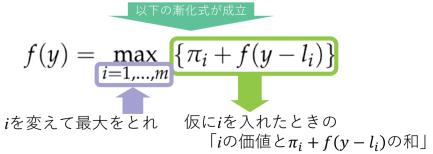
max
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

s.t. $45a_1 + 36a_2 + 31a_3 + 14a_4 \le 100$
 a_i : 非負整数

KPの解き方

- 分枝限定法
- 動的計画法:以下の方法

定義: f(y) =重量制限yのナップザックに詰め込むことのできる最大の価値



2	$\pi = (1,1,1,1)$)							
	No.0	右辺定数	x_1	x 2	<i>x</i> ₃	x 4	x 5	基底変数	
	初期単体表	1313	0	0	0	0	6	z	
	45cm	97	1	0	0	0	0	<i>x</i> ₁	
Г	36cm	610	0	1	0	0	0	<i>x</i> ₂	
	31cm	395	0	0	1	0	0	х 3	
Г	14cm	211	0	0	0	1	7	Х.4	

$\pi = (1,1,1,1,1)$	/ 7)							
No.1	右辺定数	x_1	x 2	<i>x</i> ₃	x 4	x 6	基底変数	
初期単体表	7925/7	0	0	0	-6/7	2	z	1132.14
45cm	97	1	0	0	0	0	<i>x</i> ₁	
36cm	610	0	1	0	0	1	<i>x</i> ₂	
31cm	395	0	0	1	0	2	<i>x</i> ₃	
14cm	211/7	0	0	0	1/7	0	X 5	30.14

$\pi = (1,1,0,1)$	/7)							
No.2	右辺定数	x_1	x 2	<i>x</i> ₃	x 4	x 7	基底変数	
初期単体表	5160/7	0	0	0	-6/7	9/7	z	737.14
45cm	97	1	0	0	0	0	<i>x</i> ₁	
36cm	825/2	0	1	0	0	2	<i>x</i> ₂	412.5
31cm	395/2	0	0	1/2	0	0	<i>x</i> ₃	197.5
14cm	211/7	0	0	0	1/7	2	x 7	30.14

実際の計算手順

- f(0)からf(1),f(2),...,f(L)を順次計算
- 最終的に欲しいのはf(L)
- 結果の表から逆にf(L)を実現する選択したアイテムを手繰る
- f(y)に関する定義と自明に分かること
 - yが負のとき $f(y) = -\infty$ と約束
 - -y = 0, ..., 13のとき f(y) = 0
 - -y = 14, ..., 27のときf(y) = 1

π =(1,1,1,1)の場合の漸化式計算

y	f(y)	i=1	i=2	i=3	i=4	
		1+f(y-45)	1+f (y -36)	1+f (y-31)	1+f(y-14)	
0~13	0					0
14~27	1	1+(-∞)=-∞	- 00	- 00	<u>1+0=1</u>	4
28~30	2	1+(-∞)=-∞	- 00	- 00	<u>1+1=2</u>	4
31~35	2	1+(-∞)=-∞	- ∞	1+0=1	<u>1+1=2</u>	4
36~41	2	1+(-∞)=-∞	1+0=1	1+0=1	1+1=2	4
42~44	3	1+(-∞)=-∞	1+0=1	1+0=1	1+2=3	4
45~49	3	1+0=1	1+0=1	1+1=2	1+2=3	4
50~55	3	1+0=1	1+1=2	1+1=2	1+2=3	4
56~58	4	1+0=1	1+1=2	1+1=2	1+3=4	4
59~61	4	1+1=2	1+1=2	1+2=3	1+3=4	4
62~63	4	1+1=2	1+2=3	1+2=3	1+3=4	4
64~65	4	1+1=2	1+2=3	1+2=3	1+3=4	4
66~70	4	1+1=2	1+2=3	1+2=3	1+3=4	4
70~71	5	1+1=2	1+2=3	1+2=3	1+4=5	4
72	5	1+1=2	1+2=3	1+2=3	1+4=5	4
73~75	5	1+2=3	1+2=3	1+3=4	1+4=5	4
76	5	1+2=3	1+2=3	1+3=4	1+4=5	4
77	5	1+2=3	1+2=3	1+3=4	1+4=5	4
78~79	5	1+2=3	1+3=4	1+3=4	1+4=5	4
80	5	1+2=3	1+3=4	1+3=4	1+4=5	4
81~83	6	1+2=3	1+3=4	1+3=4	1+4=5	4
84	6	1+2=3	1+3=4	1+3=4	1+5=6	4
85~86	6	1+2=3	1+3=4	1+3=4	1+5=6	4
(中略)						
98	7	1+3=4	1+4=5	1+4=5	1+6=7	4
99	7	1+3=4	1+4=5	1+4=5	1+6=7	4
100	7	1+3=4	1+4=5	1+4=5	1+6=7	4

$$f(100) = 7$$

被約費用 = 1 - 7 = 6

追加する列 (0,0,0,7)

まとめ

- カッティングストック問題
 - 問題紹介と定式化(復習)
 - 「列生成」による解法の考え方と改訂単体法
 - 整数値ナップザック問題による最適性の判定と列 生成
- 動的計画法(DP)
 - 動的計画法による整数値ナップザック問題の解法

動的ロットサイズ決定問題

担当 今泉 淳

動的ロットサイズ決定問題 Wagner-Whitin(WW)モデル

期(月)	1	2	3	4	5	6
需要 d_t	40	35	50	20	30	35
変動費 v_t	10	12	12	11	11	10

- 計画期間 T=6, 各期の需要d,
- t期に生産する場合の段取り費(製造固定費)は生産量に関係なく $a_t = 100$ (万円), $\forall t$
- t期に生産する場合の製造単価(製造変動費)は製品 あたり v_t (万円), $\forall t$
- t期末の在庫に対する、製品1個当たりの在庫保管費 h_t = 2 (万円), $\forall t$
- 生産は瞬時; 品切れは不許可
- 総費用を最小にする生産計画を決めたい

ロットサイズ決定問題

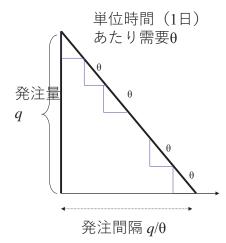
- 問題の定義・定式化
 - みかけは混合整数計画
- 凹関数の(有界) 凸多面体上での最適化
 - これら性質から導出される最適解の性質:「発注は在庫が0の時」⇒実行可能領域の端点のみ考えればよい
- 動的計画法
 - 結果的に最短路問題に帰着

WWモデルの特徴

- 1 品種のロットサイズ決定問題
- EOOの動的な拡張
 - EOQモデル:一定速度の需要の静的モデル
 - WWモデル:時間とともに変動する動的需要
- 「期」(日・月)の概念のある有限期間・ 離散時間モデル(EOQは無限・連続時間)

経済発注量 (EOQ)

- Economic order quantity
- 発注費K円/1回
- 在庫費h円/個・日
- 1回の発注量q
- 総費用K+h{q(q/θ)/2}
- 単位時間あたり $v(q)=K\theta/q+hq/2$
- ・ *v*(*q*)を最小⇒d *v*(*q*)/ d*q*=0
- 経済発注量 $q^*=\sqrt{(2K\theta/h)}$
- 発注間隔 *t**= √(2*K*/θ*h*)
- $v(q^*) = \sqrt{(2K\theta h)}$



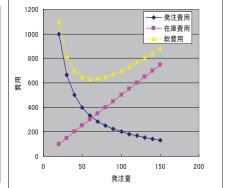
数值例

- *K*=200⊞
- *h*=10円/日 個

•*q**=63.25 •*v*(*q**)=632.5

•	0=100個/	\Box
---	---------	--------

q	Kθ/q	hq/2	総費用v(q)
20	1000	100	1100
30	666.6666667	150	816.66667
40	500	200	700
50	400	250	650
60	333.3333333	300	633.33333
70	285.7142857	350	635.71429
80	250	400	650
90	222.222222	450	672.22222
100	200	500	700
110	181.8181818	550	731.81818
120	166.6666667	600	766.66667
130	153.8461538	650	803.84615
140	142.8571429	700	842.85714
150	133.3333333	750	883.33333

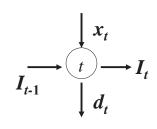


WWモデルの定式化1

最小化 $z = \sum_{t=1,...,T} (p_t(x_t) + h_t I_t)$ 制約 $I_{t-1} + x_t - d_t = I_t$, $\forall t$ (流量保存) $I_t \ge 0$ (品切れ不許可), $x_t \ge 0$, $\forall t$ $I_0 = 0$, $I_T = 0$

製造費 $p_t(x_t)$ は以下

$$p_t(x_t) = a_t + v_t x_t \quad x_t > 0 = 0 \quad x_t = 0$$



WWモデルの定式化2

最小化 $z = \sum_{t=1,...,T} (a_t y_t + v_t x_t + h_t I_t)$ 制約 $I_{t-1} + x_t - d_t = I_t$, $\forall t$ (流量保存) $x_t > 0 \Rightarrow y_t = 1$ $(y_t : t$ 期に製造を行うとき1,

行わないとき0)

(対偶をとり $y_t = 0 \Rightarrow x_t = 0$ (or $x_t \le 0$) を表すようにするには)

 $x_t \leq M y_t$ ただしMは十分大きい正数 $I_t \geq 0$ (品切れ不許可), $x_t \geq 0$, $\forall t$ $I_0 = 0$, $I_T = 0$

凸集合

- 凸集合(convex set): <幾何的 > $2 \triangle x, y \in S \subseteq R^n$ を結ぶ線分上のすべて点が集合Sに含まれる集合
- 凸結合(convex combination) $2 = \lambda x$, $y \in \mathbb{R}^n$ の凸結合とは、 $z = \lambda x + (1 \lambda)y$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $0 \le \lambda \le 1$
- 凸集合:<代数的> 集合 $S \subseteq R^n$ に対して、2点 $x,y \in S$ のすべての凸結合が集合Sに含まれる集合
- 例: 線形不等式の共通集合として表わされる 解の集合は凸集合を構成する

凸関数

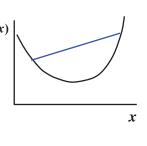
定義 凸関数(convex function)

凸集合 $S \subseteq R^n$ に対して、関数 $f: S \rightarrow R^1$ は $S \perp O 2$ 点 $x, y \in S$ に対して

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

 $\lambda \in R^1$, $0 \le \lambda \le 1$ のときS上の凸関数というf(x)

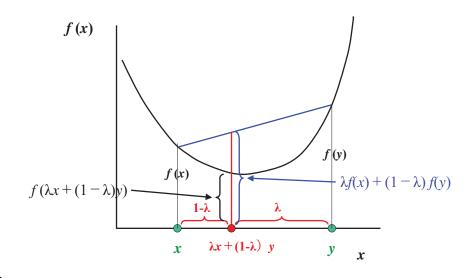
> 凸関数の和は 凸関数



有界凸多面体(Convex Polytope)

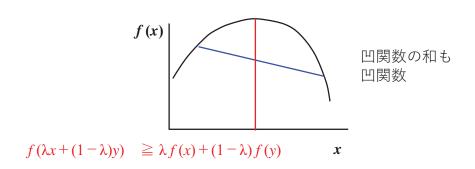
- R^n の超平面(hyperplane) は、すべての a_j が 0 でないとし、 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b$ を満たす点の集合である。
- 超平面により、二つの(閉)半空間が定義される $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \ge b$ $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \le b$
- 半空間は凸集合; 凸集合の共通集合は凸集合
- 複数の半空間の共通集合が、空でなく、かつ有界であるとき、凸 多面体(convex polytope)、または、単に多面体(polytope)と呼ぶ
- 数理計画では非負象限における凸多面体を考えることが多い

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$



凹関数:concave function

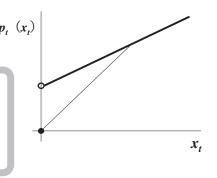
凸集合S⊆Rⁿ上の関数fは、-fがS上の凸関数であるとき、凹関数という



凹関数の凸多面体上での最小化 端点の中に最適解あり

- WWモデルの目的関数は 凹関数
- 可能解の集合は有界な凸 p_{t} (x_{t}) 多面体

定理4.1 凹関数を有界な凸多 面体上で最小化するとき、 凸多面体の端点の中に最 適解となるものがある



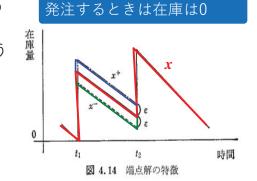
凸多面体と頂点(端点)

- 有界な凸多面体に属するすべての点は、その頂点(端点)の凸結合として表現可
- 有界な凸多面体 $S \in R^n$ の頂点を $x^1, x^2, ..., x^p \in R^n$ とすると、凸多面体Sに属する任意の点zは

$$z = \sum_{i=1,...,p} \lambda_i x^i$$
, $\sum_{i=1,...,p} \lambda_i = 1$, $0 \le \lambda_i \le 1$, $\lambda_i \in R^1$ と表現可

WWモデルの端点解の性質(1)

定理4.2 WWモデルの可能解集合の端点解は、 $I_{t-1}x_t=0$ という性質を満足する. すなわち、t-1期末在庫 I_{t-1} 、または、t期生産量 x_t の少なくともいずれか一方が0.

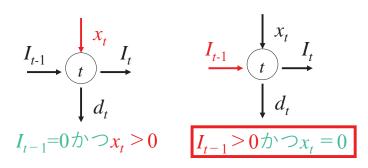


在庫があれば発注しないし、

 $x = (1/2)x^+ + (1/2)x^-$ よって、xは端点解ではない

端点解の図示

- $I_{t-1}x_t = 0$: 2通りの場合
- 第t-1期末において I_{t-1} =0かつ $x_t > 0$
- 第t-1期末において $I_{t-1} > 0$ かつ $x_t = 0$



WWモデルの 動的計画法 (DP) による解法

- t期の生産量 x_t は d_t , d_t+d_{t+1} , $d_t+d_{t+1}+d_{t+2}$, . . . , $d_t+d_{t+1}+d_{t+2}+\cdots+d_T$ のいずれか
- c_{tk} = t期からk-1期の需要に見合う量をt期の生産量 $x_t = d_t + d_{t+1} + d_{t+2} + \cdots + d_{k-1}$ としたときのt期からk-1期の総費用(c_{tk} はあらかじめ計算可能)
- $f_t = t-1$ 期末在庫 I_{t-1} が0のときに、t期以降 (T期末まで)を最適に計画したときのt期以降の最小費用
- $f_t = \min_{k=t+1,...,T+1} \{c_{tk} + f_k\}$ (DPの漸化式) ただし、 $f_{T+1} = 0$ (境界条件)

WWモデルの端点解の性質(2) Zero – Inventory Property

- <u>性質1</u> t期に生産する $(x_t > 0)$ ということは、t-1期末在庫が0 $(I_{t-1} = 0)$ である.
- <u>性質 2</u> t期に生産する場合、t期の生産 $\equiv x_t$ はt期に始まり、向こう何期分かの 需要に見合う量である.
 - -t期の生産量 x_t は d_t , d_t+d_{t+1} , $d_t+d_{t+1}+d_{t+2}$, ..., $d_t+d_{t+1}+d_{t+2}+\cdots+d_T$ のいずれか

動的計画法 (DP) の漸化式

 $c_{tk} = t$ 期からk-1期の需要に見合う量を t 期の生産量 x_t としたときの t 期から k-1 期の総費用

$$C_{tk} = a_t + v_t (d_t + d_{t+1} + \dots + d_{k-1})$$

$$+ h_t (d_{t+1} + \dots + d_{k-1}) + h_{t+1} (d_{t+2} + \dots + d_{k-1}) + \dots + h_{k-2} (d_{k-1})$$

$$= a_t + v_t \sum_{j=t}^{k-1} d_t + \sum_{i=t}^{k-2} h_i \sum_{j=i+1}^{k-1} d_j$$

$$f_t = \min_{k=t+1,...,T+1} \left\{ c_{tk} + f_k \right\}$$
 (DPの漸化式)
ただし、 $f_{T+1} = 0$ (境界条件)



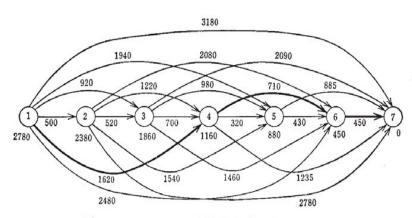


図 4.15 ロットサイズ決定問題の最短路ネットワーク

700

980

430

最適解

920

動的ロットサイズ決定問題の拡張

多品種問題:品種間の競合(順序づけ)を考慮する か否か

- ・品種間のスケジューリングを考慮しない多品種ロットサイズ決定問題
- 品種間のスケジューリングを考慮する ロットスケジューリング決定問題 (段取り時間を考慮しない/するモデル)

オペレーションズリサーチA -線形計画法-第1,2回

1 単体法の基礎

線形計画法 (linear programming) はさまざまな数理計画法 (mathematical programming) の手法の中でも、最も実用性の高いものである. 線形 $(1 \, \chi)$ 等式,不等式条件のもとで $1 \, \chi$ 式を最大化,もしくは最小化する問題を線形計画問題と呼び,特に次の問題 (LP) を標準型最小化問題と呼ぶ. 本稿では,Dantzig が提案した単体法 (simplex method) の概要を示す. c_j, a_{ij}, b_i は与えられた定数であり、z は目的関数を表す.変数 x_j は非負条件を有する.問題 (LP) においては、変数の数 n は等式制約の数 m より大きいものとする.

(LP)
$$\min_{j=1} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
subject to
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m$$
$$x_j \ge 0, j = 1, \dots, n$$

一般的な線形計画問題は、スラック変数の導入と変数の置き換えにより、標準型の最小化問題 (LP) に変換することができる。また標準型線形計画問題は、m 本の等式制約が m 個の基底変数と呼ばれる変数について解かれており、目的関数に基底変数が含まれないとき、基底形式で書かれているという。

問題 (LP) の基底形式が次のように問題 (LPb) として得られているものとする. 目的関数を $p_{j_{m+1}}=-c_{j_{m+1}},\ldots,p_{j_n}=-c_{j_n}$ として $z_0=z+p_{j_{m+1}}x_{j_{m+1}}+\cdots+p_{j_n}x_{j_n}$ と変形していることに注意されたい(ただし z_0 は定数項である). 問題 (LPb) において, 変数 x_{j_1},\ldots,x_{j_m} が基底変数であり, 残りの n-m 個の変数 $x_{j_{m+1}},\ldots,x_{j_n}$ を非基底変数と呼ぶ. 基底変数は目的関数には含まれない. 基底形式 (LPb) において, $b_{j_1},\ldots,b_{j_m}\geq 0$ であるとき, 可能基底形式と呼ぶ.

非基底変数の値を $x_{j_m+1},\dots,x_{j_n}=0$ とすると, 基底変数の値は $x_{j_1}=b_1,\dots,x_{j_m}=b_m$ となり, これを基底形式 (LPb) に対する基底解と呼ぶ.この場合, 目的関数の値は $z=z_0$ とな

る. 可能基底形式の基底解を可能基底解と呼ぶ. 問題 (LP) を次のような単体表に表す.

基底変数	定数項	x_{j_1}	x_{j_2}		$x_{j_{m-1}}$	x_{j_m}	$x_{j_{m+1}}$	 x_{j_n}
z	z_0	0	0		0	0	$p_{j_{m+1}}$	 p_{j_n}
x_{j_1}	b_1	1	0		0	0	$a_{1j_{m+1}}$	 a_{1j_n}
x_{j_2}	b_2	0	1		0	0	$a_{2j_{m+1}}$	 a_{2j_n}
:	:			٠			:	 ÷
$x_{j_{m-1}}$	b_{m-1}	0	0		1	0	$a_{m-1,j_{m+1}}$	 a_{m-1,j_n}
x_{j_m}	b_m	0	0		0	1	$a_{mj_{m+1}}$	 a_{mj_n}

単体表の z が含まれる行を目的関数行、目的関数行に含まれる $p_{j_{m+1}},\ldots,p_{j_n}$ を単体基準と呼ぶ。単体表において、第 h 等式制約の非基底変数 x_k に対する係数が $a_{hk}\neq 0$ となるとき、 $a_{hk}\neq 0$ を軸とする軸演算を次のように定義する.

単体表における軸演算

- (i) 単体表の第h 行の各成分を a_{hk} で割る.
- (ii) 単体表の第i行 ($i \neq h$) から新しい第h行の a_{ik} 倍を引いたものを新しい第i行とする.

定理 1. 可能基底形式において,次の(i),(ii)のいずれか一方が成り立つ.(ii)が成立する場合はさらに(iia),(iib)のいずれか一方が成り立つ.

- $(i)p_{j_l} \leq 0, l = m+1, \ldots, n$ となり、現在の基底解が最適解となる.
- (ii) $b \delta k \in \{j_{m+1}, \dots, j_n\}$ $c \beta v \tau p_k > 0 \ c \delta \delta$.
 - $(iia)a_{ik} \leq 0, i = 1, ..., m$ が成り立ち, z は下に有界でない.
- (iib) ある $a_{hk}>0,h\in\{1,\ldots,m\}$ において, a_{hk} を軸とする軸演算を行うと,可能基底形式が得られるような h が存在する. 新たな可能基底形式における目的関数の値は増加しない.
- 証明 (i) 可能基底解において, $p_{j_l} \leq 0, k=m+1,\ldots,n$ であれば, $z=z_0-\sum_{l=m+1}^n p_{j_l}x_{j_l}$ より, どの非基底変数を増加させても目的関数値は z_0 を下回ることはないため, 基底解は最適解である.
- (ii) ある $k \in \{j_{m+1},\ldots,j_n\}$ において $p_k>0$ である場合を考える. (iia) $a_{ik}\leq 0, i=1,\ldots,m$ であるとき、制約 $b_i=x_{j_i}+a_{ij_{m+1}}x_{j_{m+1}}+\ldots+a_{ik}x_k+\ldots+a_{ij_n}x_{j_n}, i=1,\ldots,m$ を満たす解を次のように与える. x_k 以外の非基底変数を 0 に固定して、 x_k を $x_k=\theta(\theta>0)$ へと増加させる. 基底変数を $x_{j_i}=b_i-a_{ik}\theta$ とすると、これらの解は(基底解でないが)制 約を満たす解となる. $x_k=\theta\to+\infty$ とすると、 $p_k>0$ より $z=z_0-p_kx_k\to-\infty$ となる.
- (iib) $b_h/a_{hk} = \min_{i \in \{1,\dots,m\}} \{b_i/a_{ik} | a_{ik} > 0\}$ とする. $b_i, i \in \{1,\dots,m\} \setminus \{h\}$ に軸演算を施し、得られたものを \bar{b}_i とする. $\bar{b}_i = b_i (b_h/a_{hk})a_{ik}$ であり、 $a_{ik} > 0$ ならば $\bar{b}_i = a_{ik} \{(b_i/a_{ik}) (b_h/a_{hk})\} \ge 0$ となり、 $a_{ik} \le 0$ ならば $\bar{b}_i \ge b_i \ge 0$ となるため、新たに得られる基底形式も可能基底形式となる.目的関数値は、軸演算の結果 $z_0 (b_h/a_{hk})(p_k)$ となるが、 $p_k > 0$ であるため z_0 より大きくならない.

可能基底形式が得られている場合の単体法

ステップ 0 $b_i \ge 0, i = 1, ..., m$ が満たされているものとする.

ステップ 1 $p_{j_l} \leq 0, l = m+1, \ldots, n$ ならば終了, 現在の基底解が最適解である. $p_k > 0$ を満たす $k \in \{j_{m+1}, \ldots, j_n\}$ が存在する場合はステップ 2 へ.

ステップ 2 $p_k = \max_{l \in \{m+1,\dots,n\}} p_{j_l}$ とする. $a_{1k},\dots,a_{mk} \leq 0$ ならば無限解が存在するので終了. $a_{ik} > 0$ となる i が存在する場合はステップ 3 へ.

ステップ 3 $\theta_h = b_h/a_{hk} = \min_{i \in \{1,\dots,m\}} \{b_i/a_{ik} | a_{ik} > 0\}$ とおいて a_{hk} を軸とする軸演算を行い、ステップ 1 に戻る. 非基底変数 x_k は基底変数となり、基底変数 x_{ik} が非基底変数となる.

定理 2. 可能基底形式の単体表から始めて定理 1(iib) の操作を繰り返すとき, 各段階において $b_h > 0$ ならば, 有限回の軸演算の後に定理 1(i) または (iia) の状態に達する.

例題1次の線形計画問題を標準型最小化問題に変形して解く.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
subject to
$$x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

目的関数を $z = -2x_1 - 3x_2$ の最小化問題とし、不等式制約にスラック変数 $x_3, x_4 \ge 0$ を加えて等式制約に変形する.

単体表を以下に示す.

基底変数	定数項	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i
\overline{z}	0	2	3	0	0	
$\overline{x_3}$	4	1	1	1	0	4
x_4	6	1	2	0	1	3
\overline{z}	-9	0.5	0	0	-1.5	
$\overline{x_3}$	1	0.5	0	1	-0.5	2
$\underline{}$	3	0.5	1	0	0.5	6
\overline{z}	-10	0	0	-1	-1	
$\overline{x_1}$	2	1	0	2	-1	
x_2	2	0	1	-1	1	

最適解は $x_1 = x_2 = 2$ となる. (以上)

軸演算の時に常に $b_h > 0$ ならば、基底変数の組合せは高々 $_n$ C $_m$ であるから、有限回の軸演算の後に最適解が得られるか、下に有界でないかを判定して終了する. $b_h = 0$ が生じる場合、単体表は退化しているという。一度使われた基底が再び出現し、同じ基底変換が繰り返される現象を巡回と呼ぶ。巡回を避けるためには、定理 1 の (ii) において、 $p_k > 0$ となる最

も小さい添字 k を選択し、(iib) においても $\min_{i \in \{1,\dots,m\}} \{b_i/a_{ik} | a_{ik} > 0\}$ を満たす添字が複数存在する場合、最も小さい添字 k を選択すればよい.これは B land の最小添字ルールと呼ばれている.

2 2段階単体法

続いて、可能基底形式が与えられていない場合の解法について述べる. 問題 (LP) において、 $b_i \geq 0, i=1,\ldots,m$ であると仮定する. ある i において $b_i < 0$ であれば、等式の両辺に (-1) をかけて $b_i \geq 0$ を満たすようにすることができる. 各等式制約に人工変数 $x_{n+i}, i=1,\ldots,m$ を付加した問題 (LP') を示す.

(LP'): min
$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1, ..., m$
 $x_j \ge 0, j = 1, ..., n, x_{n+i} \ge 0, i = 1, ..., m$

第 1 段階として (LP') の目的関数を、人工変数の和 $w=\sum_{i=1}^m x_{n+i}$ の最小化とした問題 (LP-phase1) を解く. 各人工変数で軸演算を行うことにより、可能基底形式が得られる.

(LP-phase1): min
$$w = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1, \dots, m$
 $z - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0$
 $x_j \ge 0, j = 1, \dots, n, x_{n+i} \ge 0, i = 1, \dots, m$

問題 (LP-phase1) の最適な単体表の w の行を $0=w+\sum_{j=1}^{n+m}q_jx_j$ とする.最適目的関数値 が w>0 となる場合,元問題 (LP) に実行可能解は無い.従って,w=0 となる場合を考える. (LP-phase1) の最適解における基底変数に人工変数がまったく含まれない場合は,最適な単体表から人工変数の列を全て消去すれば (LP) に対する可能基底形式が得られる.w=0 となる場合において,基底変数に人工変数が含まれる場合, $q_j<0$ に対応する列と w の行を単体表から削除する(第 1 段階の終わりに $q_j<0$ となる x_j を $x_j>0$ とすると,w>0 となり矛盾).人工変数となる基底変数の行に元問題の変数が含まれない場合は,制約が冗長であるためその行を削除する.(人工変数となる基底変数の行に元問題の変数が含まれている場合は,元問題の変数を軸とする軸演算によって可能基底形式を得ることもできる.)

第 2 段階として、(LP-phase1)を解くことによって得られた可能基底形式の線形計画問題を解く.

例題2次の線形計画問題を2段階単体法で解く.

min
$$z = -x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

subject to $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
 $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 20$
 $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 30$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$

各制約にそれぞれ人工変数 x_5, x_6, x_7 を加え、制約に元の目的関数 $z = -x_1 - 3x_2 - 2x_3$ を追加し、目的関数を人工変数の総和 $w = x_5 + x_6 + x_7$ とする.

単体表を以下に示す.

基底変数	定数項	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
\overline{w}	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	
\overline{z}	0	1	3	2	0	0	0	0	
x_5	10	1	1	1	0	1	0	0	
x_6	20	2	1	3	-1	0	1	0	
$\underline{}$ x_7	30	3	3	2	1	0	0	1	

これは基底形式ではないため、 x_5,x_6,x_7 で軸演算を行い、可能基底形式を得る.

基底変数	定数項	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
\overline{w}	60	6	5	6	0	0	0	0	
\overline{z}	0	1	3	2	0	0	0	0	
x_5	10	1	1	1	0	1	0	0	10
x_6	20	2	1	3	-1	0	1	0	10
x_7	30	3	3	2	1	0	0	1	10
\overline{w}	0	0	-1	0	0	-6	0	0	
\overline{z}	-10	0	2	1	0	-1	0	0	
x_1	10	1	1	1	0	1	0	0	
x_6	0	0	-1	1	-1	-2	1	0	
$\phantom{aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa$	0	0	0	-1	1	-3	0	1	

第 1 段階が終了し, w=0 となる解が得られている. 最適解における基底変数は x_1,x_6,x_7 であり, x_6 と x_7 が人工変数である. w の行 $0=w+\sum_{j=1}^{n+m}q_jx_j$ において, $q_j<0$ となる x_2,x_5 の列を単体表から削除する.

基底変数	定数項	x_1	x_3	x_4	x_6	x_7	θ_i
\overline{z}	-10	0	1	0	0	0	
$\overline{x_1}$	10	1	1	0	0	0	10
x_6	0	0	1	-1	1	0	0
$\underline{}$ x_7	0	0	-1	1	0	1	_
\overline{z}	-10	0	0	1	-1	0	
$\overline{x_1}$	10	1	0	1	-1	0	10
x_3	0	0	1	-1	1	0	_
$\underline{}$ x_7	0	0	0	0	1	1	
\overline{z}	-20	-1	0	0	0	0	
$\overline{x_4}$	10	1	0	1	-1	0	
x_3	10	1	1	0	0	0	
x_7	0	0	0	0	1	1	

最適解は $x_3 = x_4 = 10, x_1 = x_2 = 0$ となる. (以上)

3 線形計画法の参考書

線形計画法の参考書として代表的なものを示す. 最小化/最大化のどちらを取り扱うかや, 単体表の記述法などは必ずしも統一されているとはいえないため, 注意されたい. 本稿は主 に [4, 6] の記述法に従った.

参考文献

- [1] V. Chvatal, *Linear Programming*, Freeman, 1983. (阪田省二郎, 藤野和建 訳, 線形計画 法 (上, 下), 啓学出版, 1986, 1988.)
- [2] 今野浩, 線形計画法, 日科技連, 1987.
- [3] 久保幹雄, 田村明久, 松井知己 編, 応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店, 2002.
- [4] 森雅夫, 森戸晋, 鈴木久敏, 山本芳嗣, オペレーションズリサーチ I, 朝倉書店, 1991.
- [5] 田村明久, 村松正和, 最適化法, 共立出版, 2002.
- [6] 刀根薫, 数理計画, 朝倉書店, 1978.

椎名 孝之

早稲田大学 創造理工学部 経営システム工学科

〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

E-mail: tshiina@waseda.jp

オペレーションズリサーチ A -線形計画法-第3,4回

4 改訂単体法

標準型最小化問題 (LP) を行列表示する.

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n), \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

問題 (LP) は次のように書くことができる.

(LP)
$$\min_{\mathbf{z} = \mathbf{c}^{\top} \mathbf{x}$$

subject to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
 $\mathbf{x} \ge 0$

 $m \times n$ 行列 A において $\mathrm{rank}A = m$ とすると, A は m 次の正則な小行列 B を持ち, 行列 B を基底と呼ぶ. A = (B, N) と記し, 小行列 B, N に対応する変数ベクトル x を x_B, x_N と分け, 目的関数の係数ベクトル x も同様に x_B, x_M と分割する. このとき, 問題 (LP) は次のように行列表示を用いて, 問題 (LPm) の形式になる.

(LPm) min
$$z = \boldsymbol{c}_B^{\top} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\top} \boldsymbol{x}_N$$

subject to $B\boldsymbol{x}_B + N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$
 $\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N \geq 0$

初期基底 B に対応して、基底変数、非基底変数の添字集合をそれぞれ、 $S=\{1,\ldots,m\}$ 、 $T=\{m+1,\ldots,n\}$ とする、すなわち $\boldsymbol{x}^\top=(\boldsymbol{x}_B^\top,\boldsymbol{x}_N^\top)=(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)$ と定める、問題 (LPm) を次のように単体表の形で示す。

	z	$oldsymbol{x}_B$	$oldsymbol{x}_N$
0	1	$-oldsymbol{c}_B^ op$	$-oldsymbol{c}_N^ op$
b	0	В	N

この単体表は基底形式ではない. 基底形式においては, 基底変数 x_B に対する制約の係数行列が I(単位行列) で, 目的関数の係数が 0 でなければならない. そのために次の変形を行う.

基底 B の逆行列 B^{-1} を制約行列 $Bx_B + Nx_N = b$ の左から掛けると

$$\boldsymbol{x}_B + B^{-1}N\boldsymbol{x}_N = B^{-1}\boldsymbol{b}$$

となり, $\boldsymbol{x}_B = -B^{-1}N\boldsymbol{x}_N + B^{-1}\boldsymbol{b}$ の関係が得られる. これを目的関数に代入すると次のよ うになる.

$$z = \boldsymbol{c}_{B}^{\top}(-B^{-1}N\boldsymbol{x}_{N} + B^{-1}\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}_{N}^{\top}\boldsymbol{x}_{N}$$
$$= \boldsymbol{c}_{B}^{\top}B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_{N}^{\top} - \boldsymbol{c}_{B}^{\top}B^{-1}N)\boldsymbol{x}_{N}$$

 $\bar{\boldsymbol{c}}_N^{\top} = \boldsymbol{c}_N^{\top} - \boldsymbol{c}_B^{\top} B^{-1} N$ は被約費用 (reduced cost) と呼ばれ, $z = \boldsymbol{c}_B^{\top} B^{-1} \boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{c}}_N^{\top} \boldsymbol{x}_N$ となる. 以上の関係を表にすると, B を基底とする単体表が得られる.

	z	\boldsymbol{x}_B	$oldsymbol{x}_N$
$c_B^{\top} B^{-1} \boldsymbol{b}$	1	0	$\boldsymbol{c}_{B}^{T}B^{-1}N-\boldsymbol{c}_{N}^{T}$
$B^{-1}oldsymbol{b}$	0	I	$B^{-1}N$

 $\boldsymbol{c}_B^{\top}B^{-1}$ を単体乗数と呼び, $\boldsymbol{\pi}^{\top} = \boldsymbol{c}_B^{\top}B^{-1}$ と表す. 単体基準 \boldsymbol{p} は $\boldsymbol{p}^{\top} = \boldsymbol{c}_B^{\top}B^{-1}N - \boldsymbol{c}_N^{\top}$ であるため, $\boldsymbol{p} = -\bar{\boldsymbol{c}}_N$ となることに注意されたい. 基底解は次のようになる.

$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b} \ge 0, \ \boldsymbol{x}_N = 0$$

 $\bar{\boldsymbol{b}} = B^{-1}\boldsymbol{b}$ と定義し, $\bar{\boldsymbol{b}} = B^{-1}\boldsymbol{b} \ge 0$ となるとき B を可能基底と呼び, $\boldsymbol{p} \le 0$ を満たす可能基 底を最適基底と呼ぶ.単体法の1ステップを実施するために必要な情報は,元問題の全ての データではなく、以下の表に示されている部分にすぎない.

	z	\boldsymbol{x}_B	$oldsymbol{x}_N$
			$oldsymbol{p}^ op = oldsymbol{c}_B^ op B^{-1}N - oldsymbol{c}_N^ op$
$B^{-1}\boldsymbol{b}$			$oxed{B^{-1}oldsymbol{a}_k}$

従って, これらの必要な情報だけを用いて計算を行えば, 計算の手間とメモリの節約となる.

基底の逆行列 B^{-1} ,目的関数値 $\boldsymbol{c}_B B^{-1} \boldsymbol{b}$ の値の計算には,行列 $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{c}_B^{\top} B^{-1} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{\pi}^{\top} = \boldsymbol{c}_B^{\top} B^{-1} \\ \hline B^{-1} \boldsymbol{b} & B^{-1} \end{array} \right)$

を保持し、これを更新していく. (この行列は、初期可能基底形式 B = I, $c_B = 0$ が与えら れたときの単体表における定数項の列および、初期基底変数に対する目的関数行と係数の 行列から構成される. B=I, $c_B=0$ の場合, 軸演算が進んだ段階でも, 対応する単体基準 の値が単体乗数と等しいことは次のようにわかる. 軸演算後, 初期基底 I における第 i 単位 ベクトル e_i が基底行列から出て、第l 非基底列となると仮定し、新たな基底行列をB'、単体 乗数を π' とする. 対応する単体基準p'の第l成分は $p'_l = c_{B'}^{\intercal}(B')^{-1}e_i - (c_B)_i = \pi'_i$ となる. e_i が軸演算後も基底に留まる場合は, $(c_B)_i = (c_{B'})_i = 0$ であるため, $p_i' = \pi_i' = 0$ となる.) 改訂単体法のアルゴリズムを以下に示す.

改訂単体法

ステップ 0 初期可能基底 B およびその逆行列 B^{-1} が与えられているものとする. B の列に対応する添字集合を S, N の列に対応する添字集合を T とする.

ステップ 1 非基底変数の単体基準を $p^{\top} = c_B^{\top} B^{-1} N - c_N^{\top}$ によって求める. $p \le 0$ ならば終了, 現在の基底解が最適解である. p に正の成分が存在する場合はステップ 2 へ.

ステップ 2 $p_k = \max_{j \in T} p_j$ とする. $\mathbf{y}_k = B^{-1} \mathbf{a}_k$ とし, $\mathbf{y}_k \leq 0$ ならば無限解が存在するので終了. \mathbf{y}_k に正の成分が存在する場合はステップ 3 へ.

ステップ 3 $\theta_h = \bar{b}_h/y_{hk} = \min_{i \in \{1,...,m\}} \{\bar{b}_i/y_{ik} | y_{ik} > 0\}$ とおいて y_{hk} を軸とする軸演算を行列 $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{c}_B^{\top} B^{-1} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{\pi}^{\top} = \boldsymbol{c}_B^{\top} B^{-1} \\ \hline B^{-1} \boldsymbol{b} & B^{-1} \end{array} \right)$ に対して行い、ステップ 1 に戻る.

非基底変数 x_k は基底変数となり、基底変数 x_k が非基底変数となる

ステップ 3 で軸演算を行った後、基底は $B=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_h,\dots,\boldsymbol{a}_m)$ から $B'=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k,\dots,\boldsymbol{a}_m)$ へと変化したものとする.すなわち、列 \boldsymbol{a}_h が非基底となり、代わりに \boldsymbol{a}_k が基底となると仮定する.基底 B の下で、単体基準 $p_k>0, k\in T$ を満たす非基底列に対応する列 $\boldsymbol{y}_k=B^{-1}\boldsymbol{a}_k$ を選択する. \boldsymbol{y}_k の第 h 成分 $y_{hk}>0$ を軸とする軸演算行列 J_{hk} を次のように定義する.行列 J_{hk} は第 h 列のみが単位行列とは異なる.

第 h 列
$$J_{hk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -y_{1k}/y_{hk} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & & & \\ & \ddots & -y_{h-1,k}/y_{hk} & & & \\ \vdots & & 1/y_{hk} & & \vdots & & \\ & & -y_{h+1,k}/y_{hk} & \ddots & & \\ & & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & -y_{mk}/y_{hk} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

軸演算行列を行列または列ベクトルの左から掛けることにより、単体表に a_{hk} を軸として軸演算を行ったものと同じ結果が得られる. 実際, $J_{hk} \mathbf{y}_k = \mathbf{e}_h^\top (\mathbf{e}_h)$ は第 h 単位列ベクトル) となることが容易にわかる. 新基底 B' の右から J_{hk} を掛けると次のようになる.

 $B^{'}J_{hk}=B$ の左右から $(B^{'})^{-1}$ と B^{-1} を掛けることにより, $(B^{'})^{-1}B^{'}J_{hk}B^{-1}=(B^{'})^{-1}BB^{-1}$ となり, まとめると $J_{hk}B^{-1}=(B^{'})^{-1}$ となる. すなわち, 元の基底 B の逆行列に a_{hk} を軸として軸演算を施すことにより, 新たな基底 $B^{'}$ の逆行列が得られることが確認できた.

改訂単体法のステップ 3 では、行列 $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{c}_B^{\top}B^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{\pi}^{\top} = \boldsymbol{c}_B^{\top}B^{-1} \\ \hline B^{-1}\boldsymbol{b} & B^{-1} \end{array}\right)$ に対して、非基底列 $\boldsymbol{a}_k, k \in T$ に対応するベクトル $\boldsymbol{y}_k = B^{-1}\boldsymbol{a}_k$ の第 h 成分 $y_{hk}(>0)$ を軸とする軸演算を行

 $\mathbf{a}_k, k \in T$ に対応するベクトル $\mathbf{y}_k = B^{-1}\mathbf{a}_k$ の第 h 成分 $y_{hk}(>0)$ を軸とする軸演算を行い、基底 $B = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_h, \dots, \mathbf{a}_m)$ の逆行列 B^{-1} より新基底 $B' = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_m)$ の逆行列 $(B')^{-1}$ を得る.基底 B の第 h 列ベクトル $\mathbf{a}_h, h \in S$ の代わりに、新たに列 $\mathbf{a}_k, k \in T$ が新基底 B' に入る.

$oldsymbol{c}_B^ op B^{-1} oldsymbol{b}$	$oldsymbol{\pi}^{ op} = oldsymbol{c}_B^{ op} B^{-1}$
$B^{-1}oldsymbol{b}$	B^{-1}

p_k	
y_{1k}	
:	$y_{hk}(>0)$ を軸とする軸演算を行う
y_{hk}	$\mathbf{y}_k = B^{-1} \mathbf{a}_k$
:	
y_{mk}	

軸演算後の結果は次のようになる.

$oldsymbol{c}_{B'}^ op(B')^{-1}oldsymbol{b}$	$(oldsymbol{\pi}')^ op = oldsymbol{c}_{B'}^ op (B')^{-1}$
$(B^{\prime})^{-1}\boldsymbol{b}$	$(B')^{-1}$

軸演算により、単体乗数 $\pi^\top = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}$ が $(\pi')^\top = \boldsymbol{c}_{B'}^\top (B')^{-1}$ へと更新されることは、次のように示される.

$$(\pi')^{\top} = \mathbf{c}_{B}^{\top} B^{-1} - \frac{p_{k}}{y_{hk}} \mathbf{e}_{h}^{\top} B^{-1} \left(\mathbf{e}_{h} \text{は第 } h \text{ 単位列ベクトル}, \mathbf{e}_{h}^{\top} B^{-1} \text{ は } B^{-1} \text{ の第 } h \text{ 行を表す} \right)$$

$$= (\mathbf{c}_{B}^{\top} - \frac{\mathbf{c}_{B}^{\top} y_{k} - (\mathbf{c}_{N})_{k}}{y_{hk}} \mathbf{e}_{h}^{\top}) B^{-1}$$

$$= ((\mathbf{c}_{B})_{1}, (\mathbf{c}_{B})_{2}, \dots, [-\frac{y_{1k}}{y_{kh}} (\mathbf{c}_{B})_{1} - \dots, +\frac{1}{y_{kh}} (\mathbf{c}_{N})_{k} - \dots, -\frac{y_{mk}}{y_{kh}} (\mathbf{c}_{B})_{m}], \dots, (\mathbf{c}_{B})_{m}) B^{-1}$$

$$= ((\mathbf{c}_{B})_{1}, (\mathbf{c}_{B})_{2}, \dots, (\mathbf{c}_{N})_{k}, \dots, (\mathbf{c}_{B})_{m})$$

$$= ((\mathbf{c}_{B})_{1}, (\mathbf{c}_{B})_{2}, \dots, (\mathbf{c}_{N})_{k}, \dots, (\mathbf{c}_{B})_{m}) J_{hk} B^{-1}$$

$$= \mathbf{c}_{B'}^{\top} (B')^{-1} \left(J_{hk} B^{-1} = (B')^{-1} \mathbf{b} \mathbf{b} \right)$$

目的関数値 $\mathbf{c}_B^{\top}B^{-1}\mathbf{b}$, 右辺定数 $B^{-1}\mathbf{b}$ も軸演算によりそれぞれ, $\mathbf{c}_{B'}^{\top}(B')^{-1}\mathbf{b}$, $(B')^{-1}\mathbf{b}$ となることも同様に示すことができる.

例題3次の線形計画問題を改訂単体法で解く.

min
$$z = -2x_1 - 3x_2$$

subject to $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
 $x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

(反復1)

ステップ **0.**
$$B=B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ S=\{3,4\},T=\{1,2\},\ \boldsymbol{c}_B^\top=(0,0),\boldsymbol{c}_N^\top=(-2,-3),$$
 $\boldsymbol{\pi}^\top=\boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}=(0,0).$ 基底解は $\boldsymbol{x}_B^\top=(x_3,x_4)=(4,6),\ \boldsymbol{x}_N^\top=(x_1,x_2)=(0,0)$ となる.

ステップ 1.
$$\mathbf{p}^{\top} = (p_1, p_2) = \boldsymbol{\pi}^{\top} N - \boldsymbol{c}_N^{\top} = (0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - (-2, -3) = (2, 3)$$

ステップ 2. $p_k = \max_{j \in T} p_j = \max\{2,3\} = 3$ で対応する x_2 が基底変数となる. $\boldsymbol{y}_2 =$ $B^{-1}\boldsymbol{a}_2 = (1,2)^{\top}.$

ステップ 3. $\theta_2=\bar{b}_2/y_{22}=\min_{i\in\{1,2\}}\{\bar{b}_i/y_{ik}|y_{ik}>0\}=\min\{4,3\}$ を求め, y_{22} を軸とする軸演算を行い, ステップ 1 に戻る. $x_4=\bar{b}_2=6$ である基底変数 x_4 が非基底変数となる.

これより新たな基底は $B=(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)$ となり, $S=\{3,2\},T=\{1,4\}$ である.軸演算後の 行列より, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, $z = \boldsymbol{c}_B^{\top} B^{-1} \boldsymbol{b} = -9$, $\boldsymbol{x}_B = (x_3, x_2)^{\top} = B^{-1} \boldsymbol{b} = (1, 3)^{\top}$, $\boldsymbol{\pi}^{\top} = \boldsymbol{c}_{B}^{\top} B^{-1} = (0, -1.5)$ であることがわかる. (反復2)

ステップ 1.
$$\mathbf{p}^{\top} = (p_1, p_4) = \mathbf{\pi}^{\top} N - \mathbf{c}_N^{\top} = (0, -1.5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (-2, 0) = (0.5, -1.5)$$

ステップ 2. $p_k = \max_{j \in T} p_j = \max\{0.5, -1.5\} = 0.5$ で対応する x_1 が基底変数となる. $y_1 = B^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{y}_1 = B^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

ステップ 3. $\theta_1=\bar{b}_1/y_{12}=\min_{i\in\{1,2\}}\{\bar{b}_i/y_{ik}|y_{ik}>0\}=\min\{2,6\}$ を求め, y_{11} を軸とする軸 演算を行い, ステップ 1 に戻る. $x_3=\bar{b}_1=1$ である基底変数 x_3 が非基底変数となる.

これより新たな基底は $B=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ となり, $S=\{1,2\},T=\{3,4\}$ である。軸演算後の 行列より, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $z = \boldsymbol{c}_B^{\mathsf{T}} B^{-1} \boldsymbol{b} = -10$, $\boldsymbol{x}_B = (x_1, x_2)^{\mathsf{T}} = B^{-1} \boldsymbol{b} = (2, 2)^{\mathsf{T}}$, $\pi^{\top} = c_B^{\top} B^{-1} = (-1, -1)$ であることがわかる. (反復3)

ステップ 1.
$$\boldsymbol{p}^{\top} = (p_3, p_4) = \boldsymbol{\pi}^{\top} N - \boldsymbol{c}_N^{\top} = (-1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (0, 0) = (-1, -1)$$

p < 0 より、現在の基底解が最適解である.

単体表を以下にふたたび示す.

基底変数	定数項	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i
\overline{z}	0	2	3	0	0	
$\overline{x_3}$	4	1	1	1	0	4
x_4	6	1	2	0	1	3
\overline{z}	-9	0.5	0	0	-1.5	
$\overline{x_3}$	1	0.5	0	1	-0.5	2
x_2	3	0.5	1	0	0.5	6
\overline{z}	-10	0	0	-1	-1	
$\overline{x_1}$	2	1	0	2	-1	
x_2	2	0	1	-1	1	

最適解は $x_1=x_2=2$ となる。改訂単体法では単体表の全体でなく,一部のみを計算していることがわかる。1,2,3番目の単体表の基底行列はそれぞれ $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B'=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, $B''=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ である。1番目の単体表から 2番目へ移る軸演算行列は $J=\begin{pmatrix}1&-0.5\\0&0.5\end{pmatrix}$ であり,2番目の単体表から 3番目へ移る軸演算行列は $J'=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$ であることが単体表からわかる。このとき,次の関係が成り立つ。

$$B^{-1} = (I)^{-1} = I$$

$$(B')^{-1} = JB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(B'')^{-1} = J'(B')^{-1} = J'JB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

このように、新たな基底行列の逆行列は、初期基底行列の逆行列の左から軸演算行列を繰り返し掛けた形になる.これを積形式の逆行列と呼ぶ. (以上)

椎名 孝之

早稲田大学 創造理工学部 経営システム工学科

〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

E-mail: tshiina@waseda.jp

オペレーションズリサーチA -線形計画法-第5回

5 双対問題

標準型最小化問題 (LP) に対し, ラグランジュ緩和 (Lagrangian relaxation) を行うことにより, 双対問題の導出を行う.

(LP)
$$\min_{\mathbf{c}^{\top} \mathbf{x}} \mathbf{c}^{\top} \mathbf{x}$$
 subject to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq 0$

ラグランジュ乗数ベクトル $\mathbf{y}^{\top} = (y_1, \dots, y_m)$ を等式制約 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ にかけ、同時に非負の ラグランジュ乗数ベクトル $\mathbf{z}^{\top} = (z_1, \dots, z_n) \ge 0$ を不等式制約 $\mathbf{x} \ge 0$ にかけて、目的関数 に組み込むことにより、次の問題 $(\operatorname{LR}(\mathbf{y}, \mathbf{z}))$ が得られる.

$$(LR(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) | \min \ \boldsymbol{c}^{\top} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{\top} (\boldsymbol{b} - A \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}^{\top} (\boldsymbol{x} - 0) = (\boldsymbol{c}^{\top} - \boldsymbol{y}^{\top} A - \boldsymbol{z}^{\top}) x + \boldsymbol{y}^{\top} \boldsymbol{b}$$

問題 (LP) の実行可能解 x は、問題 (LR(y,z)) の実行可能解であるため、 $y^{\mathsf{T}}(Ax - b) = 0$, $z^{\mathsf{T}}x \ge 0$ であり、問題 (LR(y,z)) の目的関数値は、問題 (LP) の目的関数値を上回ることはない.しかも、問題 (LR(y,z)) は問題 (LP) の制約 Ax = b を取り除いているため、問題 (LP) の緩和問題となる.よって、次の関係が得られる.

問題 (LR(y,z)) の目的関数の最適値 \leq 問題 (LP) の目的関数の最適値

問題 (LR(y,z)) の変数 x に符号制約はないため,目的関数における x の係数ベクトル $(c^\top - y^\top A - z^\top)$ に 1 つでも非ゼロ成分があれば,問題 (LR(y,z)) の目的関数値は $-\infty$ に発散する.よって,この問題は緩和問題として意味をなさなくなる.そのためラグランジュ乗数の値を $c^\top - y^\top A - z^\top = 0$ を満たすように制限する必要がある.このとき問題 (LR(y,z)) の目的関数は, $y^\top b$ となる.また,ラグランジュ乗数ベクトルz の非負性より, $z^\top = c^\top - y^\top A \geq 0$ となる.以上より,問題 (LP) の最適目的関数値に対する最も大きな下界を与えるラグランジュ乗数 y を求めるには,次の問題を解けばよい.

(LP-dual)
$$\max_{\mathbf{y}^{\top} \mathbf{b}} \mathbf{y}^{\top} \mathbf{b}$$
 subject to $\mathbf{y}^{\top} A \leq \mathbf{c}^{\top}$

この問題はy を双対変数とする (LP) の双対問題 (LP-dual) である. 双対変数y には符号制 約がない. ラグランジュ緩和問題 (LR(λ)) の導出において, $y^{\top}(b-Ax)$ でなく, $y^{\top}(Ax-b)$

を目的関数に加えても双対問題を導出することができる. この場合最終的に次の (LP-dual') が得られる.

(LP-dual')
$$\max_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} -\mathbf{y}^{\mathsf{T}} \mathbf{b}$$
 subject to $-\mathbf{y}^{\mathsf{T}} A \leq \mathbf{c}^{\mathsf{T}}$

(LP-dual') において, y には符号制約は無いため, -y を改めて y と置き換えると, (LP-dual) が得られる.

(LP) と (LP-dual) の両者を並べて再び示す.

(LP)
$$\begin{vmatrix} \min & \boldsymbol{c}^{\top} \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{vmatrix}$$
 (LP-dual) $\begin{vmatrix} \max & \boldsymbol{y}^{\top} \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^{\top} A \leq \boldsymbol{c}^{\top} \end{vmatrix}$

問題 (LP) を主問題と呼び、(LP-dual) をその双対問題と呼ぶ。また、問題 (LP-dual) の双対問題が問題 (LP) になることは容易に確認することができる。この 2 つの問題に成り立つ関係を示す。

定理 3 (弱双対定理). 主問題 (LP) の任意の実行可能解 x と, 双対問題 (LP-dual) の任意の実行可能解 y に対して,

$$oldsymbol{c}^{ op}oldsymbol{x} > oldsymbol{y}^{ op}oldsymbol{b}$$

が成立する.

証明 (LP) の制約 $Ax = \mathbf{b}$ の左から \mathbf{y}^{\top} を掛けると, $\mathbf{y}^{\top}A\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\top}\mathbf{b}$ となり, (LP-dual) の制約 $\mathbf{y}^{\top}A \leq \mathbf{c}^{\top}$ の右から $\mathbf{x}(\geq 0)$ を掛けると, $\mathbf{y}^{\top}A\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^{\top}\mathbf{x}$ が得られる. よって $\mathbf{c}^{\top}\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^{\top}\mathbf{b}$ が成立する.

定理3より次の2つの系を示すことができる.

系 1. 問題 (LP) が無限解を持つなら、(LP-dual) は実行可能解を持たない.

系 2. 主問題 (LP) の実行可能解 \hat{x} と、双対問題 (LP-dual) の実行可能解 \hat{y} に対して、

$$oldsymbol{c}^{ op}\hat{oldsymbol{x}} = \hat{oldsymbol{y}}^{ op}oldsymbol{b}$$

が成立するならば、 \hat{x} 、 \hat{y} はそれぞれ問題 (LP) と (LP-dual) の最適解である.

系 2 の条件が成り立つとき, $c^{\top}\hat{x}=\hat{y}^{\top}b$ を満たす \hat{x} と \hat{y} が存在することを保証する定理を示す.

定理 $\mathbf{4}$ (双対定理). 主問題 (LP) が最適解を持つ場合, 双対問題 (LP-dual) も最適解を持ち, (LP) における $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ の最小値と (LP-dual) における $\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$ の最大値は一致する.

証明 (LP) が最適解を持つならば、(LP) に単体法を適用することによって最適基底解が得られる。これを \mathbf{x}^* とし、対応する基底行列をB とする。このとき、A=(B,N)、 $\mathbf{x}^*=\begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$ 、

$$m{c} = \left(egin{array}{c} m{c}_B \ m{c}_N \end{array}
ight)$$
と分解表示する. $(m{y}^*)^ op = m{c}_B^ op B^{-1}$ とすると, $m{y}^*$ は(LP-dual)の最適解となる

ことを示す. ここで, \boldsymbol{y}^* の値は (LP) の最適基底 B に対する単体乗数 $\boldsymbol{\pi}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}$ と等しいということに注意されたい.

(LP) の最適基底解は $\boldsymbol{x}_B^* = B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_N^* = 0$ であり, (LP) の目的関数値は $\boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B^* + \boldsymbol{c}_N^\top \boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b}$ となる. (LP-dual) の目的関数値は $(\boldsymbol{y}^*)^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b}$ であるため, (LP) の目的関数の最小値と (LP-dual) の目的関数の最大値は一致する.

続いて、 \boldsymbol{y}^* が (LP-dual) の実行可能解であることを示す。 実行可能であるための条件 $(\boldsymbol{y}^*)^{\top}A \leq \boldsymbol{c}^{\top}$ を分解表示すると、 $(\boldsymbol{y}^*)^{\top}(B,N) \leq (\boldsymbol{c}_B^{\top},\boldsymbol{c}_N^{\top})$ となる.これらを成分ごとに次のように表す.

$$(\boldsymbol{y}^*)^{\top} B \leq \boldsymbol{c}_B^{\top}$$

 $(\boldsymbol{y}^*)^{\top} N \leq \boldsymbol{c}_N^{\top}$

 $(y^*)^{\top} = c_B^{\top} B^{-1}$ であるため, $(y^*)^{\top} B = c_B^{\top} B^{-1} B = c_B^{\top}$ となり,1 番目の条件は成り立つ.実行可能であるための 2 番目の条件は, $c_B^{\top} B^{-1} N - c_N^{\top} \le 0$ である.この左辺は (LP) の単体基準 p(あるいは被約費用 \bar{c}_N の (-1) 倍 $p = -\bar{c}_N$) $p^{\top} = c_B^{\top} B^{-1} N - c_N^{\top}$ と等しくなる.基底 B は (LP) の最適基底であり, $p \le 0$ が成り立つため,p は (LP-dual) の実行可能解である. 「系 1,2,定理 4 の結果を以下の表に示す.ただし, () は起こり得るケース,×は起こり得ないケースを表す.

	双対問題	実行可能		実行不可能
主問題		最適解あり	無限解	
実行可能	最適解あり	0	×	×
大门引肥	無限解	×	×	0
実行不可能		×	0	0

次に、標準型以外の線形計画問題における双対問題を考えよう. 次の問題 (LP1) を主問題とすると、その双対問題は問題 (LP1-dual) となる. これは問題 (LP1) を標準型に変形することによって示すことができる.

(LP1)
$$\begin{vmatrix} \min & \boldsymbol{c}^{\top} \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{vmatrix}$$
 (LP1-dual) $\begin{vmatrix} \max & \boldsymbol{y}^{\top} \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^{\top} A \leq \boldsymbol{c}^{\top} \\ \boldsymbol{y} \geq 0 \end{vmatrix}$

問題 (LP1-dual) にスラック変数 $s \ge 0$ を導入した標準型問題を (LP1') とし、その双対問題を (LP1-dual') とする.

(LP1')
$$\begin{vmatrix} \min & (\boldsymbol{c}^{\top}, 0^{\top}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \\ \text{subject to} & (A, -I) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$
 (LP1-dual')
$$\begin{vmatrix} \max & \boldsymbol{y}^{\top} \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^{\top} (A, -I) \leq (\boldsymbol{c}^{\top}, 0^{\top}) \end{aligned}$$

(LP1-dual) と等しいことがわかる. 従って, (LP1) の双対問題は (LP1-dual) となる. (LP1') の目的関数はs に関する項を含まないため, 系 2 における条件 $c^{\mathsf{T}}x+0^{\mathsf{T}}s=y^{\mathsf{T}}b$ は $c^{\mathsf{T}}x=y^{\mathsf{T}}b$ となり, 系 2 は (LP1) と (LP1-dual) においてもそのまま成立することに注意されたい. また, (LP1) と (LP1-dual) においては, 定理 4 も同様に成り立つ.

定理 5 (相補スラック定理). 主問題 (LP1) の実行可能解 x と, 双対問題 (LP1-dual) の実行可能解 y がそれぞれ (LP1) と (LP1-dual) の最適解であるための必要十分条件は,

$$(\boldsymbol{c}^{\top} - \boldsymbol{y}^{\top} A) \boldsymbol{x} = 0$$

$$\boldsymbol{y}^{\top}(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0$$

が成立することである.

証明 $(c^{\top} - y^{\top}A)x = 0$ と $y^{\top}(Ax - b) = 0$ が成り立つならば, $c^{\top}x = y^{\top}b$ となるため, 系 2 より, x と y はそれぞれ, (LP1) と (LP1-dual) の最適解である. 逆に, x と y をそれぞれ, (LP1) と (LP1-dual) の最適解とする. このとき, 次の不等式が成り立つ.

$$oldsymbol{y}^{ op}oldsymbol{b} & \leq & oldsymbol{y}^{ op}Aoldsymbol{x} & (oldsymbol{y} \geq 0 \ ag{c}^{ op}oldsymbol{x} \ & < & oldsymbol{c}^{ op}oldsymbol{x}$$

x と y の最適性から、定理 4 より $y^{\mathsf{T}}b = c^{\mathsf{T}}x$ が成り立つため、上の不等式は全て等号で満たされなければならない。 よって、 $(c^{\mathsf{T}} - y^{\mathsf{T}}A)x = 0$ と $y^{\mathsf{T}}(Ax - b) = 0$ が成り立つ。

双対問題の意味 製造業 D 社は資源 R_j , $j=1,\ldots,n$ を所有し、これを加工して商品 G_i , $i=1,\ldots,m$ を生産している。商品 G_i を 1 単位生産するために必要な資源 R_j の使用量を a_{ij} とし、資源 R_j の利用可能量を c_j とする。商品 G_i を 1 単位売却する場合の利益を b_i と する。商品 G_i の販売量を、変数 y_i と定める。このとき、D 社の生産計画として、総利益を最大化する問題 (LP1-dual) が定式化でき、同時にその双対問題 (LP1) を示す。

(LP1)
$$\begin{vmatrix} \min & \boldsymbol{c}^{\top} \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{vmatrix}$$
 (LP1-dual) $\begin{vmatrix} \max & \boldsymbol{y}^{\top} \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^{\top} A \leq \boldsymbol{c}^{\top} \\ \boldsymbol{y} \geq 0 \end{vmatrix}$

双対問題 (LP1) は次のように解釈できる.総合商社 P 社は D 社が保有する資源 R_j , $j=1,\ldots,n$ を購入することを計画している.資源 R_j の 1 単位当たりの購入価格を変数 x_j と定める.P 社が D 社から資源を購入できるための条件は次のようになる.D 社にとって,商品 G_i を売却することにより得られる利益よりも資源売却により得られる収入の方が高くなければ,資源売却に応じないはずである.よって $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i=1,\ldots,m$ でなければならない.これは (LP1) の制約式を表す.P 社の目的関数は資源の購入費用であり,これを最小化するような資源の購入計画が (LP1) である.

(LP1) と (LP1-dual) の最適解をそれぞれ、 x^*, y^* とすると、定理 4 より、 $\mathbf{c}^{\top}x^* = (y^*)^{\top}\mathbf{b}$ が成り立つ.これより、資源 R_j の利用可能量の値が c_j から $c_j + \Delta c_j$, $\Delta c_j > 0$ へと変化したとする.そのとき,D 社の総利益は $\Delta c_j x_j^*$ だけ増加する.よって、 x_j^* は資源 R_j の潜在価格(シャドウ・プライス)と呼ばれる.

6 凸多面集合の性質

 $x^1, x^2 \in \Re^n, 0 \le \lambda \le 1$ であるとき, $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ を x^1 と x^2 の凸結合という. $S \subset \Re^n$ は, S の任意の 2 点 x^1 , x^2 の凸結合を含むとき, すなわち

$$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in \Re^n, 0 \le \lambda \le 1 \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}^1 + (1 - \lambda) \boldsymbol{x}^2 \in S$$

を満たすとき、 凸集合であるという. また、 凸集合Sは、

$$x \in S, \lambda \ge 0 \Rightarrow \lambda x \in S$$

であるとき, 凸錐と呼ばれる. ある 0 でないベクトル $\alpha\in\Re^n$ と $\alpha_0\in\Re^1$ に対して定義される集合

$$H_0 = \{ \boldsymbol{x} \in \Re^n | \alpha^\top \boldsymbol{x} = \alpha_0 \}$$

を超平面といい,

$$H_{-} = \{ \boldsymbol{x} \in \Re^{n} | \alpha^{\top} \boldsymbol{x} \ge \alpha_{0} \}$$

を (超平面 H_0 で区切られる) 半空間という。有限個の半空間と超平面の共通部分として定義される集合は凸集合であり、凸多面集合と呼ばれる。また有界な凸多面集合を凸多面体と呼ぶ。標準型線形計画問題 (LP) の実行可能解集合 $\{x\in\Re^n|Ax=b,x\geq 0\}$ も、容易に確かめられるように凸集合である。

凸集合Sの点xは、Sに含まれる相異なる2点 $x^1, x^2 \in S$ を結ぶ開線分 (x^1, x^2) 上の点にならないとき、すなわち、

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}^1 + (1 - \lambda) \boldsymbol{x}^2, 0 < \lambda < 1 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^2$$

という関係が成り立つとき, x を S の頂点 (端点) という.

定理 6. 標準型線形計画問題 (LP) の実行可能解集合を $X = \{x \in \Re^n | Ax = b, x \geq 0\}$ とすると、実行可能基底解は X の端点である.

証明 簡単のため $\operatorname{rank} A = m$ とする. $\operatorname{rank} A < m$ の場合も証明は同様にできる. \hat{x} を X の実行可能基底解であるとし、一般性を失わずに x_1, \ldots, x_m が基底変数であるものとする. すなわち、 $\hat{x}_1 \geq 0, \ldots, \hat{x}_m \geq 0$ 、 $\hat{x}_{m+1} = 0, \ldots, \hat{x}_n = 0$ と仮定する. 行列 A の第 j 列ベクトルを a_j と書くと、 a_1, \ldots, a_m は線形独立であり、

$$\boldsymbol{a}_1\hat{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_m\hat{x}_m = \boldsymbol{b}$$

を満たす. そこで X に属する x^1, x^2 と $0 < \lambda < 1$ に対して,

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \lambda \boldsymbol{x}^1 + (1 - \lambda)\boldsymbol{x}^2$$

と書けたとする, すなわち \hat{x} が x^1 と x^2 の凸結合で表すことができるとする. このとき, \hat{x} の $m+1,\ldots,n$ 成分は0, すなわち

$$0 = \hat{x}_j = \lambda x_j^1 + (1 - \lambda) x_j^2, x_j^1 \ge 0, x_j^2 \ge 0$$

となるが、 x^1 と x^2 の $m+1,\ldots,n$ 成分は非負であるため、

$$x_i^1 = x_i^2 = 0, j = m + 1, \dots, n$$

でなければならない. これと $Ax^1 = b$, $Ax^2 = b$ より, 次の関係が得られる.

$$\boldsymbol{a}_1 x_1^1 + \ldots + \boldsymbol{a}_m x_m^1 = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{a}_1 x_1^2 + \ldots + \boldsymbol{a}_m x_m^2 = \boldsymbol{b}$$

これを辺々差し引くと、次のようになる.

$$a_1(x_1^1 - x_1^2) + \ldots + a_m(x_m^1 - x_m^2) = b$$

 a_1, \ldots, a_m は線形独立であるから,

$$x_1^1 - x_1^2 = 0, \dots, x_m^1 - x_m^2 = 0$$

すなわち $x_j^1=x_j^2=0, j=1,\ldots,m$ となる. よって, $\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^1=\boldsymbol{x}^2$ が示され, $\hat{\boldsymbol{x}}$ が異なる 2 点 の凸結合で示すことはできないため, 実行可能基底解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ は X の端点である.

椎名 孝之

早稲田大学 創造理工学部 経営システム工学科

〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

E-mail: tshiina@waseda.jp

確率計画法とその応用†

椎名 孝之*

数理計画法の適用分野は、現実社会の多種多様な場面に及ぶ。現実の数理計画問題には、目的関数および制約条件に不確実要素を伴う場合が多い。不確実な状況下での意思決定にはリスクが含まれるため、現実システムの不確実性をモデル化し、確率的変動要素を考慮した解法が必要となる。そのため、数理計画法の一手法である確率計画法の紹介を行う。確率計画法は、数理計画問題に含まれるパラメータが確率変数と定義される問題であり、不確実な状況下での最適化問題を対象とする。従来は設計、計画、運用などの問題に対して、確定的な数理計画法が用いられてきたが、不確実な状況下での意思決定が重要である。本論文では、実問題に適用可能な、確率計画法に基づく数理計画モデルとその効率的な解法を示す。

キーワード: 確率計画法、罰金に対する償還請求を有する確率計画問題、機会制約条件を有する確率計画問題、 多期間の確率計画問題、通信網設計、発電機起動停止問題、電力供給計画

1 はじめに

様々の分野で発生する現実の数理計画問題には、目的 関数および制約条件に不確実な要素を伴う場合が多い。 不確実な状況下での計画には、リスクが含まれる。電気 事業における電力供給計画を例にあげる。電力供給計 画は、電力需要を満たすという制約条件の下で、電力供 給コストを最小化する問題である(Wood-Wollenberg [50])。電力需要および、電力供給に必要な燃料費など は確定的な値ではなく、確率的な変動を含む。電力需 要が想定値より大きくなると、電力供給が満たされな い可能性が生じ、また電力需要の想定を大きくとりす ぎると、供給設備に余剰が生じることになる。また、 電力供給に必要な燃料費が変動する場合は、電力供給 の実行可能性には問題は生じないものの、供給コスト の最適性が失われる可能性がある。このようなリスク は、現実の計画においては回避されなければならない。

そのため、現実のシステムに含まれる不確実な状況をモデル化し、確率的変動要素を考慮することが必要となる。このように不確実要素を直接モデルに組み入れた最適化手法は、確率計画法 (stochastic programming)と呼ばれている。特に電気事業においては、今後予定される電力自由化や規制緩和の進展 (Shahidehpour [26])により、不確実な状況下での意思決定やリスク管理手法が重要となるため、確率計画法の理論と手法のより一層の進展が求められている。

紹介し、現実問題において重要性が指摘されている次の3つの問題への確率計画法の応用について議論する。

• 罰金に対する償還請求を有しかつ、整数条件を含

• 罰金に対する償還請求を有しかつ、整数条件を含む確率計画問題の通信網設計への応用

そこで、本論文では確率計画法の基本的なモデルを

- 組合せ的な条件を含む、多期間の確率計画問題の 発電機起動停止問題への応用
- 同時機会制約条件を有する確率計画問題の電力供給計画への応用

本論文は以下のように構成されている。

第2節では確率計画法の基礎的なモデルを示し、従 来研究の問題点を示す。

第3節では、通信網設計問題を集線装置配置問題として定式化する。続いて、予想される将来の通信需要の増大に対応するために、各電気所で発生する通信量が不確実であると仮定すると、対応する問題は整数条件を有する確率計画問題となる。そして設備の増設費用をペナルティであると定義すると、初期投資費用と設備増設費用の期待値の総和を最小化する問題となり、逐次的に目的関数を線形近似する L-shaped 法と分枝限定法を組み合わせた手法により解を求めることができる。この手法はより複雑な多期間の問題へと拡張できる。

第4節では、組合せ条件を含む多期間の確率計画問題の、発電機起動停止問題への応用を考える。電力需要は時間とともに変動するため、発電機の時間帯毎の運用が、供給費用の削減のために重要な問題となって

[†]Applications of Stochastic Programming

Takayuki SHIINA

^{*} 早稲田大学

Waseda University

いる。この問題に対しては、ラグランジュ緩和法を用いて発電機毎に問題を分解し、各発電機のスケジュールを効率的に求める手法を示す。

第5節では、確率変数の相関を考慮した同時機会制約条件を含む確率計画問題の電力供給計画への応用について論じる。電力供給においては、景気などによる長期的な需要変動や、気象条件などの変化による短期的な需要変動を想定している。供給に支障を起こすことを防ぐために、供給予備力の保有を必要としている。本節で示すモデルでは、運転計画における電力需要値を、正規分布に従う確率変数と定義する。1日を複数に分割した時間帯毎に需要を満たすという制約条件が満たされる確率は、多次元の数値積分によって求められ、非線形最適化手法と組み合わせることによって、供給費用を最小化することができる。

最後に第6節では、本論文の内容をまとめ今後の課題について述べる。

2 従来の研究

2.1 確率計画法におけるアプローチ方法

本論文で取り扱う数理計画問題のパラメータの一部は、あらかじめ与えられた確率分布に従う確率変数であるとする。確率計画問題のプロトタイプを次の問題(SP)に示す。

(SP): min
$$g_0(x, \tilde{\xi})$$

subject to $g_i(x, \tilde{\xi}) \leq 0, i = 1, ..., m$
 $x \in X \subset \Re^n$

ただし、X および $g_i(x,\tilde{\xi}): \Re^n \to \Re, i=0,\ldots,m$ は与えられているものとする。 $\tilde{\xi}$ は台集合 Ξ ($\subset \Re^N$) を持つ確率変数ベクトルである。 Ξ の部分集合の族 $\mathcal F$ および $\mathcal F$ に含まれる個々の事象が発生する確率 P は与えられているものとする。すなわち確率空間 ($\Xi,\mathcal F,P$) が与えられているものとする。

問題 (SP) は、目的関数と制約条件に確率変数を含んでおり、確率変数の全ての実現値に対して制約を満たしかつ目的関数を最小化するxが存在しない可能性があるため、明確に定義されたものであるとはいえない。従って等価確定問題 (deterministic equivalent) に考え直す必要があり、そのために各種のアプローチが採られる。

確率計画法は、1950 年代の Dantzig [11]、Charnes-Cooper [10] らの研究に起源を有する。前者は罰金に 対する償還請求を有する確率計画問題、後者は機会制 約条件を持つ確率計画問題として発展した。償還請求 を有する確率計画問題は、制約侵犯への罰金を目的関 数に導入する。機会制約条件問題は、制約が満たされ る充足確率を設定するものである。

問題 (SP) において、次のように定める。

$$g_0(x,\tilde{\xi}) = c^{\top} x \tag{1}$$

$$X = \{ x \in \Re^n | Ax = b, x \ge 0 \}$$
 (2)

$$\begin{pmatrix} g_1(x,\tilde{\xi}) \\ \vdots \\ g_m(x,\tilde{\xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(\tilde{\xi}) \\ -T(\tilde{\xi}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -h(\tilde{\xi}) \\ h(\tilde{\xi}) \end{pmatrix}$$
(3)

このとき、制約式 (3) および $g_i(x, \tilde{\xi}) \leq 0, i = 1, \ldots, m$ より、次の関係が成り立つ。

$$T(\tilde{\xi})x = h(\tilde{\xi}) \tag{4}$$

ただし、 $m_0 \times n$ 次元行列 A、n 次元列ベクトル c、 m_0 次元列ベクトル b は確定値として与えられており、 $m_1 \times n$ 次元行列 $T(\tilde{\xi})$ と m_1 次元ベクトル $h(\tilde{\xi})$ は確率変数 $\tilde{\xi}$ に従うものとする。決定の流れは次のようになる。まず、確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値 ξ を知る前に第 1 段階として変数 x を決定し、その後に ξ を観測する。このとき、制約条件が侵される場合があるため、制約式(4) の右辺に新たな変数 $y(\xi)(\geq 0)$ を含む項 $Wy(\xi)$ を加えて制約の充足を図る。ただし $y(\xi)$ は n 次元ベクトル、W は $m_1 \times n$ 次元行列である。付加した変数への単位当りの罰金を q_i とすると、罰金への償還請求費用 (recourse cost) $Q(x,\xi)$ が定義でき、罰金の期待値を含む目的関数を最小化する、償還請求を有する確率的線形計画問題 (stochastic linear programming problem with recourse) (SLPR) が定義できる。

$$\begin{aligned} (\mathbf{SLPR}) : \min \quad & E_{\tilde{\xi}}\{c^{\top}x + Q(x, \tilde{\xi})\} \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & Q(x, \xi) = & \min\{q^{\top}y(\xi) \mid Wy(\xi) = h(\xi) - T(\xi)x, \\ & y(\xi) \geq 0\} \end{aligned}$$

この問題は、多期間にわたる最適化を行う確率計画問題に拡張することができる。罰金に対する償還請求を有するアプローチとは異なり、(SP) において制約条件の概念を拡張し、確率 $(充足水準)\alpha_i$ で第i 制約条件が満たされるという個別機会制約条件 (separate chance constraint) または充足水準 α で同時に全ての制約条件が満たされるとする同時機会制約条件 (joint chance constraint) を用いて、機会制約条件を有する確率計画問

題 (chance constrained programming problem) (CCP) が定義できる。

```
\begin{array}{ll} \textbf{(CCP)}: & & \\ \min_{x \in X} & E_{\tilde{\xi}} g_0(x, \tilde{\xi}) \\ \text{subject to} & P(g_i(x, \tilde{\xi}) \leq 0) \geq \alpha_i, i = 1, \ldots, m \\ & \text{or} \\ & \text{subject to} & P(g_i(x, \tilde{\xi}) \leq 0, i = 1, \ldots, m) \geq \alpha \end{array}
```

確率計画法の理論的な発展に関しては、石井 [15]、Wets [48]、Ermoliev-Wets [14]、Prékopa [24]、Birge-Louveaux [9]、Ruszczyński-Shapiro [25] などに解説されており、近年の確率計画法のアルゴリズムに関するサーベイは Birge [7]、椎名 [39] などに示されている。

2.2 従来の数理計画モデルの問題点

通信網の設計に関しては、ネットワーク設計におけ る集線装置配置問題 (Bertsekas-Gallager [5]、Ahuja-Magnanti-Orlin [1]) として取り扱うことができる。電 力用の通信網を効率的に設計し、最適性が保証される 効率的解法の開発が望まれており、Pirkul-Gupta [22] は、ラグランジュ緩和法を用いた近似解法を示した。し かし、現実には将来の通信需要の増大に対応したネット ワーク設計が求められている。将来の通信量の不確実 性を考慮すると、集線装置配置問題は、罰金に対する償 還請求を有する確率的整数計画問題となる。整数条件 を持たない場合、償還請求を有する確率計画問題に対し て、Benders [3] の分解法を応用した L-shaped 法 (Van Slyke-Wets [47]) による解法が知られている。連続変数 のみを持つ問題に対する L-shaped 法に対して、整数制 約などを持つ離散的な確率計画問題は、取り扱いは困 難である。Wollmer [49] は陰的列挙法と L-shaped 法と を組み合わせた解法を示した。Louveaux-Peeters [20] では、双対下降法による近似解法が示された。厳密解 法としては、Laporte-Louveaux [16] では分枝カット法 の枠組に L-shaped 法を含めた解法が示され、Laporte et al.[17] では、施設配置問題への応用が示されている が、大規模な問題への適用はなされていない。第3節 では、罰金に対する償還請求を有する確率的整数計画 問題に対し、L-shaped 法と分枝限定法を加えた解法の 枠組を示す(椎名[38])。さらに、集線装置配置問題は、 多期間のネットワークへの投資を考慮することにより、 多期間の確率計画モデル (Shiina[29]) へと拡張するこ とが可能である。

多期間の確率計画問題の解法としては、罰金を 線形関数とした Birge [6]、 Birge-Donohue-HolmesSvintsitski [8]、凸 2 次関数の罰金を取り扱った Louveaux [18] などがあるが、複雑な組合せ的条件を考慮 することは困難である。特に、期間数が多い場合は、 L-shaped 法のような線形近似法は効率的ではない。そ のため、ラグランジュ緩和法 (Bertsekas [4]) に基づく 解法を開発し、発電機起動停止問題 (unit commitment problem) への応用を考える。発電機の起動停止問題は、 時間帯毎に与えられた電力需要を満たすように、各発 電機の起動停止スケジュールおよび発電量を求めるス ケジューリング問題である。従来は電力需要を確定値で 与えたモデル (Muckstadt-Koenig [21]、 Bard [2]) が 用いられていたが、電力需要の変動を考慮したモデル (Takriti-Birge-Long [45]、 Takriti-Birge [44]) が開発 された。これらの確率計画モデルでは、起動停止に関 わる 0-1 変数はシナリオ毎に変動するものであったが、 システムの起動停止に必要なリードタイムを考慮して いないため、実際的でない。第4節では、これらのモ デルを改良して現実のシステムの運用を反映させ、か つ電力需要の不確実性を考慮した新たな確率計画モデ ル (椎名 [40]) を示す。

機会制約条件を満たす実行可能解の集合が凸集合となる条件は、Prékopa[23]によって示された。しかし、同時機会制約条件は一般的に多次元の数値積分を含むかまたは、非線形性の高い制約となるため、最適化計算において取り扱いが容易ではない。第5節では、同時機会制約条件を電力供給計画に導入する。従来の電力供給計画は、あらかじめ想定需要を超えて供給力を保持するように予備率を与えた線形計画モデル (Delson-Shahidehpour [12])などが用いられてきた。電力需要に影響を与える天候、気温などの急変などにも対応するために、確率変動要素をモデルに組み入れることが不可欠である。機会制約条件は、電力供給が満たされる条件として、電力供給計画に応用することができ、数値積分と非線形計画法に基づく解法 (Shiina[27])を示す。

3 罰金に対する償還請求を有する確 率計画問題

3.1 通信網設計の背景と目的

電気事業において通信網は、電力系統の保護・制御、 設備運転の自動化などを目的に発展し、本店、支店、営 業所などの事業所と、発電所、変電所などの電気所を相 互に結ぶ伝送システムと、事業所、電気所に設置される 集線装置より構成される(田村 [46])。集線装置は、キャ リヤリレーなどの系統保護装置、監視・テレメータなどの情報の入出力装置からなる。通信網の設計は、集線装置配置問題として定式化され、Shiina [28] は、切除平面法と分枝限定法とを組み合わせた最適解法アルゴリズム (Fractional Cutting Plane Algorithm/Branch & Bound (FCPA/B&B)) を開発し、数値実験によりこの解法の有効性を示した。図1に電気所数が100、集線装置設置候補地数が40の問題に対する最適通信網の例を示す。

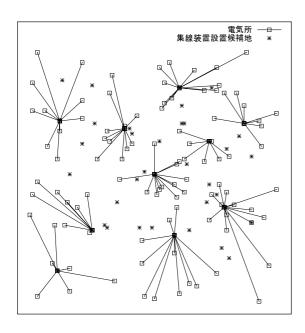


図 1: 最適通信網の例

しかし、電力用通信網においては、電力系統の保護、 制御の高度化、自動化の進展によって、通信量が増大 することが予想され、将来の通信量の不確実性を考慮 することが不可欠であるため、将来における規模の拡 張性をもった通信網設計計画が求められている。

3.2 将来の通信量の不確実性を考慮した集 線装置配置問題の定式化

無向グラフG = (V,A)によって、通信網をモデル化した。点集合Vは、あらかじめ地理的な位置が与えられている電気所の集合J、集線装置を設置する候補地の集合Iから構成される。辺集合Aは2点間の接続リンクを示す。各電気所は何れかの集線装置に接続しなければならない。この時、集線装置の処理能力が、それに接続する各電気所からの通信量の和を下回ってはいけない。全ての電気所を集線装置に接続し、集線装置の設置場所を選定し総設置費用最小のネットワー

クを設計する。椎名 [38] は不確実な状況下での集線装置配置問題を取り扱った。以下表 1 のように記号を定義する。電気所 j からの通信量 $a_j(\tilde{\xi})$ は既知の確率変数 $\tilde{\xi}$ に従うものとする。 $\tilde{\xi}$ は離散的な確率分布に従い、 $\tilde{\xi}=\xi$ となる確率 $P(\tilde{\xi}=\xi)$ は与えられており、確率分布の台を $\Xi(P(\Xi)=1)$ とする。確率的集線装置配置問題のプロトタイプを以下に示す。

表 1: 集線装置配置問題の記号の定義

変数	意味
$\overline{x_{ij}}$	電気所 j を候補地 i に存在する
	集線装置に接続させるとき 1、それ以外 0
y_i	候補地 i に集線装置を設置
	するとき 1、それ以外 0
パラ メータ	意味
c_{ij}	電気所 j と候補地 i との接続費用
f_i	候補地 i での集線装置の設置費用
$a_j(\tilde{\xi})$	電気所 j からの通信需要
b_i	候補地 i における集線装置の処理能力

(確率的集線装置配置問題 プロトタイプ): min
$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i y_i$$
 subject to
$$\sum_{j \in J} a_j(\tilde{\xi}) x_{ij} \leq b_i y_i, \quad i \in I$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, j \in J, \ x_{ij} \leq y_i, i \in I, j \in J$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, i \in I, j \in J$$

制約 $\sum_{j\in J} a_j(\tilde{\xi})x_{ij} \leq b_iy_i, i\in I$ は確率変数 $\tilde{\xi}$ を含むため、等価な確定問題に定義し直す必要がある。変数x,y は確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値を観測する前に決定され、第 1 段階決定変数となる。確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値 ξ が観測されたとき、制約 $\sum_{j\in J} a_j(\xi)x_{ij} \leq b_iy_i, i\in I$ は侵される可能性があるため、この右辺に第 2 段階決定変数の $w_i(\xi)$ を付加する。この変数は、超過需要に対して行う設備の容量増設を示す。このように新たに設備を増設することは、費用増加をもたらす。装置i における単位通信需要あたりの容量増設に対する費用を q_i とし、目的関数に設備増設費用の期待値を加える。すると問題は、罰金に対する償還請求を有する確率的整

数計画問題 (SCLP) として定義される。

$$(SCLP): \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i y_i + \mathcal{Q}(x, y)$$
subject to
$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, j \in J$$

$$x_{ij} \leq y_i, i \in I, j \in J, x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J$$

$$\mathcal{Q}(x, y) = E_{\tilde{\xi}}[Q(x, y, \tilde{\xi})]$$

$$Q(x, y, \xi) = \min_{w(\xi)} \{\sum_{i \in I} q_i w_i(\xi) | \sum_{j \in J} a_j(\xi) x_{ij} \leq b_i y_i + w_i(\xi), w_i(\xi) \geq 0, i \in I\}, \xi \in \Xi$$

(SCLP) は相対完全リコースを持つ。すなわち実行可能な第1段階決定変数 x,y がどのような値をとろうと、第2段階決定変数 $w(\xi)$ は実行可能解を持つことに注意されたい。

3.3 解法の枠組

解法のアルゴリズムでは、直接 $Q(x,y,\xi)$ を 第 1 段階変数 x,y の関数として捉える。L-shaped 法は、 $Q(x,y,\xi)$ のエピグラフを最適性カット (optimality cut) で与えられる有限個の閉半空間の共通部分として近似していく方法であるといえる。まず、 $Q(x,y,\xi)$ に対する上界を示す変数 θ_{ξ} を導入した主問題 (MASTER) を解く。

$$(\text{MASTER}): \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i y_i + \theta$$

$$\text{subject to} \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J$$

$$x_{ij} \leq y_i, \quad i \in I, j \in J$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J$$

$$\theta \geq \sum_{\tilde{\epsilon} \in \Xi} P(\tilde{\xi} = \xi) \theta_{\xi}$$

この主問題に対し、逐次 $Q(x,y,\xi)$ を近似する最適性 カット (optimality cut) を加える。最適性カットは次の定理により与えられる。

定理 1 (椎名 [38]). (\hat{x}, \hat{y}) を (SCLP) の実行可能解とする。また、 $\hat{\pi}_i$ は $\max\{\sum_{i \in I} (\sum_{j \in J} a_j(\xi) \hat{x}_{ij} - b_i \hat{y}_i) \pi_i | 0 \le \pi_i \le q_i, i \in I\}$ の最適解とする。 θ_{ξ} を $Q(x, y, \xi)$ の上界とすると、 $\theta_{\xi} \ge \sum_{i \in I} \hat{\pi}_i a_j(\xi) x_{ij} - \sum_{i \in I} \hat{\pi}_i b_i y_i$ は (MASTER) の妥当不等式になる。

以下に示す整数 L-shaped 法のアルゴリズムにおいては、主問題の得られた解 $(\hat{x},\hat{y},\hat{\theta})$ より最適性カットを添加する。最適性カットは、主問題の最適解において、 $Q(\hat{x},\hat{y},\xi)$ を近似するものである。

整数 L-shaped 法 (ε : 許容誤差)

- ステップ **0.** 暫定目的関数値 $\bar{z} = \infty$ 、目的関数の下界値 z = 0 とする。
- ステップ 1. 主問題の最適解 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta})$ を求める。
- ステップ 2. $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} \hat{x}_{ij} + \sum_{i \in I} f_i \hat{y}_i + \hat{\theta} >$ $\underline{z} \text{ ならば、} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} \hat{x}_{ij} + \sum_{i \in I} f_i \hat{y}_i + \hat{\theta} = \underline{z},$ $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} \hat{x}_{ij} + \sum_{i \in I} f_i \hat{y}_i + \mathcal{Q}(\hat{x}, \hat{y}) < \underline{z} \text{ ならば、}$ $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} \hat{x}_{ij} + \sum_{i \in I} f_i \hat{y}_i + \mathcal{Q}(\hat{x}, \hat{y}) = \underline{z} \text{ とする。}$
- ステップ 3. $\bar{z} \leq (1+\varepsilon)z$ ならば終了。
- ステップ 4. $\xi \in \Xi$ に対して、 $\hat{\theta}_{\xi} < Q(\hat{x}, \hat{y}, \xi)$ ならば、最適性カットを追加してステップ 1. へ。

整数 L-shaped 法と、確率変数の全実現値に対する需要制約を有する展開形 (extensive form) の混合整数計画問題に対する分枝限定法との比較を行った。 |I| = 20, |J| = 60のとき、単位需要量当りの容量増設費用が低い場合、分枝限定法の計算時間は、L-shaped 法の約3倍であるのに対して、容量増設費用が高い場合は、約8.8倍となり、開発した L-shaped 法が、計算時間の点でいずれも有効である。結果の詳細は、椎名 [38] を参照されたい。図2は目的関数が、初期投資費用と設備増設費用の和となることを表している。設備増設費用が高くなる場合、非線形性が高まるために、L-shaped 法による線形近似が有利となる。以上のように、電力

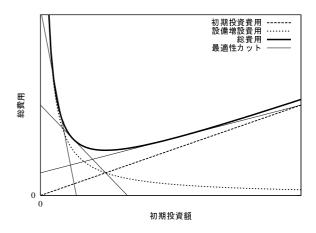


図 2: 目的関数の構造と最適性カット

用通信網においては、将来の通信量の不確実性を考慮

することが不可欠であるため、将来における設備の拡張に対応して、通信網設計計画に対する確率計画モデルを示した。そして整数条件を持ち、罰金に対する償還請求を有する確率計画問題として定式化される電力用通信網の設計問題に対し、L-shaped 法と分枝限定法とを組み合わせた最適解法アルゴリズムを示した。

3.4 モデルの拡張と電源計画への応用

多期間にわたる集線装置への設備投資を考えたモデルでは、各期の決定がその期までに実現した確率変数の履歴に依存するため、複雑な問題となる。T期間の各期においてn個のシナリオが起こりうる場合、全体として n^T 個のシナリオを考慮しなければならない。Shiina[29]では、通信需要の単調費減少性と設備増設費用の単調非増加性を仮定して、この問題をn個のシナリオを持つT個の問題へと分解できることを示した。

また、L-shaped 法に基づく解法は電源計画に応用 可能である。電源計画では、電力需要と建設費用およ び燃料費などの変動を考慮して、発電設備の建設を計 画する. Shiina-Birge [32] では、電源計画に L-shaped 法を応用した。Louveaux [19] によって示された多期 間の確率計画問題が持つ分解可能性 (block separable recourse) を用いて電源計画が2期間の確率計画問題 へ帰着できることを示し、効率的に問題を解くアルゴ リズムを示した。この手法では、決定変数を次期以降 に影響を与える変数群 (aggregate level decisions) と当 該期のみの決定となる変数群 (detailed level decisions) に分類する。前者は設備建設に相当し、後者は発電出 力に関する変数となる。設備建設に関わる変数のみを 含む主問題を解き、実行不可能解を実行可能性カット (feasibility cut) で排除し、発電費用を最適性カットで 近似しながら最適計画を求めるものである。

4 組合せ条件を有する多期間の確率 計画問題

4.1 発電機起動停止問題の背景と目的

本節では、発電機の起動停止問題 (unit commitment problem) を考える。この問題は、時間帯ごとに与えられた電力需要を満たすように、各発電機の起動停止スケジュールおよび発電量を求める問題であり、大規模かつ複雑なスケジューリング問題である。電力系統においては、設備の補修点検を考えることが不可欠である。補修計画は、考慮する要素の離散性から、組合せ

最適化問題として定式化される。椎名-久保 [43] は、補修計画に対する切除平面法と分枝限定法に基づく最適解法アルゴリズムを示した。起動停止問題においては、補修計画に基づいて稼動可能な発電機が与えられているものとする。椎名 [40] は、ラグランジュ緩和法によって各発電設備毎に問題を分割することにより、効率的にスケジュールを生成し、同時に電力需要を満たすようにスケジュールを合成するアルゴリズムを示した。本手法により、需要変動による供給費用コスト上昇のリスクを回避することができる。

4.2 シナリオツリーによる需要変動の表現

起動停止の運用を $t=1,\ldots,T$ の離散的な時間で考える。時間帯 t における電力需要 \tilde{d}_t を確率変数であると定義し、その実現値を d_t と表す。確率変数 \tilde{d}_t は有限の離散分布に従うと仮定する。T 時間にわたる確率変数の実現値の組 $d=(d_1,\ldots,d_T)$ をシナリオと呼ぶ。分布の離散有限性から、シナリオの個数を S 個と定義し、S 番目のシナリオ $d^s=(d_1^s,\ldots,d_T^s)$ が生起する確率を $p_s(\sum_{s=1}^S p_s=1)$ とする。シナリオは次の図 3 において、ツリーの根ノードから末端のノードへの路として表される。

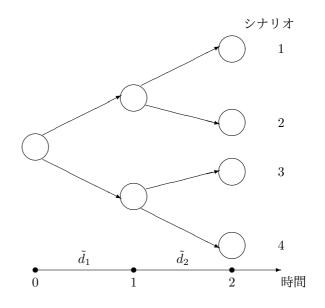


図 3: シナリオのツリー表現

2 つのシナリオ d^{s_1} , d^{s_2} $(s_1 \neq s_2)$ がある時間帯 t までの履歴において、 $(d_1^{s_1},\ldots,d_t^{s_1})=(d_1^{s_2},\ldots,d_t^{s_2})$ を満たす場合、これらは時間帯 t までツリー上の同じ路をたどる。2 つのシナリオ d^{s_1} , d^{s_2} に対する意思決定は等しくなければならない。意思決定者は、時間 t の段階では

シナリオ d^{s_1} と d^{s_2} が将来 2 つの異なるシナリオに分岐することを見越して決定を行うことができない。時間 t では t+1 時間以降の将来に関する情報が意思決定者には与えられておらず、時間 t までの d_t の履歴に従って決定をしなければならないためである。この条件を予測不可能性条件 (nonanticipativity) と呼ぶ。シナリオの添字集合 $\{1,\ldots,S\}$ は各時間において、互いに素な部分集合に分割できる。時間 t までの履歴においてシナリオ s と等しいシナリオの添字集合を B(s,t) で表す。条件 B(s',t)=B(s,t) かつ $B(s',t+1)\neq B(s,t+1),s'<s$, が満たされるならば、シナリオ s とシナリオ s' は時間 t+1 にツリー上で分岐する。シナリオ s が全ての s'<s と過去の履歴を共有しない最初の時間を $\tau(s)$ で表し、シナリオ s の分岐点と呼ぶ。シナリオ 1 に対しては、 $\tau(1)=1$ とする。

4.3 確率計画法による定式化

確率計画法に基づく起動停止問題モデルを以下の問 題 (SUC) に示す。現実の電力システムにおける運用で は、発電機の起動停止スケジュールは需要予測に基づ いて固定され、需要変動は発電機の出力によって対応 するものである。供給コストの変動リスクを把握し、 需要変動に応じて的確な運用を求めるためには、この ような現実に即した確率計画モデルを考えることが重 要である。 I 個の発電機による電力供給を考える。 変 数 u_{it} は発電機 i の時間 t における状態を表す 0-1 変数 である。変数 x_{it}^s は発電機 i のシナリオ s における時間 t の出力である。起動・停止を表す 0-1 変数 u_{it} は全シ ナリオを通じて固定であるが、出力を表す変数 x_{it}^s は シナリオに応じて変動することに注意されたい。関数 $f_i(x_{it}^s)$ は発電機 i の燃料費を表す x_{it}^s の 2 次関数であ る。関数 $g_i(u_{i,t-1},u_{i,t})$ は発電機 i の起動費用を表し、 $(u_{i,t-1}, u_{i,t}) = (0,1)$ の時に正の起動費用となり、それ 以外の場合には0となる関数である。

目的関数は、供給コストの最小化である。供給コストは、燃料費の全てのシナリオに対する期待値と起動費用の総和となる。制約はそれぞれ、出力の総和が電力需要を満たすための条件、発電機iが起動した場合 L_i 時間にわたり連続運転を行わなければならない条件、発電機iが停止した場合 l_i 時間にわたり連続停止しなければならない条件、発電機の出力の上下限条件 $(Q_i,q_i$ はそれぞれ発電機iの出力の上限値,下限値である)、予測不可能性条件、および起動停止の0-1条件を表す。

$$(SUC): \min_{S} p_{s} \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{T} f_{i}(x_{it}^{s}) u_{it} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{T} g_{i}(u_{i,t-1}, u_{i,t})$$
subject to
$$\sum_{i=1}^{I} x_{it}^{s} \geq d_{t}^{s}, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S$$

$$u_{it} - u_{i,t-1} \leq u_{i\tau}, \tau = t+1, \dots, \min\{t+L_{i}-1,T\},$$

$$i = 1, \dots, I, t = 2, \dots, T, s = 1, \dots, S$$

$$u_{i,t-1} - u_{it} \leq 1 - u_{i\tau}, \tau = t+1, \dots, \min\{t+l_{i}-1,T\},$$

$$i = 1, \dots, I, t = 2, \dots, T, s = 1, \dots, S$$

$$q_{i}u_{it} \leq x_{it}^{s} \leq Q_{i}u_{it},$$

$$i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S$$

$$x_{it}^{s_{1}} = x_{it}^{s_{2}}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T,$$

$$\forall s_{1}, s_{2} \in \{1, \dots, S\}, s_{1} \neq s_{2}, B(s_{1}, t) = B(s_{2}, t)$$

$$u_{it} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T,$$

4.4 解法のアルゴリズムと数値実験

次のアルゴリズムにより (SUC) を解く。

- ステップ 1. 需要制約をラグランジュ緩和した問題を解く。出力 $x_{it}^{*s}, i=1,\ldots,I,s=1,\ldots,S, t=\tau(s),\ldots,T$ を求めた後に、動的計画法により $u_{it}^*, i=1,\ldots,I,t=1,\ldots,T$ を求める。
- ステップ 2. 出力 $x_{it}^{*s}, t = \tau(s), \dots, T, s = 1, \dots, S$ を修正する。
- ステップ 3. ラグランジュ乗数を更新する。

設備数 I=10、運用時間数 T=168(時間) のシステムを対象として数値実験を行った。1 時間毎の1 週間の想定需要データをもとに、図 4 のようにシナリオを与えた。

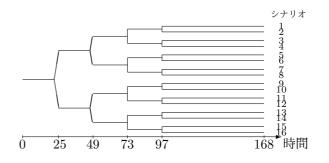


図 4: 起動停止問題のシナリオの構造

表 2: 各シナリオにおける需要変動

シ	確率		時	間	
ナ		25 - 48	49 - 72	73-96	97-120
リ		月曜	火曜	水曜	木曜
才					
1	0.0625	0	0	0	0
2	0.0625	0	0	0	+10%
3	0.0625	0	0	+20%	0
4	0.0625	0	0	+20%	+10%
5	0.0625	0	+20%	0	0
6	0.0625	0	+20%	0	+10%
7	0.0625	0	+20%	+20%	0
8	0.0625	0	+20%	+20%	+10%
9	0.0625	+10%	0	0	0
10	0.0625	+10%	0	0	+10%
11	0.0625	+10%	0	+20%	0
12	0.0625	+10%	0	+20%	+10%
13	0.0625	+10%	+20%	0	0
14	0.0625	+10%	+20%	0	+10%
15	0.0625	+10%	+20%	+20%	0
_16	0.0625	+10%	+20%	+20%	+10%

(+10%, +20%はそれぞれ、想定需要に対する増加割合を示す。)

確定的数理計画モデル(S=1 である問題)と確率計画モデルの比較を行うに際し、確定的モデルとして、月火水木の各曜日の需要に対応する供給予備率を(5%, 10%, 10%, 5%)(表 2 の 16 個のシナリオにおける需要の平均値に対応)から(10%, 20%, 20%, 10%)(表 2 において最も需要の大きい第 16 シナリオに対応)まで幅(1%, 2%, 2%, 1%)で上昇させた 6 個の問題について考える。確定的数理計画モデルを解いて得られたスケジュールを 16 個のシナリオに当てはめて、供給費用の期待値を計算する。

表 3 より予備率を低めに設定すると、供給不足が起こる可能性があり、逆に高く設定すると確率計画で得られる解よりもコストが高くなる恐れがある。

本節では、発電機起動停止問題に対して現実のシステムの運用を反映させ、かつ電力需要の不確実性を考慮した新たな確率計画モデルを示した。本手法により、供給不足に陥るというリスクを回避すると同時に、需要変動による供給費用コスト上昇のリスクを回避することができる。起動停止問題に対しては、Shiina-Birge[33]による列生成法の応用のようにさらに効率的な解法が望まれている。Shiina[30]では、列生成法とラグラン

表 3: 確率計画と確定的計画の比較

モデル	供給費用の期待値
確率計画(提案法)	3669641
確定的 (5%,10%,10%,5%)	供給不足
確定的 (6%,12%,12%,6%)	供給不足
確定的 (7%,14%,14%,7%)	供給不足
確定的 (8%,16%,16%,8%)	供給不足
確定的 (9%,18%,18%,9%)	3858235
確定的 (10%,20%,20%,10%)	3858235

ジュ緩和法とを併用することにより、供給費用を減少させることを可能とした。

電力自由化以降の電力取引の形態は、次の2つに大別される。

- 電力会社 顧客との相対契約による従来と同様の 電力供給
- 電力プールによる取引

プール取引とは、ある地域内の供給事業者が、プールと呼ばれる電力市場から電力を購入する。プール市場では、発電側と需要側の入札を受けて、取引量と取引価格が決定される。今後予定される電力自由化に向けて、図5のような電力取引を考慮したモデル (Shiina-Watanabe [36]) の開発と実用化が課題である。

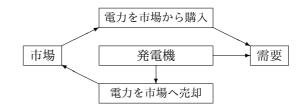


図 5: 市場での売買を考慮したモデル

5 同時機会制約条件を有する確率計 画問題

5.1 電力供給計画の背景と目的

本節では、複数の制約が同時に成立するという同時 機会制約条件を有する確率計画問題を取り扱う。この 問題は、一般的には非線形性の高い制約を含む。同時機会制約条件を有する問題の電力供給計画への応用を考える。電力供給計画においては、予測外の事態発生に対しても、安定した電力供給を可能とするために予め想定需要を越えて保有する供給予備力を必要としている。椎名 [37] は、機会制約条件を電力供給計画に導入した。このモデルは、電力需要を季節毎の近似負荷曲線として与え、時間帯毎の需要変動に対応して、供給力と予備力を併せた設備稼動可能容量を求めるものである。確率分布として、各時間帯の電力需要が独立な正規分布に従うと仮定したが、実際には時間帯毎の電力需要は相関がみられる。そのため、Shiina[27]では、電力需要量の相関を考慮した同時機会制約条件を含む電力供給計画モデルが示された。

5.2 機会制約条件計画問題としての定式化

新設、既設の設備稼働可能容量の総和が季節 s、時間帯 t において電力需要 \tilde{P}_{st} を上回るという条件を考える。ただし、I,J,S,T をそれぞれ、新設設備、既設設備、季節、時間帯の集合とし、 v_{ist},w_{jst} をそれぞれ、新設設備 i の季節 s の時間帯 t における稼動可能容量、既設設備 j の季節 s の時間帯 t における稼動可能容量とする。

$$\sum_{i \in I} v_{ist} + \sum_{j \in J} w_{jst} \ge \tilde{P}_{st} \tag{5}$$

ここで、 \tilde{P}_{st} を確率変数であると定義し、この制約を機会制約条件へと拡張する。 \tilde{P}_{st} の時間帯 t に関する同時確率分布関数を $F_s(x)=\mathrm{P}(x_1\geq \tilde{P}_{s1},\ldots,x_{|T|}\geq \tilde{P}_{s|T|})$ とする。同時機会制約条件は、季節 s において、電力需要 $\tilde{P}_{st},t\in T$ を同時に上回る設備の稼動可能容量を確率 α_s 以上で保持することを意味する。

$$F_{s}(\sum_{i \in I} v_{is1} + \sum_{j \in J} w_{js1}, \dots, \sum_{i \in I} v_{is|T|} + \sum_{j \in J} w_{js|T|}) \ge \alpha_{s}$$
(6)

5.3 需要変動確率分布と Gauss 型数値積分

電力需要 P_{st} , $t \in T$, $s \in S$ が正規分布に従うと仮定する。このとき、機会制約条件を満たす解集合は、凸集合となるが、分布関数が多次元の積分を含むため、椎名 [37] では確率分布の近似式を用いた。Williams-山内

の近似式 (山内 [52]) において k=0 とおくと、標準正規分布の確率分布関数 $\Phi(u)$ は以下の式で近似できる。

$$\Phi(u) \approx \tilde{\Phi}(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \exp(\frac{-2u^2}{\pi})}, u \ge 0$$
 (7)

電力需要の分布関数を与えると、設備稼働可能容量の需要充足条件が計算できる。ここで、電力需要 \tilde{P}_{st} は $t\in T$ に関して独立であるとみなす。すると、季節 s の確率分布関数 F_s は、各時間帯の周辺分布関数 f_{st} の積となる。

$$F_s(x_{s1}, \dots, x_{s|T|}) = \prod_{t \in T} f_{st}(x_{st})$$
 (8)

また p_{st} , σ_{st} をそれぞれ、 P_{st} の平均と標準偏差とする。すると、 $\frac{P_{st}-p_{st}}{\sigma_{st}}$ は平均 0, 分散 1^2 の正規分布 $\mathcal{N}(0,1^2)$ に従うので、制約条件は以下のようになる。

$$\prod_{t \in T} \tilde{\Phi} \left(\frac{\sum_{i \in I} y_{ist} + \sum_{j \in J} z_{jst} - p_{st}}{\sigma_{st}} \right) \ge \alpha_s \qquad (9)$$

しかし、このような近似式によると、多変量正規分 布の相関を表してはおらず、充足水準に対する正確な 稼動可能容量保有という点で問題がある。そこで、多 変量正規分布の分布関数値をを直接数値積分によって 計算する。

Drezner[13] は重み e^{-x^2} の Gauss 公式によって以下 のように積分値を求めている。 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^\top \sim \mathcal{N}$ ($\mathbf{0}, R$) の密度関数を各 x_i について $-\infty$ から a_i まで m 重積分し、その値を $\Phi_m(\mathbf{a}, R)$ とする。 \mathbf{x} の平均は $\mathbf{0}$ 、R は相関行列でその逆行列の (i, j) 成分を r_{ij} とする。

$$\Phi_{m}(\boldsymbol{a}, R) = \int_{-\infty}^{a_{m}} \cdots \int_{-\infty}^{a_{1}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} (\det R)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{1}{2} x^{\top} R^{-1} x) dx_{1} \dots dx_{m} (10)$$

ここで、Gauss 公式を適用するが、数値計算上同数の 分点に対しては $a \leq 0$ の時に誤差が小さいと経験的に 言われている。そこで、次の関係式を再帰的に用いる。

$$\Phi_{m}(\boldsymbol{a}, R)
= \Phi_{m-1}(a_{1}, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_{m}, R_{m-1}^{i})
- \Phi_{m}(a_{1}, ..., a_{i-1}, -a_{i}, a_{i+1}, ..., a_{m}, R_{m}^{-i}) (11)$$

式 (11) より、積分項は $1\sim m$ 重積分を含み、その項数は 2^m となるが、積分区間は全て $-\infty \to -a_i$ となる。 R_{m-1}^i は $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},x_m)$ の相関行列、 R_m^{-i} は $(x_1,\ldots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},x_m)$ の相関行列である。 Gauss 公式の適用に際し、 $y_i=(a_i-x_i)\sqrt{r_{ii}/2}$ と変数変換

をする。このとき、 $y_i: \infty \to 0$ であるから、積分は m=4 の場合、次のようになる。

$$\Phi_{4}(\boldsymbol{a}, R) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{4}{2}} (\det R)^{\frac{1}{2}}} \exp(-y^{\top} y) \right\} \\
\exp \left\{ y^{\top} y - \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \frac{(a_{i} \sqrt{\frac{r_{ii}}{2}} - y_{i}) r_{ij} (a_{j} \sqrt{\frac{r_{jj}}{2}} - y_{j})}{r_{ii} r_{jj}} \right\} \\
\prod_{i=1}^{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{r_{ii}/2}} \right) dy_{1} dy_{2} dy_{3} dy_{4} \\
\approx \frac{1}{(2\pi)^{2} (\det R)^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{r_{ii}/2}} \right) \\
\sum_{i_{1}=1}^{k} \sum_{i_{2}=1}^{k} \sum_{i_{3}=1}^{k} \sum_{i_{4}=1}^{k} A_{i_{1}} A_{i_{2}} A_{i_{3}} A_{i_{4}} g(y_{1}, y_{2}, y_{3}, y_{4}) \\$$
(12)

ただし、以下のように定める。

$$g(y) = \exp\left\{ y^{\top} y - \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \frac{{}_{(a_i \sqrt{\frac{r_{ii}}{2}} - y_i)r_{ij}(a_j \sqrt{\frac{r_{jj}}{2}} - y_j)}}{r_{ii}r_{jj}} \right\}$$
(13)

積分公式は、 $[0,\infty]$ 領域における Gauss 公式を領域の直積 $[0,\infty]^4$ へと拡張したものであり、 A_{i_1},\ldots,A_{i_4} は $e^{-y^\top y}$ に対応する重み係数である。

5.4 数值実験

次のようなデータを用いて数値積分を行った。1年間の4季節4日間4時間帯各6時間毎、計16の電力需要平均値および分散を用いて、季節毎の4次元正規分布関数を設定した。発電設備としては、現在既に存在する既設設備が18設備、導入を計画できる新設設備が7設備あると仮定する。

以上の条件の下で、確率的電力供給計画モデルを解いた結果を示す。非線形最適化については、最適化ソフトウェア NUOPT(山下 [51]) の信頼領域法を用い、数値積分法の Drezner[13] のサブルーチンでは、各次元における分点数を 2 点から 10 点まで、数値積分値の値の差が、与えたパラメータ 1×10^{-4} に収まるまで分点数を増加させ計算を繰り返す。以下の結果では、確率 0.95,0.99 の時いずれも 10 点以内の分点数で積分値が収束している。下の表 4 では参考のため、相関を無視した場合の結果も示した。

機会制約条件を含まない場合、各時間帯に保有する 設備稼動可能容量はその時間帯の電力需要の平均値と 等しくなる。すなわち、供給予備力を全く保持しない

表 4: 電力供給計画における目的関数の最適値

	5季の 足確率	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99
無相	関と仮定	1.08	1.14	1.24	1.29	1.40
相関	を考慮	1.01	1.07	1.18	1.23	1.35

(機会制約条件を含まない場合の最適値を1とする)

運転となる。これに対して、各季節の需要充足確率を 変化させた時の最適値の比率を図6に示した。何れの 場合も、時間帯毎の相関を考慮した方が、最適値の比 率が小さくなっている。これは時間帯毎の電力需要の 相関が全て正となっているためであると考えられる。 これより精密な経済運用には、相関を考慮することが 不可欠であることがわかる。実際の供給計画では、供 給信頼度が1に近い値に設定することが必要である。 例えば、供給信頼度 0.99 とは、100 日間の供給計画に 対して、供給不足となるのが1日以下となることを示 す。このように供給信頼度が1に近づくに従い、目的 関数の最適値は発散する。そこで、充足確率と最適費 用の関係を以下の両対数グラフ図7で表現すると、対 数線形に近い関係が得られ、供給の安全性と経済性の トレードオフについて、定量的な見積もりができる。 図7から、充足確率を0.9から0.99へ上昇させた時、 最適値比率が 1.18 から 1.35 へと増加し、最適値自体 は $\frac{1.35}{1.18} \approx 1.15$ 倍になることが分かる。

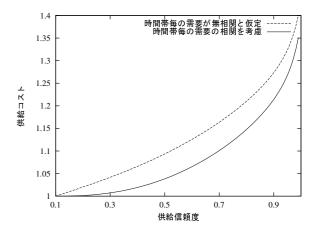


図 6: 目的関数の最適値の比率

本節では、これまで理論的には研究されてきたが、実際問題への適用が必ずしも容易でなかった同時機会制約条件を有する確率計画モデルが、数値積分法を導入することによって、電力供給計画に実用可能であることを示した。特に、変数間に相関がある場合、モンテカルロ法によるシミュレーションなどを用いずに、機

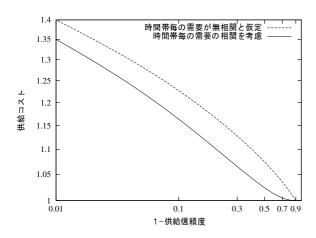


図 7: 目的関数の最適値の比率 (両対数グラフ)

会制約条件の計算を行うことができることを示した。

6 おわりに

現実の数理計画問題には不確実性が含まれる。これらの不確実性を考慮しない場合には、求めた解の実行可能性が侵されたり、または解の最適性が失われるというおそれがある。そのため、確率計画法に基づく不確実な状況下での最適化を考え、電気事業における重要性が高い、通信網設計、発電機の起動停止スケジューリング、電力供給計画へと応用した(椎名[41])。

今後の重要な課題として、連続分布を持つ確率変数を含む確率計画問題が考えられる。連続分布を持つ問題は、シミュレーション手法とも深く関連し、応用可能性の高さからも重要である (Shiina Tokoro-Shinohara [35], Shiina [31])。他にも、組合せ条件を考慮した確率計画問題は現在最も研究が進んでいる分野であり、応用も幅広い (Shiina-Tagaya-Morito [34], 椎名 [42])。

確率計画法は、本論文に挙げた問題に限らず、多くの分野のシステムの最適化問題に対して有効であるため、今後も解法の発展および効率化と、幅広い分野で大規模な現実問題への適用が期待できる。

参考文献

- R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin. Network Flows. Prentice Hall, 1993.
- [2] J. F. Bard. Short-term scheduling of thermal-electric generators using Lagrangian relaxations. *Operations Research*, Vol. 36, pp. 756–766, 1988.
- [3] J. F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems. *Numerische Mathematik*, Vol. 4, pp. 238–252, 1962.

- [4] D. P. Bertsekas. Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Academic Press, 1982.
- [5] D. Bertsekas and R. Gallager. *Data Networks*. Prentice Hall, 1987.
- [6] J. R. Birge. Decomposition and partitioning methods for multistage stochastic linear programs. *Operations Research*, Vol. 33, pp. 989–1007, 1985.
- [7] J. R. Birge. Stochastic programming computation and applications. *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 9, pp. 111–133, 1997.
- [8] J. R. Birge, C. J. Donohue, D. F. Holmes, and O. G. Svintsitski. A parallel implementation of the nested decomposition algorithm for multistage stochastic linear programs. *Mathematical Program*ming, Vol. 75, pp. 327–352, 1996.
- [9] J. R. Birge and F. Louveaux. Introduction to Stochastic Programming. Springer series in operations research. Springer-Verlag, 1997.
- [10] A. Charnes and W. W. Cooper. Chance constrained programming. *Management Science*, Vol. 6, pp. 73– 79, 1959.
- [11] G. B. Dantzig. Linear programming under uncertainty. Management Science, Vol. 1, pp. 197–206, 1955.
- [12] J. K. Delson and S. M. Shahidehpour. Linear programming applications to power system economics, planning and operations. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 7, pp. 1155–1163, 1992.
- [13] Z. Drezner. Computation of multivariate normal integral. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 18, pp. 470–480, 1992.
- [14] Y. Ermoliev and R. J.-B. Wets, editors. Numerical Techniques for Stochastic Optimization. Springer Series in Computational Mathematics 10. Springer-Verlag, 1988.
- [15] 石井博昭. 確率論的最適化, pp. 1-40. 講座・数理計画 法 10. 産業図書, 1982.
- [16] G. Laporte and F. V. Louveaux. The integer l-shaped method for stochastic integer programs with recourse. *Operations Research Letters*, Vol. 13, pp. 133–142, 1993.
- [17] G. Laporte, F. V. Louveaux, and L. Van Hamme. Exact solution to a location problem with stochastic demands. *Transportation Science*, Vol. 28, pp. 95– 103, 1994.
- [18] F. V. Louveaux. A solution method for multistage stochastic programs with recourse with application to an energy investment. *Operations Research*, Vol. 28, pp. 889–902, 1980.
- [19] F. V. Louveaux. Multistage stochastic programs with recourse with block-separable recourse. *Mathematical Programming Study*, Vol. 28, pp. 48–62, 1986.
- [20] F. V. Louveaux and D. Peeters. A dual-based procedure for stochastic facility location. *Operations Research*, Vol. 40, pp. 564–573, 1992.
- [21] J. A. Muckstadt and S. A. Koenig. An application of lagrangian relaxation to scheduling in powergeneration systems. *Operations Research*, Vol. 25, pp. 387–403, 1977.

- [22] H. Pirkul and R. Gupta. Topological design of centralized computer networks. *International Transactions in Operational Research*, Vol. 4, pp. 75–83, 1997.
- [23] A. Prékopa. Contributions to the theory of stochastic programming. *Mathematical Programming*, Vol. 4, pp. 202–221, 1973.
- [24] A. Prékopa. Stochastic Programming. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [25] A. Ruszczyński and A. Shapiro, editors. Stochastic Programming. Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 10. Elsevier, 2003.
- [26] M. Shahidehpour, H. Yamin, and Z. Li. Market Operations in Electric Power Systems -forecasting, scheduling and risk management-. John Wiley & Sons, 2002.
- [27] T. Shiina. Numerical solution technique for joint chance-constrained programming problem—an application to electric power capacity expansion—. *Journal* of the Operations Research Society of Japan, Vol. 42, pp. 128–140, 1999.
- [28] T. Shiina. Integer programming model and exact solution for concentrator location problem. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 43, pp. 291–305, 2000.
- [29] T. Shiina. L-shaped decomposition method for multi-stage stochastic concentrator location problem. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 43, pp. 317–332, 2000.
- [30] T. Shiina. A lagrangian relaxation and column generation algorithm for stochastic unit commitment problem. *Journal of Statistics & Management Systems*, Vol. 6, , 2004.
- [31] T. Shiina. Capacity expansion problem by Monte Carlo sampling method. Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, Vol. 13, pp. 697–703, 2009.
- [32] T. Shiina and J. R. Birge. Multistage stochastic programming model for electric power capacity expansion problem. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 20, pp. 379–397, 2003.
- [33] T. Shiina and J. R. Birge. Stochastic unit commitment problem. *International Transactions in Operational Research*, Vol. 11, pp. 19–32, 2004.
- [34] T. Shiina, Y. Tagaya, and S. Morito. Stochastic programming problem with fixed charge recourse. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 50, pp. 299–314, 2007.
- [35] T. Shiina, K. Tokoro, and Y. Shinohara. Optimization method via Monte Carlo sampling. *International Journal of Computational Science*, Vol. 1, pp. 256–270, 2007.
- [36] T. Shiina and I. Watanabe. Lagrangian relaxation method for price based unit commitment problem. Engineering Optimization, Vol. 36, pp. 705–719, 2004.
- [37] 椎名孝之. 確率的電力供給計画モデル. 第7回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 37–52, 仙台, 1995. 日本オペ レーションズ・リサーチ学会.

- [38] 椎名孝之. コンピューターネットワーク設計に対する確率計画モデル. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 10, pp. 37-50, 2000.
- [39] 椎名孝之. 確率計画法. 久保幹雄, 田村明久, 松井知己 (編), 応用数理計画ハンドブック, pp. 710-769. 朝倉 書店, 2002.
- [40] 椎名孝之. 確率計画法による発電機起動停止問題. 日本 応用数理学会論文誌, Vol. 13, pp. 181–190, 2003.
- [41] 椎名孝之. 電気事業への確率計画法の応用. 知能と情報, Vol. 16, pp. 528-539, 2004.
- [42] 椎名孝之. 固定費を有する確率計画法の電源計画への応用. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 54, pp. 735-738, 2009.
- [43] 椎名孝之,久保幹雄.電力設備補修計画に対する切除平面/分枝限定法.日本応用数理学会論文誌,Vol. 8, pp. 157-168, 1998.
- [44] S. Takriti and J. R. Birge. Lagrangian solution techniques and bounds for loosely coupled mixed-integer stochastic programs. *Operations Research*, Vol. 48, pp. 91–98, 2000.
- [45] S. Takriti, J. R. Birge, and E. Long. A stochastic model for the unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 11, pp. 1497–1508, 1996.
- [46] 田村康男(編). 電力システムの計画と運用. オーム社, 1991.
- [47] R. Van Slyke and R. J.-B. Wets. L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic linear programs. SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 17, pp. 638–663, 1969.
- [48] R. J.-B. Wets. Stochastic programming. In G. L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan, and M.J. Todd, editors, *Optimization*, Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 1, pp. 573–629. Elsevier, 1989.
- [49] R. Wollmer. Two stage linear programming under uncertainty with 0-1 integer first stage variables. *Mathematical Programming*, Vol. 19, pp. 279–288, 1980.
- [50] A. J. Wood and B. J. Wollenberg. Power Generation, Operation and Control. John Wiley & Sons, 1996.
- [51] 山下浩. 大規模システム最適化のためのアルゴリズム、モデリング、ソフトウェア. 応用数理, Vol. 6, pp. 26-37, 1996.
- [52] 山内二郎(編). 統計数値表. 日本規格協会, 1972.

2185-9604/16/¥500/ 論文 /JCOPY

特集 スマートグリッドと新しいモデル化技術

=解説=

不確実性を考慮した発電機起動停止法

Unit Commitment under Uncertainty

早稲田大学 椎名 孝之 Takayuki Shiina

1. はじめに

様々の分野で発生する現実の数理計画問題には、目的関数および制約条件に不確実な要素を伴う場合が多い。不確実な状況下での計画には、リスクが含まれる。生産計画を例にあげる。生産計画は、製品に対する需要を満たすという制約条件の下で、生産コストを最小化する問題である。需要および、製産するとは確定的な値ではなく、確率的な変動を含む。需要が想定値より大きくなると、供給が満たされない可能性が生じ、また需要の想定を大きくとりすぎると、生産設備に余剰が生じることになる。また、製造費が変動する場合は、供給の実行可能性には問題は生じないものの、生産費用の最適性が失われる可能性がある。このようなリスクは、現実の計画においては回避されなければならない。

そのため、現実のシステムに含まれる不確実な状況をモデル化し、確率的変動要素を考慮することが必要となる。このように不確実要素を直接モデルに組み入れた最適化手法は、確率計画法(stochastic programming)(1)(2)(3)(4)とよばれている。特に電気事業などにおいては、自由化や規制緩和の進展により、不確実な状況下での意思決定やリスク管理手法が重要となるため、確率計画法の理論と手法のより一層の進展が求められている。

現実の生産計画などの問題を数理計画法によって最適化問題として定式化する場合、たとえば需要量などのような不確実要素を伴うパラメータを定数として扱うのが好ましくない場合がある。不確実な状況下での最適化を取り扱う確率計画法は、Dantzig⁽⁵⁾の研究に起源を有する。

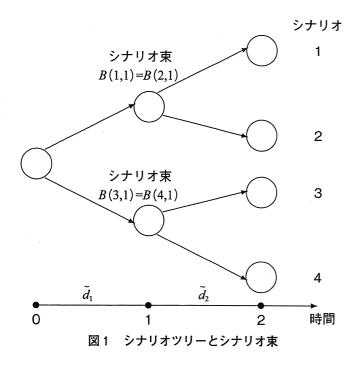
本解説では、発電機 (unit) の電力供給への関与 (commitment) を決定する発電機起動停止問題 (unit commitment problem) を考える。この問題は、時間

帯ごとに与えられた電力需要を満たすように、各設 備の起動停止スケジュールおよび出力を求めるスケ ジューリング問題である。従来は電力需要を確定値 で与えた問題60が研究されていたが、これらを拡張 した電力需要の変動を考慮した確率計画モデル(7)が 示された。また、これらのモデルを改良して現実の システムの運用を反映させた確率計画モデル(8)(9)(0)が 示されている。確率計画法に基づく問題を解くため の解法では、主にラグランジュ緩和法 (Lagrangean relaxation method) やベンダース分解 (Benders decomposition)などによって各発電機毎に問題を分 割することにより、効率的にスケジュールを生成 し、同時に電力需要を満たすようにスケジュールを 合成するなどの手順がとられる。確率計画モデルに より、需要変動による供給費用コスト上昇のリスク を回避することができる。

2. シナリオツリーによる変動の表現

起動停止の運用をt=1,...,Tの離散的な時間で考える。時間帯tにおける電力需要d,を確率変数であると定義し、その実現値をd,と表す。確率変数d,はとりうる値の個数が有限の離散分布に従うと仮定する。T時間にわたる確率変数の実現値の組 $d=(d_1,...,d_T)$ をシナリオ(scenario)と呼ぶ。分布の離散有限性から、シナリオの個数をS個と定義し、s番目のシナリオ $d^s=(d^s_1,...,d^s_T)$ が生起する確率を p_s ($\sum_{s=1}^S p_s=1$)とする。シナリオは $\mathbf{21}$ の有向グラフ(directed graph)であるシナリオツリー(scenario tree)において、ツリーの根ノードから末端のノードへの道として表される。

2つのシナリオ d^{s1} , d^{s2} $(s_1 \neq s_2)$ がある時間帯 t までの履歴において $(d_1^{s1},...,d_t^{s1}) = (d_1^{s2},...,d_t^{s2})$ を満たす場合, これらは時間帯 t までツリー上の同じ道を



たどる。 2 つのシナリオ d^{s1} , d^{s2} に対する意思決定は,時間帯 t まで等しくなければならない。意思決定者は,時間 t の段階ではシナリオ d^{s1} と d^{s2} が将来2 つの異なるシナリオに分岐することを見越して決定を行うことができない。時間 t では t+1 時間以降の将来に関する情報が意思決定者には与えられておらず,時間 t までの d_t の履歴に従って決定をしなければならないためである。この条件を予測不可能性条件(nonanticipativity)と呼ぶ。シナリオの添字集合 $\{1,...,S\}$ は各時間において,互いに素な部分集合に分割できる。時間 t までの履歴においてシナリオ s と等しいシナリオの添字集合を B (s,t) で表し,これをシナリオ東(scenario bundle)とよぶ。図 1 においては, $B(1,1)=B(2,1)=\{1,2\}$, $B(3,1)=B(4,1)=\{3,4\}$ となる。

条件 B(s',t) = B(s,t) かつ $B(s',t+1) \neq B(s,t+1)$, s' < s が満たされるならば、シナリオ s とシナリオ s' は時間 t+1 にツリー上で分岐する。シナリオ s が全ての s' < s と過去の履歴を共有しない最初の時間を T(s) で表し、シナリオ s の分岐点(split point)

と呼ぶ。シナリオ 1 に対しては T(1) = 1 とおく。 図 1 では T(2) = T(4) = 2, T(3) = 1 である。

電力需要データ d_{t}^{s} , t=1,...,T, s=1,...,S は記憶領域の節約のため、**図2**のようなリストを用いる。シナリオ s については、ツリーの分岐点以降の需要データ $d_{T(s)}^{s}$,..., d_{T}^{s} のみを保持する。需要データ d_{T}^{s} (s) が保存されるアドレスを A(s) とすると、データ $d_{T(s)}^{s}$,..., d_{T}^{s} は次のアドレス A(s),..., A(s+1)-1 に保存される。

3. 確率計画法による定式化

確率計画法に基づく発電機起動停止問題モデルを以下の問題(SUC)に示す。I 台の発電機による電力供給を考える。変数 u_{ii} は発電機 i の時間 t における状態を表す0-1変数である。変数 x_{ii}^{z} は発電機 i の時間 t における状態を表す0-1変数 u_{ii} は全シナリオを通じて固定であるが,出力を表す変数 x_{ii}^{z} はシナリオに応じて変動することに注意されたい。関数 $f_{i}(x_{ii}^{z})$ は発電機 i の燃料費を表す x_{ii}^{z} の凸 2 次関数である。関数 g_{i} (u_{ii} , i_{i-1} , u_{ii} , i_{i}) は発電機 i の起動費用を表し,(u_{ii} , i_{i-1} , u_{ii} , i_{i}) の時に正の値(起動費用に相当)となり,それ以外の場合には 0 となる関数である。

確率計画モデルに対する実際の定式化では,予測不可能性条件を満たすために,各出力についても需要データと同様 x_{it}^s , $t=1,...,T_s$, s=1,...,S ではなく,分岐点以降の出力 x_{it}^s , $t=T(s),...,T_s$, s=1,...,S のみを考慮する。その場合,時間t におけるシナリオs の生起確率 p_s を $\sum_{s'\in B(s,t)}p_s$ と置き換えておけばよい。

(SUC):
$$\min \sum_{s=1}^{s} p_{s} \sum_{i=1}^{t} \sum_{t=1}^{T} f_{i}(x_{it}^{s}) u_{it}$$

$$+ \sum_{i=1}^{t} \sum_{t=1}^{T} g_{i}(u_{i,t-1}, u_{i,t})$$
subject to
$$\sum_{i=1}^{t} x_{it}^{s} \ge d_{t}^{s}, \quad t = 1, ..., T, s = 1, ..., S$$

$$u_{it} - u_{i,t-1} \le u_{it'},$$

$$t' = t + 1, ..., \min\{t + L_{i} - 1, T\},$$

ı	シナリオ1		1	シナリオs		シナリオs+1		ı				
	1	2	•••	T		A(s)		A(s+1) -1	A (s+1)	•••	A(s+2) -1	•••
	d_1^1	d_2^1	•••	d_T^1	•••	$d_{T(s)}^{s}$		d_T^s	$d_{T(s+1)}^{s+1}$	***	d_T^{s+1}	

図2 電力需要に対するデータ構造

$$i = 1,..., I, t = 2,..., T$$

$$u_{i,t-1} - u_{it} \le 1 - u_{it'},$$

$$t' = t + 1,..., \min\{t + l_i - 1, T\},$$

$$i = 1,..., I, t = 2,..., T$$

$$q_i u_{it} \le x_{it}^s \le Q_i u_{it},$$

$$i = 1,..., I, t = 1,..., T, s = 1,..., S$$

$$x_{it}^{s1} = x_{it}^{s2}, i = 1,..., I, t = 1,..., T,$$

$$\forall s_1, s_2 \in \{1,..., S\}, s_1 \neq s_2,$$

$$B(s_1, t) = B(s_2, t)$$

$$u_{it} \in \{0, 1\}, i = 1,..., I, t = 1,..., T$$

目的関数は供給コストの最小化である。供給コストは、凸2次関数である燃料費の全てのシナリオに対する期待値と起動費用の総和となる。出力 x_{it}^{\prime} に対する燃料費は $f_i(x_{it}^{\prime})$ であるが、出力が $x_{it}^{\prime}=0$ となるとき必ずしも $f_i(0)=0$ とならないため、 $f_i(x_{it}^{\prime})$ u_{it} とするが凸2次関数と0-1変数の積になるため、一般的な最適化ソルバで扱うことができない場合がある。そこで、 $f_i(x_{it}^{\prime})-f_i(0)+f_i(0)u_{it}$ と変形する。これは、凸2次関数と0-1変数の定数倍の和であり、一般的な最適化ソルバを用いて解くことが可能である。

第1制約は、出力の総和が電力需要を満たすための条件である。第2制約は、発電機iは一旦起動したら L_i 時間連続で運転しなければならないことを表す。同様に第3制約は、発電機iは一旦停止したら l_i 時間連続で停止しなければならないことを表す。第4制約は発電機の出力の上下限を与える。パラメータ Q_i , q_i はそれぞれ発電機iの出力の上限値、下限値である。第5制約は予測不可能性条件を表す。

4. 起動停止問題に対する数値実験

設備数 I=10, 運用時間数 T=168時間(7日)のシステムを対象として数値実験を行った(S)。 1時間毎の1週間の想定需要データをもとに,**表1**のようにシナリオを与えた。データに関しては文献 かなを参照されたい。比較のため,S=1 である確定的な発電機起動停止問題についても解を求める。確定的数理計画モデルでは,16シナリオの需要の期待値に需要の上昇分を加えた1つのシナリオが確率1で発生するものとする。確定的問題から得られた起動停止0-1スケジュール \bar{u}_{ii} を用いて,費用の期待値を求めるという比較方法を行う。費用の期待値は以下の2次計画問題を解くことにより求められる。

表1 需要変動シナリオ

サナリオ 確率 は事間 25-48 月曜 49-72 火曜 73-96 水曜 97-120 木曜 1 0.0625 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	1									
月曜 火曜 水曜 木曜 1 0.0625 0 0 0 0 2 0.0625 0 0 0 +10% 3 0.0625 0 0 +20% 0 4 0.0625 0 0 +20% +10% 5 0.0625 0 +20% 0 +10% 6 0.0625 0 +20% 0 +10% 7 0.0625 0 +20% +20% +10% 8 0.0625 0 +20% +20% +10% 9 0.0625 +10% 0 0 +10% 10 0.0625 +10% 0 0 +10% 11 0.0625 +10% 0 +20% +10% 12 0.0625 +10% 0 +20% +10% 13 0.0625 +10% +20% 0 +10% 14 0.0625				時間						
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		シナリオ	確率	1			97-120			
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$				月曜	火曜	水曜	木曜			
3 0.0625 0 0 +20% 0 4 0.0625 0 0 +20% 10% 5 0.0625 0 +20% 0 0 6 0.0625 0 +20% 0 +10% 7 0.0625 0 +20% +20% 0 8 0.0625 0 +20% +20% +10% 9 0.0625 +10% 0 0 0 10 0.0625 +10% 0 0 +10% 11 0.0625 +10% 0 +20% 0 12 0.0625 +10% 0 +20% +10% 13 0.0625 +10% +20% 0 0 14 0.0625 +10% +20% 0 +10% 15 0.0625 +10% +20% +20% 0		1	0.0625	0	0	0	0			
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		2	0.0625	0	0	0	+10%			
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		3	0.0625	0	0	+20%	0			
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		4	0.0625	0	0	+20%	+10%			
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		5	0.0625	0	+20%	0	0			
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		6	0.0625	0	+20%	0	+10%			
9 0.0625 +10% 0 0 0 0 10 0.0625 +10% 0 0 0 +10% 11 0.0625 +10% 0 +20% 0 12 0.0625 +10% 0 +20% +10% 13 0.0625 +10% +20% 0 0 14 0.0625 +10% +20% 0 +10% 15 0.0625 +10% +20% 0 0 16 0.0625 +10% +20% 0 0 17 0.0625 +10% +20% 0 0 18 0.0625 +10% +20% 0 0 19 0.0625 +10% +20% 0 0		7	0.0625	0	+20%	+20%	0			
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	l	8	0.0625	0	+20%	+20%	+10%			
11		9	0.0625	+10%	0	0	0			
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$		10	0.0625	+10%	0	0	+10%			
13		11	0.0625	+10%	0	+20%	0			
14 0.0625 +10% +20% 0 +10% 15 0.0625 +10% +20% +20% 0	l	12	0.0625	+10%	0	+20%	+10%			
15 0.0625 +10% +20% +20% 0		13	0.0625	+10%	+20%	0	0			
10/0 120/0 120/0 0		14	0.0625	+10%	+20%	0	+10%			
		15	0.0625	+10%	+20%	+20%	0			
16 0.0625 +10% +20% +20% +10%		16	0.0625	+10%	+20%	+20%	+10%			

(期待費用最小化2次計画問題):

$$\min \sum_{s=1}^{s} p_{s} \sum_{i=1}^{l} \sum_{t=1}^{T} f_{i}(x_{it}^{s}) \bar{u}_{it} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{t=1}^{T} g_{i}(\bar{u}_{i,t-1}, \bar{u}_{i,t})$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{I} x_{it}^{s} \ge d_{t}^{s}, t = 1, ..., T, s = 1, ..., S$$

$$q_i \bar{u}_{it} \le x_{it}^s, \le Q_i \bar{u}_{it}, i = 1,..., I,$$

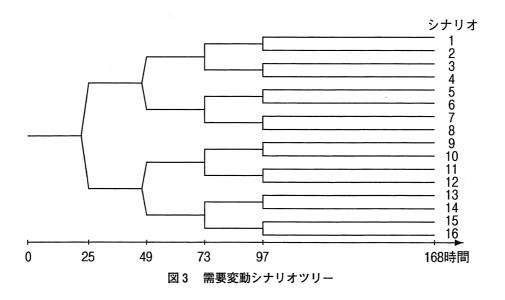
 $t = 1,..., T, s = 1,..., S$

$$x_{it}^{s1} = x_{it}^{s2}, i = 1, ..., I, t = 1, ..., T.$$

$$\forall s_1, s_2 \in \{1, ..., S\}, s_1 \neq s_2, B(s_1, t) = B(s_2, t)$$

シナリオの個数はS=16であり、その構造を図3に示す。確定的問題としては、月火水木の各曜日の需要に対応する需要上昇率を供給予備率として(5%, 10%, 10%, 5%) ($\mathbf{表}1$ の16個のシナリオにおける需要の平均値に対応)から、(10%, 20%, 20%, 10%) ($\mathbf{表}1$ において最も需要の大きい第16シナリオに対応)まで幅(1%, 2%, 2%, 1%) で上昇させた6 個の問題について考える。数値実験の結果を $\mathbf{表}2$ に示す。確率計画問題(SUC) は完全リコース性(確定的な決定 \bar{u}_{ii} が与えられた時に、実行可能解が常に存在するという性質)を持たないため、確定的な数理計画問題を解いて得られた0-1スケジュールに対しては、2次計画問題の解は必ずしも存在しないということに注意されたい。ギャップの値は以下のように定義される。

ギャップ= <u>暫定最良目的関数値 - 下界値</u> 暫定最良目的関数値 ×100 (1)



確定的な数理計画モデルにおいては、需要に対する予備率が(5%,10%,10%,5%)から(8%,16%,16%,8%)まで上昇させた4つの問題を解いて得られる起動停止スケジュールからは2次計画問題の実行可能解は得られない。すなわち、16個のシナリオで需要の満たされないものが存在することになる。需要上昇率を(9%,18%,18%,9%)、(10%,20%,20%,10%)とした残りの2つの問題の解を用いると、2次計画問題は実行可能になる。これらの2次計画問題の目的関数値と確率計画モデルの目的関数値を比較する。確率計画法によると従来の確定的数理計画モデルに比べ、約4.89%=100×(1-3669641/3858235)少ない費用の発電機の起動停止スケジュールを求めることが可能となった。得られた起動停止スケジュールを図4に示す。

5. 解法とモデルの拡張

本解説では、発電機起動停止問題に対して現実のシステムの運用を反映させ、かつ電力需要の不確実

性を考慮した確率計画モデルを示した。確率計画モデルにより、需要変動による供給費用コスト上昇のリスクを回避することができる。ラグランジュ緩和法による解法によると、同じ性能の発電機に対しては同じ起動停止スケジュールが得られてしまうということが指摘されている。これに対し、列生成法(column generation)(9)(11)を用いてスケジュールを生成する方法が示されている。列生成法によると、同性能の発電機に対しても異なるスケジュールが得られる。

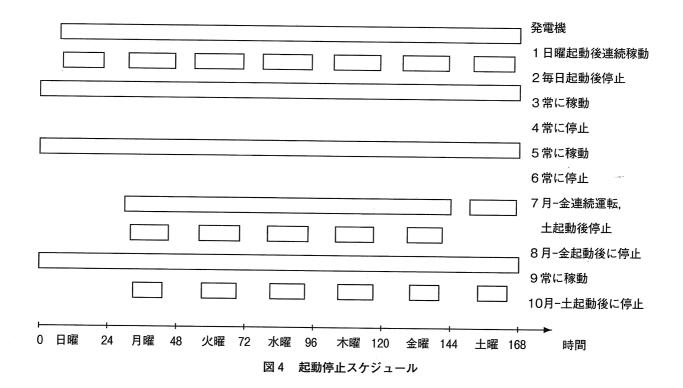
定式化においては、問題(SUC)の連続稼働 / 停止制約(制約 2 および 3)に対し、より強い制約(妥当不等式)が導かれている $^{(2)}$ 。発電機 i が時間 t に起動するときのみに 1 となる0-1変数 $v_{it} \geq u_{it}-u_{i,t-1}$ を用いると連続稼働制約は以下のようになる。

$$\sum_{t'=t-L_i+1}^t v_{it'} \leq u_t$$

これは、ある発電機が稼働しているならば、その

衣 2								
モデル	暫定最良目的関数値	下界值	ギャップ(%)	(2次計画問題)				
確率計画(提案法)	3669641	3574354	2.60	· –				
確定的(5%, 10%, 10%, 5%)	3661903	3565734	2.63	実行不可能				
確定的 (6%, 12%, 12%, 6%)	3690471	3599839	2.46	実行不可能				
確定的 (7%, 14%, 14%, 7%)	3723632	3634030	2.40	実行不可能				
確定的 (8%, 16%, 16%, 8%)	3752530	3668190	2.25	実行不可能				
確定的 (9%, 18%, 18%, 9%)	3788842	3702357	2.28	3858235				
確定的(10%, 20%, 20%, 10%)	3829294	3735353	2.45	3858235				

表 2 数値実験の結果



一定時間前には起動していなければならないことを表す。逆に停止開始変数 w_{ii} を定義すると連続停止制約は以下のようになる。

$$\sum_{t=t-t+1}^{t} w_{it'} \leq 1 - u_t$$

実際に問題を解く場合には、様々な解法を実装するよりも、AMPL⁽³⁾などの言語を用いてモデル化を行い、最適化ソルバを用いて解を求めることが多く、本稿で示した規模の問題は実用的な時間内で解を求めることが可能である。

電力自由化後の起動停止問題は、今後の研究課題 として重要であり、¹⁴⁰⁰⁰などを参照されたい。

確率計画法は、本論文に挙げた問題に限らず、多くの分野のシステムの最適化問題に対して有効であるため、今後も解法の発展および効率化と、スマートグリッドなどの幅広い分野で大規模な現実問題への適用が期待できる。

<参考文献>

- (1) J.R. Birge and F.V. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- P. Kall and S.W. Wallace, Stochastic Programming, John Wiley & Sons, New York, 1994.
- (3) 椎名孝之,確率計画法,応用数理計画ハンドブック(久保幹雄,田村明久,松井知己編),朝倉書店,pp.710-769,2002.
- (4) 椎名孝之, 確率計画法, 朝倉書店, 2015.
- (5) G.B. Dantzig, Linear Programming under uncertainty, *Management Science*, 1 (1955), 197-206.
- (6) J. A. Muckstadt and S. A. Koenig, An application of lagrangian relaxation to scheduling in power generation systems, *Operations Research*, 25

(1977), 387-403.

- (7) S. Takriti, J. R. Birge, and E. Long, A stochastic model for the unit commitment problem, IEEE *Transactions on Power Systems*, 11 (1996), 1497-1508.
- (8) 椎名孝之, 確率計画法による発電機起動停止問題, 日本応用 数理学会論文誌, 13 (2003), 181-190.
- (9) T. Shiina and J. R. Birge, Stochastic unit commit-ment problem, International Transactions in Operational Research, 11 (2004), 19-32
- (10) T. Shiina and I. Watanabe, Lagrangian relaxation method for price-based unit commitment problem, *Engineering Optimization*, 36 (2004), 705-719.
- (11) 萬木貴大, 椎名孝之, 森戸晋, 今泉淳, 発電機起動停止問題 における列生成法の改善, 日本応用数理学会論文誌, 25 (2015), 21-30.
- D. Rajan and S. Takriti, Minimum up/down polytopes of the unit commitment problem with start-up costs, *IBM Research Report*, RC23628 (2005).
- R. Fourer, D. M. Gay, and B. W. Kernighan, AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming second edition, Duxbury Press, 2002.
- B. F. Hobbs, M. H. Rothkopf, R. P. O' Neill, and H.-P. Chao, The Next Generation of Electric Power Unit Commitment Models, Kluwer Aca-demic, 2002.



椎名 孝之

早稲田大学 創造理工学部 経営システム工学科 教授

現在, オペレーションズ・リサーチ および数理最適化の研究と教育に従事 している。