オペレーションズ・リサーチＡ 演習問題

1．次の線形計画問題(LP)は標準型の最小化問題である。この問題において、行列 A を $A=(B, N)$ のように実行可能基底 B とそれ以外の部分行列 N を用いて表すと、問題(LP0)に書き直すことができる。

(LP): min $z=c^{\mathsf{T}}x$ subject to $Ax=b$, $x \geqq 0$

(LP0): min $z=c_B^{\mathsf{T}}x_B+c_N^{\mathsf{T}}x_N$ subject to $Bx_B+Nx_N=b$, $x_B, x_N \geqq 0$

問題(LP0)に対応する単体表を以下に示すが、この単体表は基底形式ではないため、右の基底形式に書き直す。空欄を埋めよ。

	z	x_B	x_N
0	1	$-c_B^{\mathsf{T}}$	$-c_N^{\mathsf{T}}$
b	$\mathbf{0}$	B	N

⇒

	z	x_B	x_N
空欄(1-1)	1	$\mathbf{0}$	空欄(1-2)
空欄(1-3)	$\mathbf{0}$	I	空欄(1-4)

解答：

2. 次の線形計画問題を単体法により解き、各反復における基底 B と基底の逆行列 B^{-1} を示せ。

$$\min \quad z = -x_1 - x_2$$

$$\text{subject to} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0 \end{aligned}$$

基底変数	値	z	x_1	x_2,	x_3	x_4	θ
z							

$B =$

$B^{-1} =$

基底変数		z	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
z							

$B =$

$B^{-1} =$

基底変数		z	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
z							

$B =$

$B^{-1} =$

最適解における被約費用の値を、以下の行列とベクトルの各成分を明記して示せ。

$$c_N^{\top} - c_B^{\top} B^{-1} N = (\qquad) - (\qquad)\begin{pmatrix} \qquad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \qquad \end{pmatrix} = (\qquad)$$

3. 次の標準型線形計画問題（主問題）を考える。

(主問題) min　$z = 40x_1 + 60x_2$

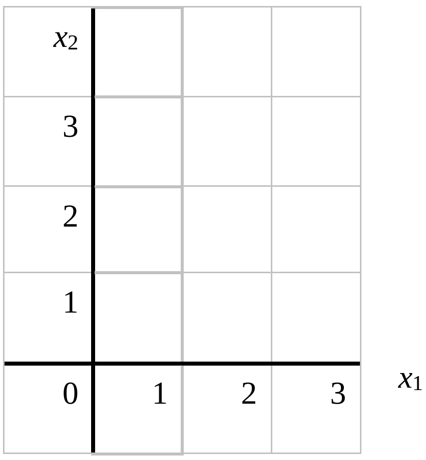
subject to

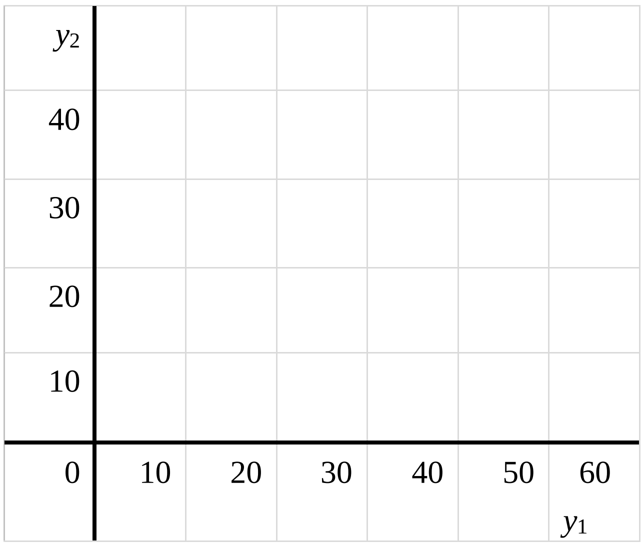
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\
x_1 + 2x_2 - x_4 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

(1)この問題の双対問題を示せ。ただし双対変数を y_1 および y_2 とせよ。

(双対問題)

(2)両者の実行可能領域をグラフ上に示し、それぞれの最適解と最適目的関数値を求めよ。ただし、主問題の実行可能領域は x_1 および x_2 を用いて表せ。





主問題：

最適目的関数値＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

最適解　x_1=＿＿＿＿，x_2=＿＿＿＿，x_3=＿＿＿＿，x_4=＿＿＿＿.

双対問題：

最適目的関数値＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

最適解　y_1=＿＿＿＿，＿＿＿＿y_2 =＿＿＿＿.

4. 次のナップサック問題を分枝限定法によって解く。分枝方法は、連続緩和問題の最適解において 0-1 条件を満たさない変数を 0 と 1 に固定することによって行う（右子問題では分枝変数=1、左子問題では分枝変数=0 とし、左子問題の問題番号が右子問題よりも大きくなるようにする)。また、子問題選択には奥行優先側（最大の問題番号を選択）を用いる。さらに、連続緩和問題の最適解において 0-1 条件を満たさない変数を 0 に固定することにより、最適目的関数値の下界値が得られる。次の列挙木の空欄を埋めよ。

（問題 KP-0）max $32x_1+35x_2+10x_3+4x_4$

subject to $4x_1+5x_2+2x_3+x_4 \leqq 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

問題番号 0
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値__________________
暫定目的関数値 ______________________

分枝 __________ =0

分枝 __________ =1

問題番号 2
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値__________________
暫定目的関数値 ______________________
分枝停止の理由 ______________________

問題番号 1
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値__________________
暫定目的関数値 ______________________

分枝 __________ =0

分枝 __________ =1

問題番号 4
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値__________________
暫定目的関数値 ______________________
分枝停止の理由 ______________________
____

問題番号 3
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値__________________
暫定目的関数値 ______________________
分枝停止の理由 ______________________

オペレーションズ・リサーチＡ 演習問題（解答付）

1. 次の線形計画問題(LP)は標準型の最小化問題である。この問題において、行列 A を $A=(B,\ N)$ のように実行可能基底 B とそれ以外の部分行列 N を用いて表すと、問題(LP0)に書き直すことができる。

(LP): min $z=c^{\mathsf T}x$ (LP0): min $z=c_B^{\mathsf T}x_B+c_N^{\mathsf T}x_N$

subject to $Ax=b$ subject to $Bx_B+Nx_N=b$

$x\geqq 0$ $x_B,\ x_N\geqq 0$

問題(LP0)に対応する単体表を以下に示すが、この単体表は基底形式ではないため、右の基底形式に書き直す。空欄を埋めよ。

	z	x_B	x_N
0	1	$-c_B^{\mathsf T}$	$-c_N^{\mathsf T}$
b	$\mathbf{0}$	B	N

⇒

	z	x_B	x_N
空欄(1-1)	1	$\mathbf{0}$	空欄(1-2)
空欄(1-3)	$\mathbf{0}$	I	空欄(1-4)

解答：問題(LP0)の制約式より、$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$ となり、これを目的関数に代入することにより、目的関数から x_B の項を消去する。

$z=c_B^{\mathsf T}x_B+c_N^{\mathsf T}x_N=c_B^{\mathsf T}(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N)+c_N^{\mathsf T}x_N$

これより $z-(c_N^{\mathsf T}-c_B^{\mathsf T}B^{-1}N)x_N=c_B^{\mathsf T}B^{-1}b$

(1-1) $c_B^{\mathsf T}B^{-1}b$

(1-2) $-(c_N^{\mathsf T}-c_B^{\mathsf T}B^{-1}N)$

(1-3) $B^{-1}b$

(1-4) $B^{-1}N$

2. 次の線形計画問題を単体法により解き、各反復における基底 B と基底の逆行列 B^{-1} を示せ。

$$\min \quad z = -3x_1 - 2x_2$$

$$\text{subject to} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0 \end{aligned}$$

基底変数		z	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
z	0	1	3	2	0	0	
x_3	8	0	1	2	1	0	8/1=8
x_4	10	0	$\boxed{2}$	1	0	1	10/2=5

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基底変数		z	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
z	-15	1	0	1/2	0	-3/2	
x_3	3	0	0	$\boxed{3/2}$	1	-1/2	3/(3/2)=2
x_1	5	0	1	1/2	0	1/2	5/(1/2)=10

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

基底変数		z	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
z	-16	1	0	0	-1/3	-4/3	
x_2	2	0	0	1	2/3	-1/3	
x_1	4	0	1	0	-1/3	2/3	

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

最適解における被約費用の値を、以下の行列とベクトルの各成分を明記して示せ。

$$c_N^{\top} - c_B^{\top} B^{-1} N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

3. 次の標準型線形計画問題（主問題）を考える。

(主問題) min　$z = 40x_1 + 60x_2$

subject to　$x_1 + x_2 - x_3 = 2$

$x_1 + 2x_2 - x_4 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0$

(1)この問題の双対問題を示せ。ただし双対変数を y_1 および y_2 とせよ。

(双対問題) max　$2y_1 + 3y_2$

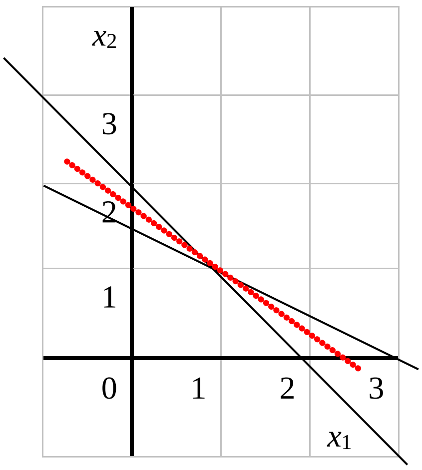
subject to　$y_1 + y_2 \leqq 40$

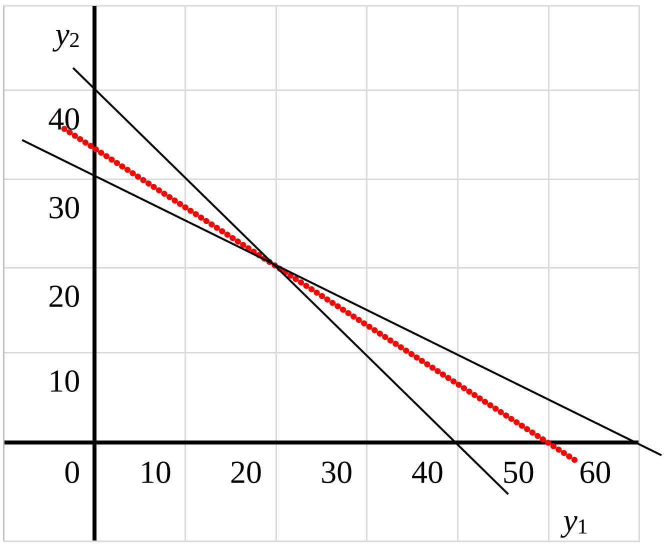
$y_1 + 2y_2 \leqq 60$

$-y_1 \leqq 0$

$-y_2 \leqq 0$

(2)両者の実行可能領域をグラフ上に示し、それぞれの最適解と最適目的関数値を求めよ。ただし、主問題の実行可能領域は x_1 および x_2 を用いて表せ。





主問題：

最適目的関数値　　100　　.

最適解　x_1=　1　, x_2=　1　,　x_3=　0　,　x_4=　0　.

双対問題：

最適目的関数値　　100　　.

最適解　y_1=　20　,　y_2=　20　.

4. 次のナップサック問題を分枝限定法によって解く。分枝方法は、連続緩和問題の最適解において 0-1 条件を満たさない変数を 0 と 1 に固定することによって行う（右子問題では分枝変数=1、左子問題では分枝変数=0 とし、左子問題の問題番号が右子問題よりも大きくなるようにする）。また、子問題選択には奥行優先側（最大の問題番号を選択）を用いる。さらに、連続緩和問題の最適解において 0-1 条件を満たさない変数を 0 に固定することにより、最適目的関数値の下界値が得られる。次の列挙木の空欄を埋めよ。

（問題 KP-0）max $32x_1+35x_2+10x_3+4x_4$

subject to $4x_1+5x_2+2x_3+x_4 \leqq 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

問題番号 0
連続緩和問題の最適解
x_1 = 1, x_2 = 2/5, x_3 = 0, x_4 = 0
連続緩和問題の最適目的関数値
46
非整数値切り下げによる実行可能解に対する目的関数値 32
暫定目的関数値 32

分枝 x_2 =0

分枝 x_2 =1

問題番号 2
連続緩和問題の最適解
x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0
連続緩和問題の最適目的関数値
42
非整数値切り下げによる実行可能解に対する目的関数値 42
暫定目的関数値 42
分枝停止の理由 整数解が得られたため

問題番号 1
連続緩和問題の最適解
x_1 = 1/4, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0
連続緩和問題の最適目的関数値
43
非整数値切り下げによる実行可能解に対する目的関数値 35
暫定目的関数値 42

分枝 x_1 =0

分枝 x_1 =1

問題番号 4
連続緩和問題の最適解
x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1/2, x_4 = 0
連続緩和問題の最適目的関数値
40
非整数値切り下げによる実行可能解に対する目的関数値 35
暫定目的関数値 42
分枝停止の理由 暫定目的関数値より
より良い値が得られる可能性がない

問題番号 3
連続緩和問題の最適解
x_1 =なし, x_2 =なし, x_3 =なし, x_4 = なし
連続緩和問題の最適目的関数値
なし
非整数値切り下げによる実行可能解に対する目的関数値 なし
暫定目的関数値 42
分枝停止の理由 実行不可能であるため