「基礎OR／OR演習」
第4回
包絡分析法(DEA)

早稲田大学 創造理工学部　経営システム工学科

包絡分析法

- DEA(包絡分析法)による効率性評価とは？
- DEAの線形計画による定式化は？
- DEAの定式化の双対問題は？
- DEAはどんな応用があるか？
- DEAの効率値の計算ソフトは？(時間がなければ省略)

工学的には事業体の活動を改善したり、新たな活動を始めたりしたいが、そうではなく

入力(値が与えられている)

入力(値が与えられている)

事業体

各入力値と各出力値にどのような重みをつければ、評価が高くなるかを決める

出力(値が与えられている)

出力(値が与えられている)

包絡分析法（DEA）
Data Envelopment Analysis

- 分析対象： 事業体、DMU(Decision Making Unit）
  - 銀行、大学、スーパー、郵便局、デパート、病院、都道府県、省庁、個人、プロジェクト. . .
  - DMUは似たような機能をもって活動している
  - ある程度の独立したマネジメントの権限を有する
- 事業体（DMU）の活動(activity)：
  「資源の投入→便益の産出」という変換過程
- 比率尺度によって事業体の効率性を相対比較すること
- 比率尺度による効率性の測定：
  産出／投入
  - 熱効率、燃費など
- 「より少ない投入でより大きな産出を」

問題例(1)

- 区立図書館の効率性評価
- 入力項目：
  蔵書数、職員数
- 出力項目：
  登録者数、貸出冊数

	入力		出力		効率値
区	蔵書数 （千冊）	職員数 （人）	登録者数 （千人）	貸出冊数 （千冊）	D効率
千代田	163.523	26	5.561	105.321	0.226
中央	338.671	30	18.106	314.682	0.638
台東	281.655	51	16.498	542.349	0.540
荒川	400.993	78	30.810	847.872	0.593
港	363.116	69	57.279	758.704	0.911
文京	541.658	114	66.137	1438.746	0.745
墨田	508.141	61	35.295	839.597	0.650
渋谷	338.804	74	33.188	540.821	0.539
目黒	511.467	84	65.391	1562.274	0.897
豊島	393.815	68	41.197	978.117	0.705
新宿	509.682	96	47.032	930.437	0.539
中野	527.457	92	56.064	1345.185	0.719
品川	601.594	127	69.554	1164.801	0.638
北	528.799	96	37.467	1348.588	0.715
江東	394.158	77	57.727	1100.779	0.844
葛飾	515.624	101	46.160	1070.488	0.582
板橋	566.708	118	102.967	1707.645	1.000
江戸川	467.617	74	47.236	1223.026	0.787
杉並	768.484	103	84.510	2299.694	1.000
練馬	669.996	107	69.576	1901.465	0.849
足立	844.949	120	89.401	1909.698	0.787
大田	1258.981	242	97.941	3055.193	0.681
世田谷	1148.863	202	191.166	4096.300	1.000

問題例(2)

- 研究開発プロジェクトの評価
  - 入力と考えられる項目
    - 投入資金、投入人数、. . .
  - 出力と考えられる項目
    - 推定市場規模、特許取得／申請数、戦略適合度、実用化の可能性(開発成功確率)、. . .
- プロジェクトの効率性を評価したい
- 効率の高いプロジェクトの組み合わせを選択したい

Research and development project	Input	Output				
	Project Cost	Indirect economic contribution	Direct economic contribution	Technical contribution	Social contribution	Scientific contribution
1	84.2	67.53	70.82	62.64	44.91	46.28
2	90	58.94	62.86	57.47	42.84	45.64
…						
37	66.4	57.78	72.1	43.83	16.14	31.32

DEAによる効率性評価の適用

刀根薫、「経営効率性の測定と改善」、日科技連、1993.

刀根、上田（監訳）、「経営効率評価ハンドブック」、朝倉書店、2000.

– 病院の評価
– 省庁あるいはその出先機関の評価
– 銀行の支店や郵便局の評価
– スーパーの店舗の評価
– 公立施設の評価（図書館、福祉施設、体育館．．．）
– スポーツチームや選手個人の評価
– 経営戦略の評価（航空業界や醸造産業への応用）
– マーケティング戦略の評価

．．．

– 研究開発チーム、研究開発プロジェクトや研究者個人の評価
– 大学やその学部・学科・研究室の評価

入出力項目の選び方

１．入力項目、出力項目の選定にあたっては、みたいと思う入力対出力の効率性の特徴をよく表わしているものを選ぶ

２．入力項目、出力項目とも数値データが準備でき、原則としてその値は正である

３．ある出力を得るための入力は小さい値ほどよく、ある入力による出力は大きいほどよい

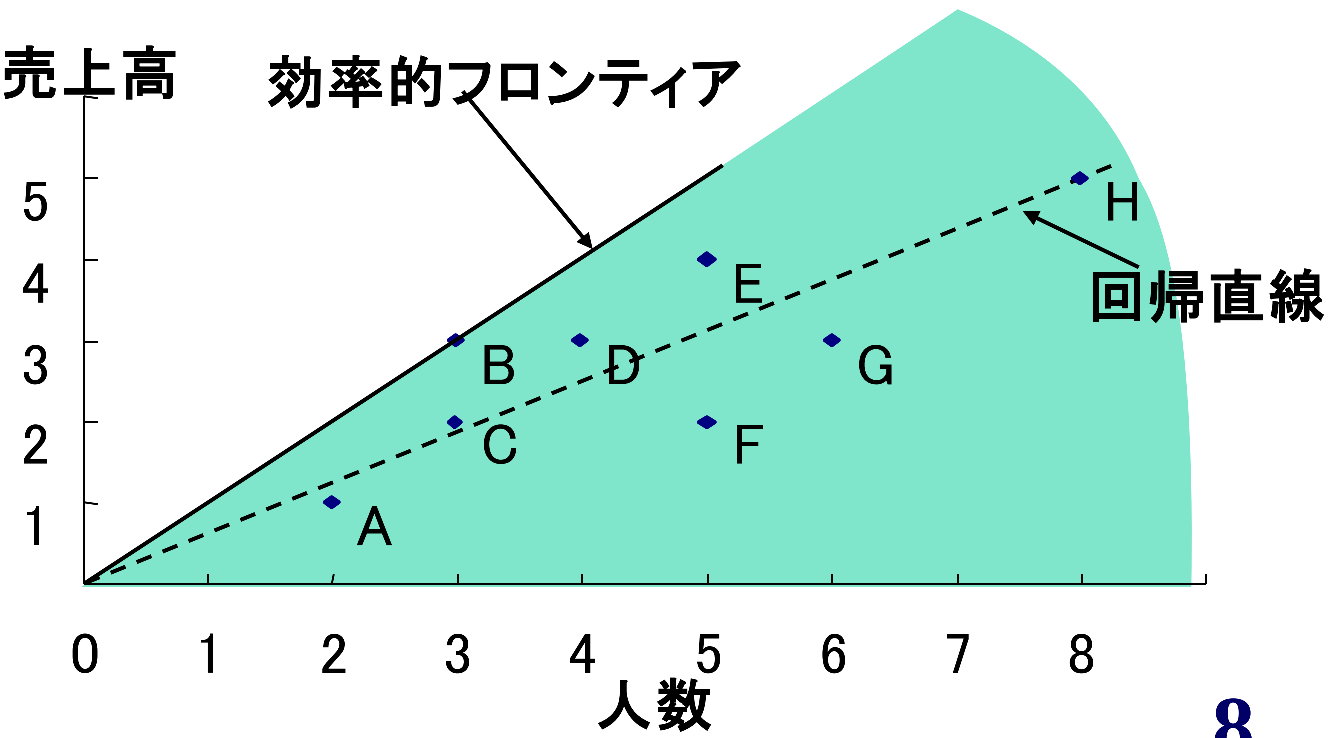
４．項目の単位は任意でよい

1入力，１出力の例：効率的フロンティア

Efficient Frontier

- すべての点は効率的フロンティアの下側に包み込まれる→包絡分析法
  - Envelopment: 包むこと（データを包み込む分析）

営業所	営業人数	売上高	売上高/人
A	2	1	0.5
B	3	3	1
C	3	2	0.667
D	4	3	0.75
E	5	4	0.8
F	5	2	0.4
G	6	3	0.5
H	8	5	0.625

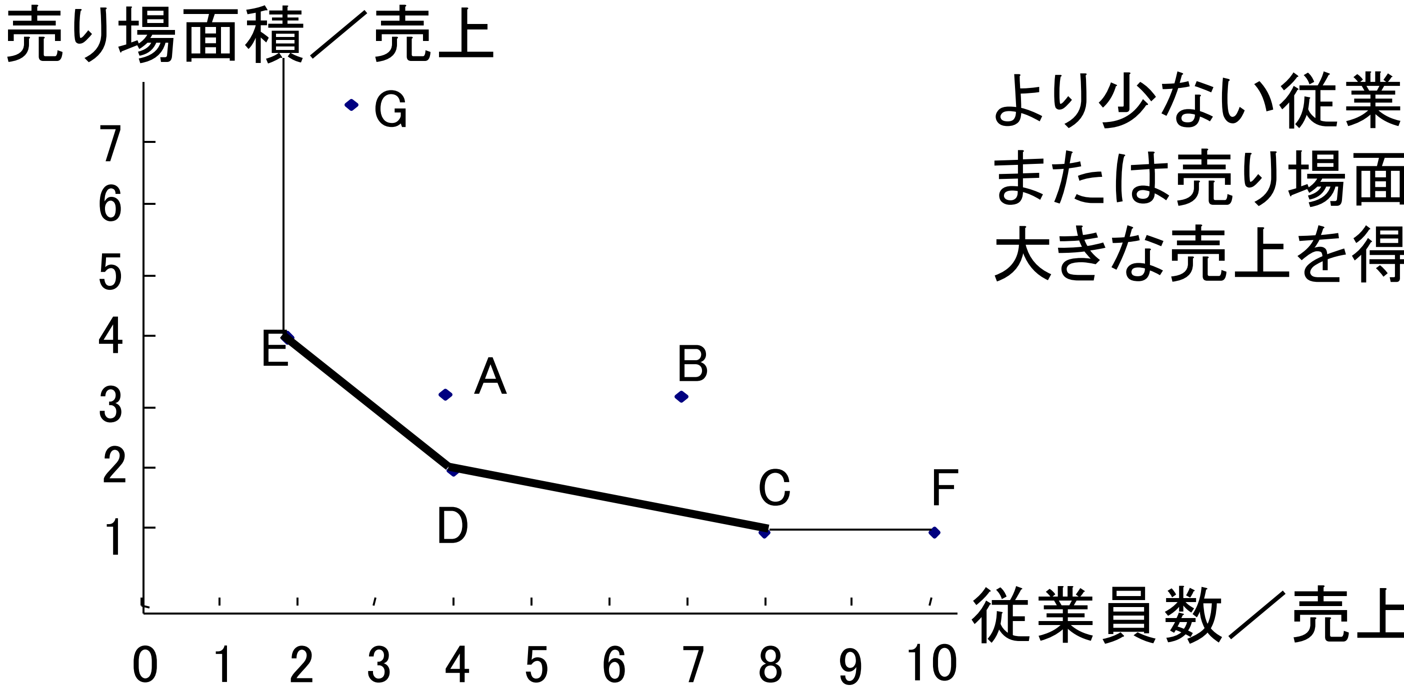


回帰分析と包絡分析

- 回帰分析＝最小二乗法による直線のあてはめ
  - 回帰直線より上はよい成績、下は悪い成績
  - 平均像に基づく分析法
    - 平均を追えば良い、という訳ではない．．．
- 包絡分析法＝最優秀パフォーマンス線を元に、他を評価する
  - 優れものをベースにした効率性の評価法
    - 良い例を見習いたい

２入力，１出力の例
（スーパーマーケット）

- 店舗Dは模範的な店、一方店舗Cや店舗Eはユニークな特色のある店
- 店舗Dや店舗Eの存在がゆえに、店舗Aは見劣りする（店舗D, Eは、店舗Aの優位集合または参照集合（あるいは、優位集合）reference setと呼ばれる；目標と言ってもよい）



より少ない従業員数または売り場面積で大きな売上を得る

学部再編における学科評価

- 3つの学科（A・B・C）があり、どの学科が効率的かを知りたい
- 項目は、入力が2つ、出力が3つであり、各学科の値は以下の表の通り
- 出力／入力という比率尺度で相対的な効率性を計測するために、多入力、多出力をそれぞれ1つの仮想的入力、仮想的出力に変換する
- 各項目にウェイトを掛けて加える

表1　学科評価の基礎データ

学科	入力1	入力2	出力1	出力2	出力3
A	10	15	20	3.25	10
B	24	30	25	7	20
C	21	24	20	6	26

入出力項目、ウェイト、効率性の指標

・入出力項目の値:与えられている

x_r ＝入力項目 $r(r=1,2)$ の値

y_i ＝出力項目 $i(i=1,2,3)$ の値

・各項目のウェイト:こちらが決定変数

v_r ＝入力項目 $r(r=1,2)$ のウェイト

u_i ＝出力項目 $i(i=1,2,3)$ のウェイト

仮想的入力(総合入力)＝ $v_1x_1+v_2x_2$

仮想的出力(総合出力)＝ $u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3$

効率性の評価指標＝仮想的出力／仮想的入力

固定ウェイト

- 固定ウェイト： 事業体の特色を無視した一律のウェイト
- （ある意味で）公平かもしれないが、現実の事業体のもつ多様性を評価するには不適
  - たとえば、固定ウェイトを平均像をもとに単純、安易に決めると、平均的な事業体像が前面に出て、優れた事業体、特色のある事業体が「外れ者」と扱われるおそれがある

可変ウェイト

- 基本的考え方
  - 入力ウェイト、出力ウェイトは評価の対象毎に異なってもよい。
  - ウェイトは、その評価対象にとって最も好都合となるように決めてよい。すなわち、自分の得意とする項目に大きいウェイトを付け、苦手とする項目に小さなウェイトをつけてもよい。
  - ただし、決められた同じウェイトで他の事業体も評価し、仮想的入力（総合入力）と仮想的出力（総合出力）を計算し、比率尺度によって効率性を評価する。

可変ウェイト

- 入出力項目の選定が適正である限り、どの事業体からもクレームはつかない
- ある事業体が非効率的と判定されたとき、それが他のどの事業体と比べてどの程度劣るのか、どの点を改善すれば効率的になるかを具体的に検討できる

平均像的な大勢順応型評価

→ 個性かつ多様性を活かした評価

（多基準型評価）

各学科の効率値

学科Aの効率値＝ $\dfrac{20u_1 + 3.25u_2 + 10u_3}{10v_1 + 15v_2}$

学科Bの効率値＝ $\dfrac{25u_1 + 7u_2 + 20u_3}{24v_1 + 30v_2}$

学科Cの効率値＝ $\dfrac{20u_1 + 6u_2 + 26u_3}{21v_1 + 24v_2}$

u_i, v_r は評価対象となる学科に都合のよいように決める

分数計画問題の形

学科Bを評価対象とする場合

最大化

$$\frac{25u_1+7u_2+20u_3}{24v_1+30v_2}$$ （学科Bの比）

制約条件

$$\frac{20u_1+3.25u_2+10u_3}{10v_1+15v_2}\leq 1$$ （学科Aの比1以下）

$$\frac{25u_1+7u_2+20u_3}{24v_1+30v_2}\leq 1$$ （学科Bの比1以下）

$$\frac{20u_1+6u_2+26u_3}{21v_1+24v_2}\leq 1$$ （学科Cの比1以下）

$$u_1,u_2,u_3,v_1,v_2\geq 0$$ （各ウェイトは0以上）

線形計画問題の形

学科Bを評価対象とする場合

最大化　$25u_1 + 7u_2 + 20u_3$　（学科Bの出力）

制約条件　$24v_1 + 30v_2 = 1$　（学科Bの入力は1に固定）

$$-10v_1 - 15v_2 + 20u_1 + 3.25u_2 + 10u_3 \le 0$$

（学科Aの出力は入力以下）

$$-24v_1 - 30v_2 + 25u_1 + 7u_2 + 20u_3 \le 0$$

（学科Bの出力は入力以下）

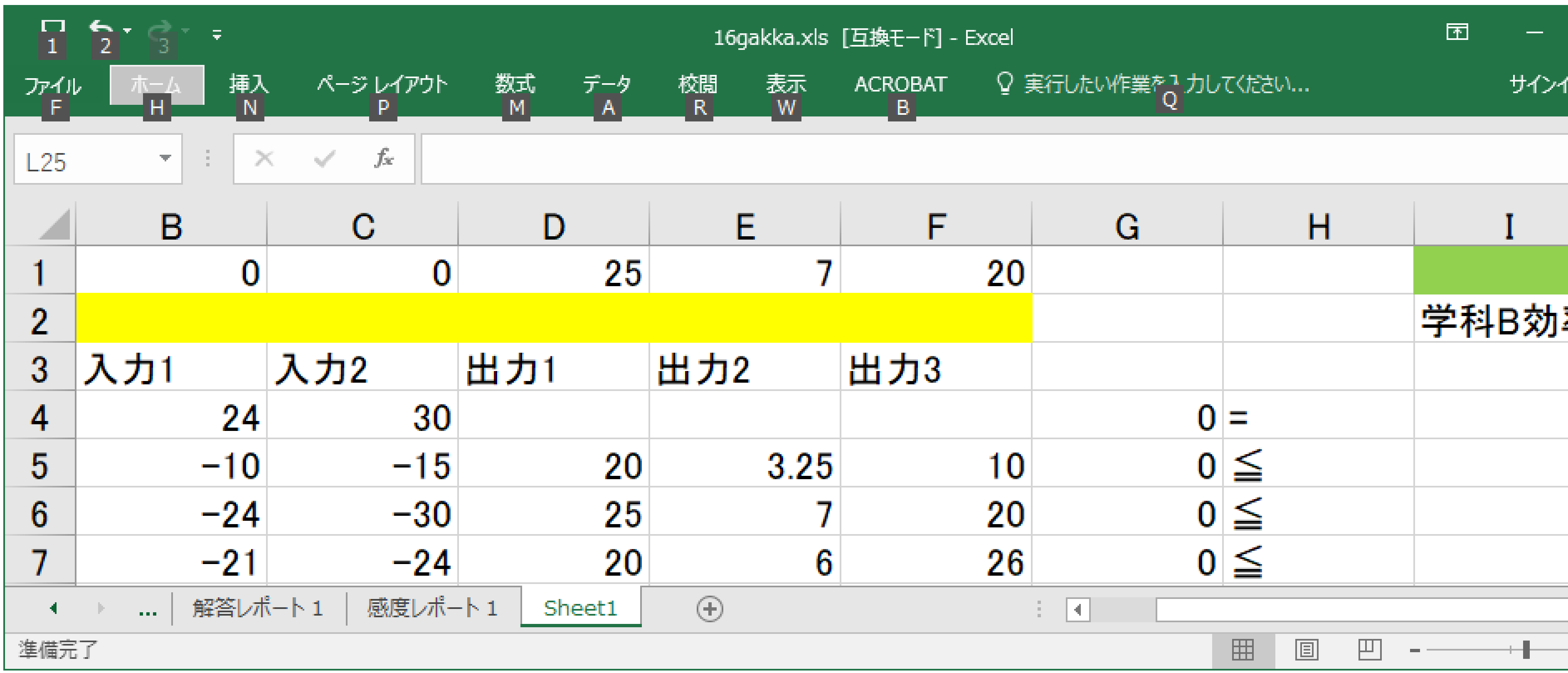
$$-21v_1 - 24v_2 + 20u_1 + 6u_2 + 26u_3 \le 0$$

（学科Cの出力は入力以下）

$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \ge 0$　（各ウェイトは0以上）

Excelソルバーによる定式化

- 変化させるセル
- 目的セル(sumproduct)



	B	C	D	E	F	G	H	I
1	0	0	25	7	20			
2								学科B効
3	入力1	入力2	出力1	出力2	出力3			
4	24	30				0	=	
5	−10	−15	20	3.25	10	0	≦	
6	−24	−30	25	7	20	0	≦	
7	−21	−24	20	6	26	0	≦	

Excelソルバーによる定式化と解

- 学科Aと学科Cは、効率値を最大化する線形計画問題を解くと、（D-）効率値が1になる
- 一方、学科Bの効率値を最大化する問題を解くと．．．

			25	7	20			0.98039216
	0.022409	0.015406	0	0.140056	0			学科B効率値
学科	入力1	入力2	出力1	出力2	出力3			
比較対象	24	30				1	＝	1
A	−10	−15	20	3.25	10	−5.6E−17	≦	0
B	−24	−30	25	7	20	−0.01961	≦	0
C	−21	−24	20	6	26	−1.1E−16	≦	0

$$v_1 = 0.022$$

$$v_2 = 0.015$$

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 0.140$$

$$u_3 = 0$$

としたときに、効率値が最大値をとり、そのときの効率値は0.980となる

DEAの分析データ：入出力データ行列

- m個の入力項目、s個の出力項目

（$m \times n$行列）　　　　（$s \times n$行列）

これらは変数でないことに注意

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}$$

事業体1,…,nを分析する。

DEAの基本モデル
CCR(Charnes-Cooper-Rhodes)モデル

- 評価の対象となる事業体にもっとも都合のよいウェイトを入出力項目につける
  - 入力につけるウェイト $v_r(r=1,\ldots,m)$ →変数
  - 出力につけるウェイト $u_i(i=1,\ldots,s)$ →変数
- 分数計画
  目的関数　評価対象の効率(比率)最大化
  制約条件　ウェイトv_r、ウェイトu_iによる仮想的入力と仮想的出力の比をすべての活動に対して1以下におさえる

CCRモデル

第k事業体の効率値を最大化する

＜FPk＞目的関数 $\max\ \theta = \dfrac{u_1 y_{1k} + u_2 y_{2k} + \cdots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + v_2 x_{2k} + \cdots + v_m x_{mk}}$

制約式 $\dfrac{u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j} + \cdots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \cdots + v_m x_{mj}} \leqq 1 \ (j = 1, \cdots, n)$

$$v_1, v_2, \cdots, v_m \geqq 0$$

$$u_1, u_2, \cdots, u_s \geqq 0$$

＜LPk＞目的関数 $\max\ \theta = u_1 y_{1k} + \cdots + u_s y_{sk}$

制約式 $v_1 x_{1k} + \cdots + v_m x_{mk} = 1$

$$u_1 y_{1j} + \cdots + u_s y_{sj} \leqq v_1 x_{1j} + \cdots + v_m x_{mj} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$v_1, v_2, \cdots, v_m \geqq 0$$

$$u_1, u_2, \cdots, u_s \geqq 0$$

EXCELソルバーの結果

学科Bの効率値を最大化する線形計画問題の結果

			25	7	20			0.98039216
	0.022409	0.015406	0	0.140056	0			学科B効率値
学科	入力1	入力2	出力1	出力2	出力3			
比較対象	24	30				1	＝	1
A	−10	−15	20	3.25	10	−5.6E−17	≦	0
B	−24	−30	25	7	20	−0.01961	≦	0
C	−21	−24	20	6	26	−1.1E−16	≦	0

$v_1 = 0.022$ $u_1 = 0$

$v_2 = 0.015$ $u_2 = 0.140$ としたときに、効率値は最大に

$u_3 = 0$

なり、そのときの効率値は0.980となる

(1未満なので非効率）

学部長への報告と学部長の反応

- 教員:「学科Bが非効率と出ましたよ！」
- 学部長:「．．．」
- 教員:「学部再編を機に学科Bは統合整理してしまってはどうでしょう．．．」
- 学部長:「うーん．．．そんな否定的な結論ではなく、どうしたら学科Bを他学科のような『効率的な』学科に変えられそうか、もっと建設的な改善の指針のようなものがほしいんだよ。改善への指針のようなものを見せながら、学科Bに改革を迫りたいもんだね。．．．」

学科Bの改善プラン．．．？

- 任意の線形計画問題には、双対問題と呼ばれる「対応する対」の問題が存在する
- 主問題と双対問題の間には、双対定理に代表される深い関係がある
  - たとえば、主問題に（有限な）最適解があるときには、双対問題にも最適解が存在し、それらの最適目的関数値は一致する
- 双対問題を考えることによって、改善プランのアイディアが見えてこないか．．．？

双対性

双対問題(D)の変数は主問題(P)の制約に対応

$$
\text{(P)}\quad \max \quad z = \underbrace{c_1 x_1 + c_2 x_2}_{c^{\mathrm{T}}}
$$

$$
\text{s.t.}\quad \underbrace{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{array}}_{A} \begin{array}{c} \leqq \\ \leqq \\ \leqq \end{array} \underbrace{\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}}_{b} \qquad \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}
$$

$$
x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0
$$

$$
\text{(D)}\quad \min \quad w = \underbrace{b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3}_{b^{\mathrm{T}}}
$$

$$
\text{s.t.}\quad \underbrace{\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \end{array}}_{A^{\mathrm{T}}} \begin{array}{c} \geqq \\ \geqq \end{array} \underbrace{\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array}}_{c}
$$

$$
y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0
$$

線形計画問題の形

学科Bを評価対象とする場合

最大化 $25u_1 + 7u_2 + 20u_3$ **（学科Bの出力）**

制約条件

θ $24v_1 + 30v_2 = 1$ **（学科Bの入力は1に固定）**

λ_A $-10v_1 - 15v_2 + 20u_1 + 3.25u_2 + 10u_3 \leq 0$

（学科Aの出力は入力以下）

λ_B $-24v_1 - 30v_2 + 25u_1 + 7u_2 + 20u_3 \leq 0$

（学科Bの出力は入力以下）

λ_C $-21v_1 - 24v_2 + 20u_1 + 6u_2 + 26u_3 \leq 0$

（学科Cの出力は入力以下）

双対変数

$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \geq 0$ **（各ウェイトは0以上）**

ラグランジュ緩和による双対問題の導出1（学科B）

最大化

$$w = 25u_1 + 7u_2 + 20u_3 + \theta\left(1 - 24v_1 - 30v_2\right) +$$
$$\lambda_A\left(10v_1 + 15v_2 - 20u_1 - 3.25u_2 - 10u_3\right) +$$
$$\lambda_B\left(24v_1 + 30v_2 - 25u_1 - 7u_2 - 20u_3\right) +$$
$$\lambda_C\left(21v_1 + 24v_2 - 20u_1 - 6u_2 - 26u_3\right)$$

制約条件

$$24v_1 + 30v_2 = 1$$
$$-10v_1 - 15v_2 + 20u_1 + 3.25u_2 + 10u_3 \le 0$$
$$-24v_1 - 30v_2 + 25u_1 + 7u_2 + 20u_3 \le 0$$
$$-21v_1 - 24v_2 + 20u_1 + 6u_2 + 26u_3 \le 0$$

$$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \ge 0$$

この問題は、主問題の上界値を与える

ラグランジュ緩和による双対問題の導出2（学科B）

最大化

$$w = \theta + (10\lambda_A + 24\lambda_B + 21\lambda_C - 24\theta)v_1 +$$
$$(15\lambda_A + 30\lambda_B + 24\lambda_C - 30\theta)v_2 +$$
$$\left(-20\lambda_A - 25\lambda_B - 20\lambda_C + 25\right)u_1 +$$
$$\left(-3.25\lambda_A - 7\lambda_B - 6\lambda_C + 7\right)u_2 +$$
$$\left(-10\lambda_A - 20v_2 - 26u_1 + 20\right)u_3$$

制約条件

$$24v_1 + 30v_2 = 1$$
$$-10v_1 - 15v_2 + 20u_1 + 3.25u_2 + 10u_3 \le 0$$
$$-24v_1 - 30v_2 + 25u_1 + 7u_2 + 20u_3 \le 0$$
$$-21v_1 - 24v_2 + 20u_1 + 6u_2 + 26u_3 \le 0$$

$$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \ge 0$$

この問題は、主問題の上界値を与える（目的関数のくくり方を変えただけ）

ラグランジュ緩和による双対問題の導出3（学科B）

最大化

$$w = \theta + (10\lambda_A + 24\lambda_B + 21\lambda_C - 24\theta)v_1 +$$
$$(15\lambda_A + 30\lambda_B + 24\lambda_C - 30\theta)v_2 +$$
$$(-20\lambda_A - 25\lambda_B - 20\lambda_C + 25)u_1 +$$
$$(-3.25\lambda_A - 7\lambda_B - 6\lambda_C + 7)u_2 +$$
$$(-10\lambda_A - 20v_2 - 26u_1 + 20)u_3$$

制約条件

$$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \geq 0$$

この問題は、主問題の上界値を与える（主問題の制約条件の緩和）

上界値が∞に発散しないためには、カッコ内がすべて非正であればよい

ラグランジュ緩和による双対問題の導出4（学科B）

最小化　$w=\theta$

制約条件

$$10\lambda_A+24\lambda_B+21\lambda_C-24\theta\le 0$$

$$5\lambda_A+30\lambda_B+24\lambda_C-30\theta\le 0$$

$$-20\lambda_A-25\lambda_B-20\lambda_C+25\le 0$$

$$-3.25\lambda_A-7\lambda_B-6\lambda_C+7\le 0$$

$$-10\lambda_A-20\lambda_B-26\lambda_C+20\le 0$$

$$\lambda_A,\lambda_B,\lambda_C\ge 0$$

学科Bの効率性を評価する問題の双対問題

入力の縮小は最大限に

合成学科の入力は学科Bの入力をθ倍(縮小)したもの以下

最小化　　θ

制約条件

$$\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}\lambda_A+\begin{pmatrix}24\\30\end{pmatrix}\lambda_B+\begin{pmatrix}21\\24\end{pmatrix}\lambda_C\le\begin{pmatrix}24\\30\end{pmatrix}\theta$$

入力

$$\begin{pmatrix}20\\3.25\\10\end{pmatrix}\lambda_A+\begin{pmatrix}25\\7\\20\end{pmatrix}\lambda_B+\begin{pmatrix}20\\6\\26\end{pmatrix}\lambda_C\ge\begin{pmatrix}25\\7\\20\end{pmatrix}$$

出力

$$\lambda_A,\lambda_B,\lambda_C\ge 0$$

学科Bの改善目標となる「合成」学科を考えよう

学科B以下の入力で学科B以上の出力

現存の3学科をλで重みづけた「合成」学科を構成

合成学科の出力は学科Bの出力を保証

線形計画問題の形(行列表現)

学科Bを評価対象とする場合

最大化 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 & 7 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ (学科Bの出力)

制約条件

$$\begin{pmatrix} \boxed{24 \quad 30 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ -10 & -15 & 20 & 3.25 & 10 \\ -24 & -30 & 25 & 7 & 20 \\ -21 & -24 & 20 & 6 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ \leq \\ \leq \\ \leq \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(学科Bの入力は1に固定)

(学科Aの出力は入力以下)

(学科Bの出力は入力以下)

(学科Cの出力は入力以下)

$$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \geq 0$$

(各ウェイトは0以上)

線形計画問題の形（行列表現）：双対問題

- 学科Bの改善目標となる「合成」学科を考えよう
- 合成学科の入力は学科Bの（θ倍）以下の入力
- で学科B以上の出力

最小化

$$w = \begin{pmatrix}\theta & \lambda_A & \lambda_B & \lambda_C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

（合成学科の入力を最小に）

制約条件

$$\begin{pmatrix}\theta & \lambda_A & \lambda_B & \lambda_C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24 & 30 & 0 & 0 & 0\\ -10 & -15 & 20 & 3.25 & 10\\ -24 & -30 & 25 & 7 & 20\\ -21 & -24 & 20 & 6 & 26\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}0 & 0 & 25 & 7 & 20\end{pmatrix}$$

（合成学科の入力は学科Bの入力をθ倍（縮小）したもの以下）

合成学科の出力は学科Bの出力を保証

$$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \geq 0$$

（各ウェイトは0以上）

ソルバーの結果

- 双対問題：学科Bの出力を保証しながら、学科Bの入力を最大限縮小する、効率的な「合成」学科を作れ

												0.980392
学科	θ	A	B	C								評価対象B
	0.980392	0.705882	0	0.784314	0	0	4.803922	0	7.45098			
入力1	24	−10	−24	−21	−1					0	=	0
入力2	30	−15	−30	−24		−1				0	=	0
出力1		20	25	20			−1			25	=	25
出力2		3.25	7	6				−1		7	=	7
出力3		10	20	26					−1	20	=	20

$$\lambda_A = 0.706$$

$$\lambda_B = 0$$　としたときに、θは最小になり、そのとき

$$\lambda_C = 0.784$$

のθの値は0.980となる

学科活動の合成

- 双対問題を解いた結果から、学科Aの活動を0.706倍したものと、学科Cの活動を0.784倍したものを足し合わせる活動を学科Bの改善と考えるとよい

合成学科の入力

$$\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}\lambda_A+\begin{pmatrix}24\\30\end{pmatrix}\lambda_B+\begin{pmatrix}21\\24\end{pmatrix}\lambda_C=\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}0.706+\begin{pmatrix}21\\24\end{pmatrix}0.784=\boxed{\begin{pmatrix}23.529\\29.412\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}24\\30\end{pmatrix}\theta=\begin{pmatrix}24\\30\end{pmatrix}0.980$$

$$\begin{pmatrix}20\\3.25\\10\end{pmatrix}\lambda_A+\begin{pmatrix}25\\7\\20\end{pmatrix}\lambda_B+\begin{pmatrix}20\\6\\26\end{pmatrix}\lambda_C=\begin{pmatrix}20\\3.25\\10\end{pmatrix}0.706+\begin{pmatrix}20\\6\\26\end{pmatrix}0.784=\boxed{\begin{pmatrix}29.804\\7\\27.451\end{pmatrix}}\geq\begin{pmatrix}25\\7\\20\end{pmatrix}$$

合成学科の出力

学科活動の合成

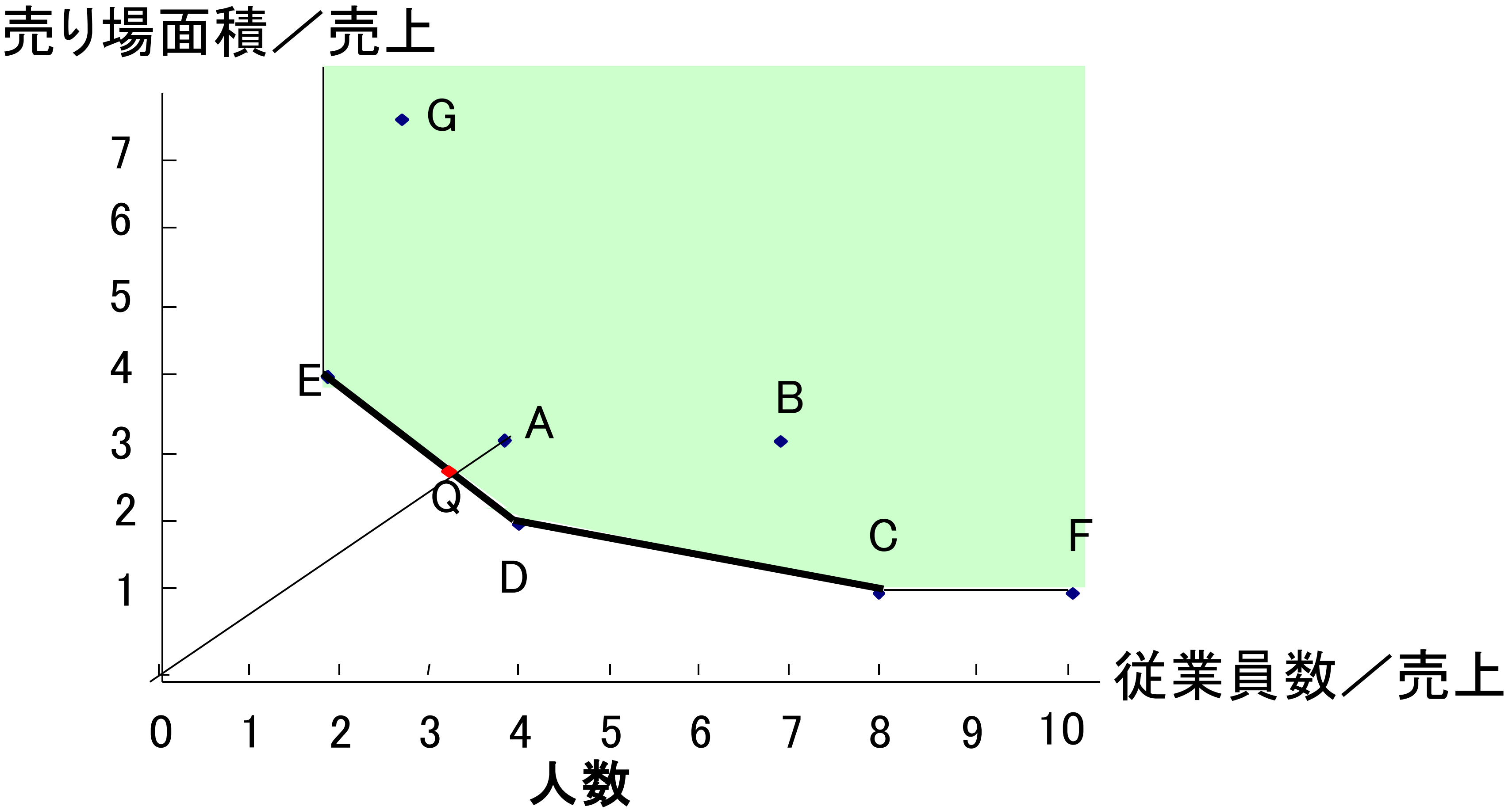
- 学科AとCの合成活動

$$\begin{pmatrix} 23.529 \\ 29.412 \\ 29.804 \\ 7 \\ 27.451 \end{pmatrix}$$ は、学科Bの入力 $\begin{pmatrix} 24 \\ 30 \end{pmatrix}$ の0.980倍で各出力項目

とも、学科Bの出力以上を達成できる

学科Bの改善目標: 学科Bの入力を0.980倍に縮小し、各出力項目を「Aの0.706倍＋Cの0.784倍」の和にしてやれば効率的になる

非効率な活動の改善：図解

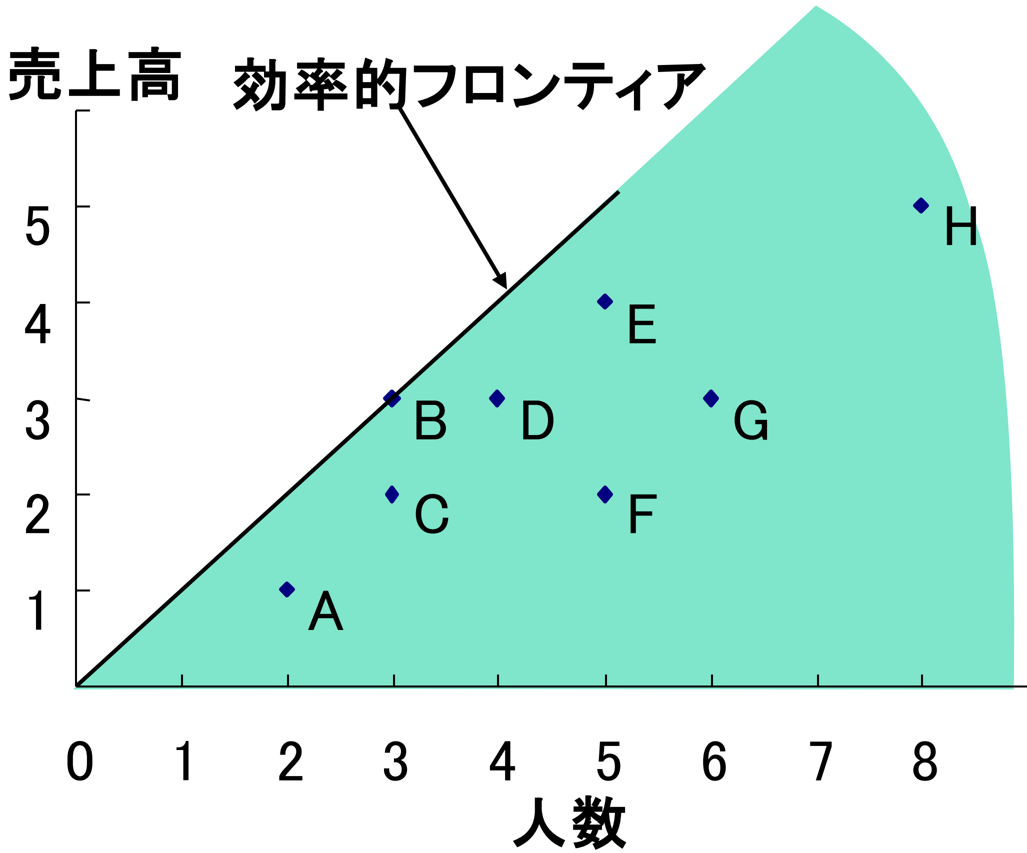


DEAの基本モデルと双対問題

- 評価の対象となる事業体にもっとも都合のよいウェイトを入出力項目につける
  - 入力につけるウェイト $v_r(r=1,\ldots,m)$ →変数
  - 出力につけるウェイト $u_i(i=1,\ldots,s)$ →変数
- 線形計画：主問題
  目的関数　評価対象の出力最大化
  制約条件　評価対象の入力＝1
- ウェイトv_r、ウェイトu_iによる仮想的入力と仮想的出力の比をすべての活動に対して1以下に
- 線形計画：双対問題
- 評価対象の出力の上界を最小化（出力を縮小）
- 各事業体の活動を合成⇒小さな入力で大きな出力

どういう「活動」が許されるのか？
CCR(Charnes-Cooper-Rhodes)モデルの「生産可能集合」

- 生産可能集合Pに含まれる活動
  - 各事業体の活動そのもの
  - 各事業体の活動を非負定数倍した活動（「伸び縮み自由」）
  - 各事業体の活動を非負定数倍した活動の和に相当する活動（「足し算可」）
  - 上述の諸活動に対して、それより入力が大きい活動や出力が小さい活動



DEAソフトウェアの使用例

問題例(1)

- 区立図書館の効率性評価
- 入力項目:
  蔵書数、職員数
- 出力項目:
  登録者数、貸出冊数

区	入力		出力		効率値
	蔵書数（千冊）	職員数（人）	登録者数（千人）	貸出冊数（千冊）	D効率
千代田	163.523	26	5.561	105.321	0.226
中央	338.671	30	18.106	314.682	0.638
台東	281.655	51	16.498	542.349	0.540
荒川	400.993	78	30.810	847.872	0.593
港	363.116	69	57.279	758.704	0.911
文京	541.658	114	66.137	1438.746	0.745
墨田	508.141	61	35.295	839.597	0.650
渋谷	338.804	74	33.188	540.821	0.539
目黒	511.467	84	65.391	1562.274	0.897
豊島	393.815	68	41.197	978.117	0.705
新宿	509.682	96	47.032	930.437	0.539
中野	527.457	92	56.064	1345.185	0.719
品川	601.594	127	69.554	1164.801	0.638
北	528.799	96	37.467	1348.588	0.715
江東	394.158	77	57.727	1100.779	0.844
葛飾	515.624	101	46.160	1070.488	0.582
板橋	566.708	118	102.967	1707.645	1.000
江戸川	467.617	74	47.236	1223.026	0.787
杉並	768.484	103	84.510	2299.694	1.000
練馬	669.996	107	69.576	1901.465	0.849
足立	844.949	120	89.401	1909.698	0.787
大田	1258.981	242	97.941	3055.193	0.681
世田谷	1148.863	202	191.166	4096.300	1.000

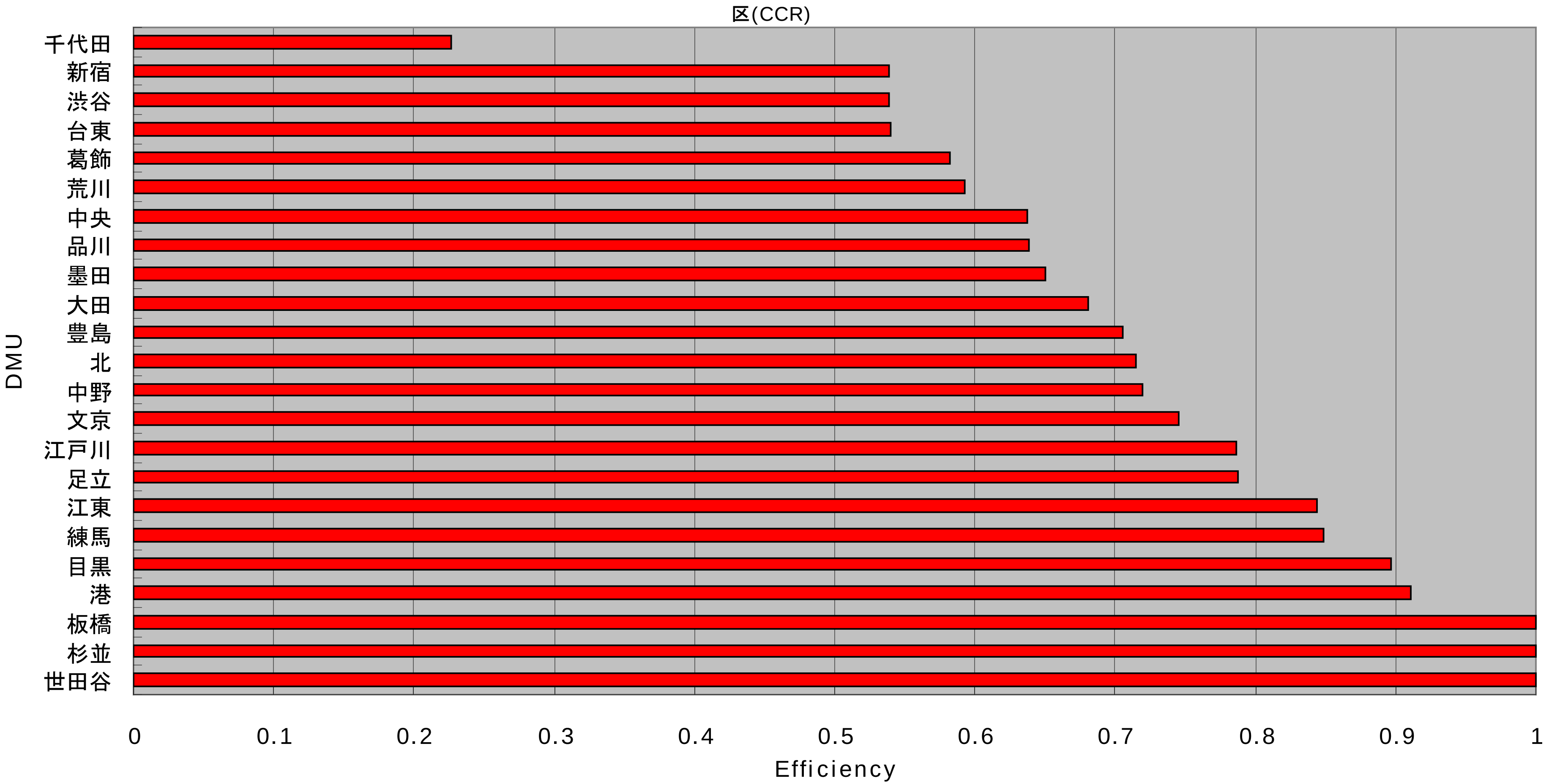
D効率値とウェイト

No.	DMU	Score		V(1)	V(2)		U(1)	U(2)
1	千代田	0.2260062		0	3.85E-02		4.06E-02	0
2	中央	0.6377375		0	3.33E-02		0.0352224	0
3	台東	0.5400548		3.55E-03	0		0	9.96E-04
4	荒川	0.5930209		2.49E-03	0		0	6.99E-04
5	港	0.9112849		1.33E-03	7.51E-03		1.59E-02	0
6	文京	0.7449643		1.85E-03	0		0	5.18E-04
7	墨田	0.6496709		0	1.64E-02		7.48E-03	4.59E-04
8	渋谷	0.5391304		2.95E-03	0		1.62E-02	0
9	目黒	0.8966427		6.63E-04	7.87E-03		0	5.74E-04
10	豊島	0.7051438		8.33E-04	9.88E-03		0	7.21E-04
11	新宿	0.5387076		1.96E-03	0		7.40E-03	2.05E-04
12	中野	0.7191553		6.17E-04	7.33E-03		0	5.35E-04
13	品川	0.6382843		1.66E-03	0		6.27E-03	1.74E-04
14	北	0.715262		1.89E-03	0		0	5.30E-04
15	江東	0.8440736		2.54E-03	0		9.57E-03	2.65E-04
16	葛飾	0.582271		1.94E-03	0		0	5.44E-04
17	板橋	1		1.38E-03	1.86E-03		7.89E-03	1.10E-04
18	江戸川	0.7867065		7.43E-04	8.82E-03		0	6.43E-04
19	杉並	1		2.87E-04	7.56E-03		1.89E-03	3.65E-04
20	練馬	0.8485716		5.15E-04	6.12E-03		0	4.46E-04
21	足立	0.7872304		0	8.33E-03		8.81E-03	0
22	大田	0.6806063		7.94E-04	0		0	2.23E-04
23	世田谷	1		7.04E-04	9.48E-04		4.03E-03	5.60E-05

各DMUの優位集合

No.	DMU	Score	Rank	Reference set (lambda)			
1	千代田	0.226006	23	世田谷	2.91E-02		
2	中央	0.637738	17	世田谷	9.47E-02		
3	台東	0.540055	20	世田谷	0.1324		
4	荒川	0.593021	18	世田谷	0.206985		
5	港	0.911285	4	板橋	0.255881	世田谷	0.161806
6	文京	0.744964	10	世田谷	0.351231		
7	墨田	0.649671	15	杉並	0.170405	世田谷	0.109298
8	渋谷	0.53913	21	板橋	0.322317		
9	目黒	0.896643	5	杉並	0.165519	世田谷	0.288463
10	豊島	0.705144	13	杉並	2.73E-02	世田谷	0.223462
11	新宿	0.538708	22	板橋	0.155121	世田谷	0.162475
12	中野	0.719155	11	杉並	1.66E-02	世田谷	0.31908
13	品川	0.638284	16	板橋	0.652843	世田谷	1.22E-02
14	北	0.715262	12	世田谷	0.329221		
15	江東	0.844074	7	板橋	0.273081	世田谷	0.154884
16	葛飾	0.582271	19	世田谷	0.26133		
17	板橋	1	1	板橋	1		
18	江戸川	0.786707	9	杉並	0.201315	世田谷	0.185549
19	杉並	1	1	杉並	1		
20	練馬	0.848572	6	杉並	0.2854	世田谷	0.303965
21	足立	0.78723	8	世田谷	0.467662		
22	大田	0.680606	14	世田谷	0.745842		
23	世田谷	1	1	世田谷	1		

問題例(1)のD効率値グラフ



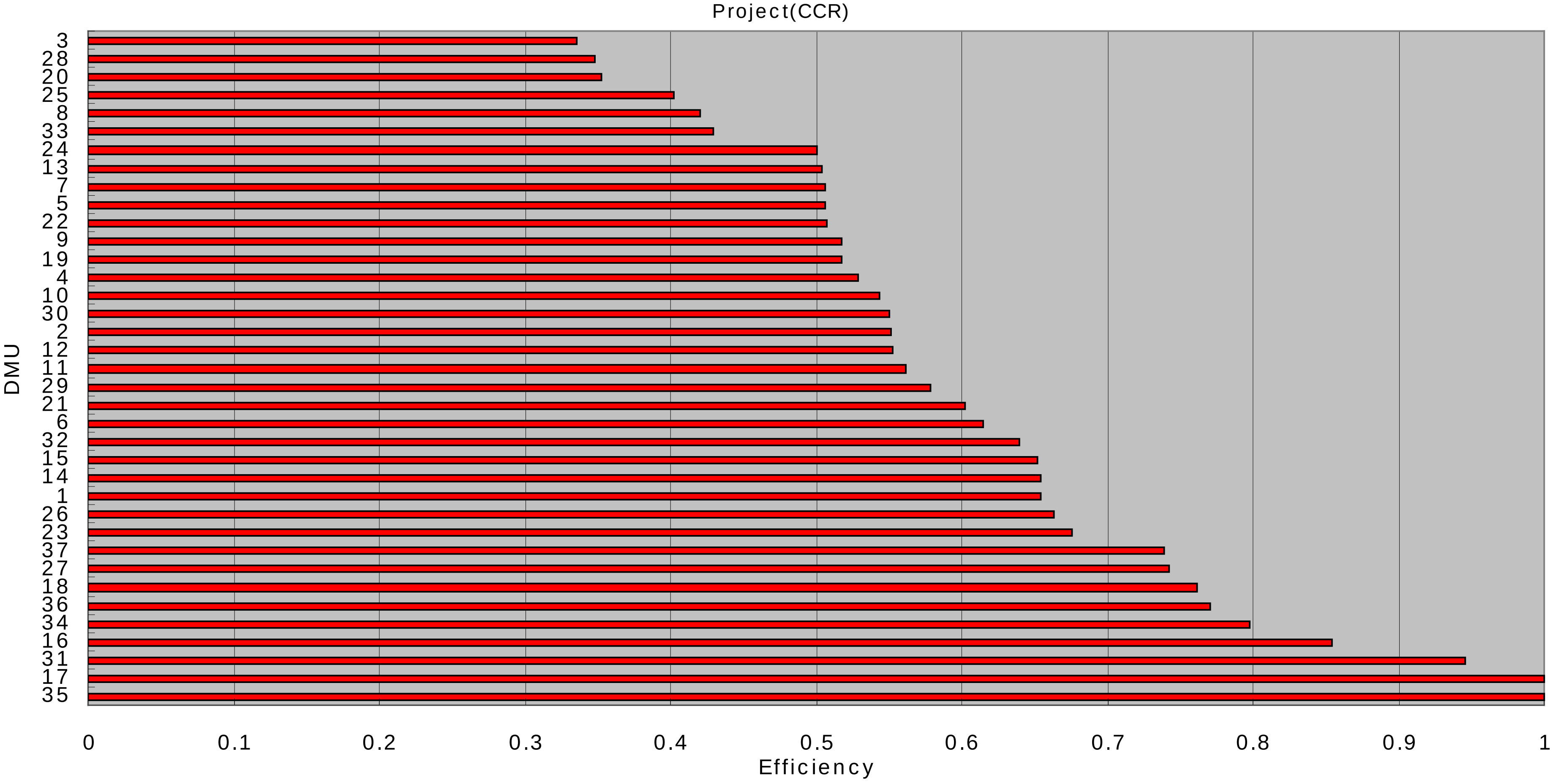
効率値の計算（DEAソフトウェア）

- 一般の数理計画ソフトウェアでも計算可能
- 専用のDEAソフトウェアも存在

No.	DMU	Score	Excess Project Cost S-(1)	Shortage Indirect economic contribution S+(1)	Shortage Direct economic contribution S+(2)	Shortage Technical contribution S+(3)	Shortage Social contribution S+(4)	Shortage Scientific contribution S+(5)
1	1	0.6542938	0	4.2963298	0	8.3308705	0	16.109748
2	2	0.5511647	0	5.492062	0	7.1391874	0	11.432465
3	3	0.3360354	0	0	3.0472353	14.189241	0	12.153596
4	4	0.528304	0	0	1.9052614	21.763274	0	17.667104
5	5	0.5064152	0	0.6618036	0	14.760979	0	17.630061
…								
36	36	0.7708268	0	4.7496386	0	0.1690788	2.9870354	0
37	37	0.7391462	0	8.6008035	0	12.377212	0	15.357233

Cooper, W. W., Seiford, L. M., and Tone, K, *Data Envelopment Analysis,* Kluwer Academic Publishers, 2000.

その他のアウトプット



Project(CCR)
DMU
3
28
20
25
8
33
24
13
7
5
22
9
19
4
10
30
2
12
11
29
21
6
32
15
14
1
26
23
37
27
18
36
34
16
31
17
35
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Efficiency

まとめ

- 1入力、1または2出力：効率的フロンティア
- 2入力、1出力：優位集合
- 多入力・多出力を有する事業体・プロジェクトなどに対する、多様性を生かした評価技法として、DEA（包絡分析法）がある
  - 可変ウェイトによる仮想的入力・出力の計算
  - 仮想的出力／仮想的入力 ＝ D効率値 ＜ 1 → D非効率
- 「最適ウェイト」を求める線形計画問題の双対問題の最適解から、DEAは単に効率評価を下すだけでなく、非効率的と判断された事業体に対する改善の一方策を示すこともできる

まとめ

- DEA（包絡分析法）: 与えられた多入力*m*, 多出力*s*を有する*n*個の事業体の評価⇒これらをどう組み合わせて評価するか、ウエイトの与え方を決める（決定変数）
  - **線形計画**: 最大化: 第*k*事業体の効率値 （< 1なら非効率）
  - 制約条件: 各事業体の出力≦入力
  - 第*k*事業体が非効率の時、効率値が1になる事業体が目標
- 各事業体の活動を合成することにより、改善を図る
- できるだけ小さい入力で、これまでの出力を得る
- 各事業体の活動への重み（双対問題の決定変数）
  - **双対問題**: 最小化: θ=合成事業体の入力の上界（縮小）
  - 合成事業体の出力≧評価対象の第*k*事業体の出力
  - θ× 第*k*事業体の入力≧合成事業体の入力

主な参考文献

刀根薫、「経営効率性の測定と改善－包絡分析法DEAによる－」、日科技連出版社、1993.

刀根薫、上田徹監訳、「経営効率評価ハンドブック－包絡分析法の理論と応用－」、朝倉書店、2000.

Cooper, W. W., Seiford, L. M., and Tone, K, *Data Envelopment Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

演習2.6線形計画問題による定式化

店舗Aを評価対象とする場合

最大化 u_1 （店舗Aの出力）

制約条件

θ $4v_1 + 3v_2 = 1$ （店舗Aの入力は1に固定）

λ_A $-4v_1 - 3v_2 + u_1 \leq 0$ （店舗Aの出力は入力以下）

λ_B $-7v_1 - 3v_2 + u_1 \leq 0$ （店舗Bの出力は入力以下）

λ_C $-8v_1 - v_2 + u_1 \leq 0$ （店舗Cの出力は入力以下）

$-4v_1 - 2v_2 + u_1 \leq 0$ （店舗Dの出力は入力以下）

$-2v_1 - 4v_2 + u_1 \leq 0$ （店舗Eの出力は入力以下）

$-9v_1 - v_2 + u_1 \leq 0$ （店舗Fの出力は入力以下）

双対変数

$u_1, v_1, v_2 \geq 0$ （各ウェイトは0以上）

演習2.6 双対問題

最小化　$w=\theta$

制約条件

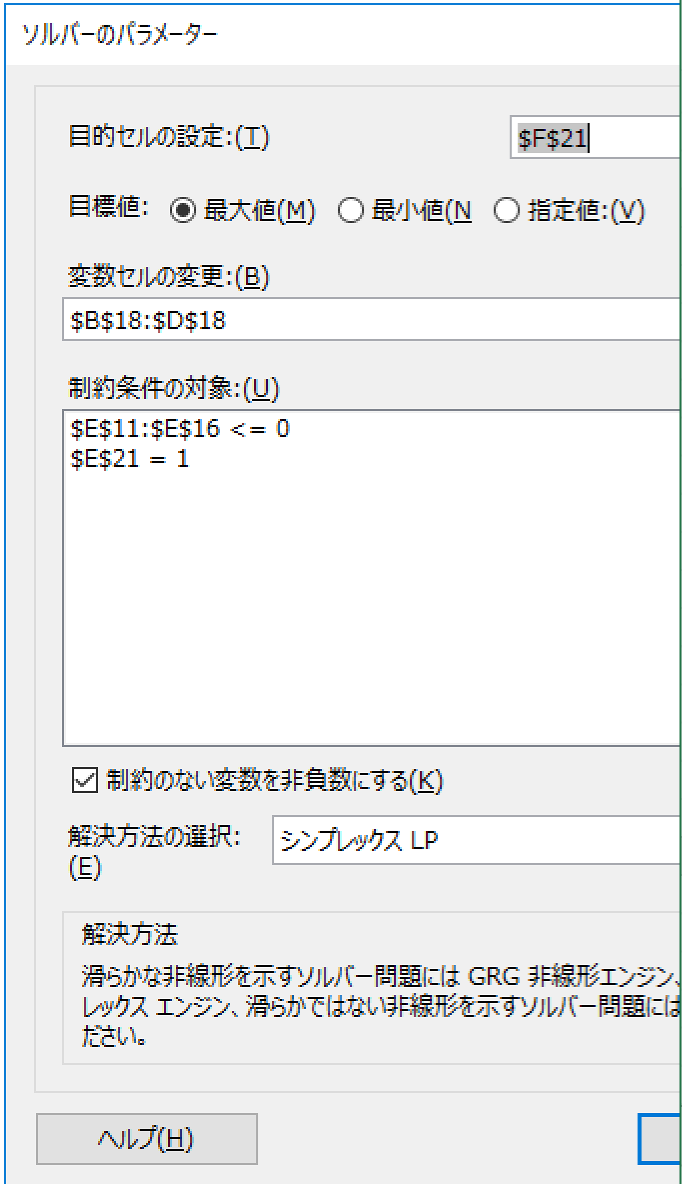
$$-4\lambda_A-7\lambda_B-8\lambda_C-4\lambda_D-2\lambda_E-9\lambda_F+4\theta\geq 0$$

$$-3\lambda_A-3\lambda_B-1\lambda_C-2\lambda_D-4\lambda_E-1\lambda_F+3\theta\geq 0$$

$$\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C+\lambda_D+\lambda_E+\lambda_F\geq 0$$

$$\lambda_A,\lambda_B,\lambda_C,\lambda_D,\lambda_E,\lambda_F\geq 1$$

EXCELデータ



	A	B	C	D	E	F	G
1	練習2．6						
2							
3		店員数	売り場面積	売り上げ			
4	店舗A	4	3	1			
5	店舗B	7	3	1			
6	店舗C	8	1	1			
7	店舗D	4	2	1			
8	店舗E	2	4	1			
9	店舗F	9	1	1			
10							
11	店舗A	−4	−3	1		≦	0
12	店舗B	−7	−3	1		≦	0
13	店舗C	−8	−1	1		≦	0
14	店舗D	−4	−2	1		≦	0
15	店舗E	−2	−4	1		≦	0
16	店舗F	−9	−1	1		≦	0
17							
18	ウェイト						
19							
20	店舗名	D効率値	目標店舗		総合入力	総合出力	効率値
21	店舗A						
22	店舗B						
23	店舗C						
24	店舗D						
25	店舗E						
26	店舗F						
27							

実行手順

１．入力項目の符号を反転する（セルB11:C16)
２．効率値が1以下という制約条件を入力する：ウェイトベクトルと入出力項目との積和（の符号を反転したもの）を計算し、セルE16までコピーする
（セルE11)=SUMPRODUCT(B11:D11,$B$18:$D$18)
３．店舗Ａの総合入力値を計算し、E26までコピーする
（セルE21）＝－SUMPRODUCT($B$18:$C$18,B11:C11)
制約式の(－総合入力＋総合出力≦0)に対応して符号がマイナスになっていることに注意
３´店舗Ａの総合出力値を計算し、E26までコピーする
（セルE21）=SUMPRODUCT(D11,$D$18)
４．ソルバーを６回動かす

実行手順

最初、店舗Aについて:

・目的セルは「$F$21」目標値は「最大値」

・変化させるセルは「$B$18:$D$18」

・制約条件は「$E$11:$E$16 <= 0」と「$E$21 = 1」

（線形制約、非負条件のオプション指定を忘れずに）

結果が出たら、セルF21をセルB21に「値コピーペースト」する

D効率値が1でない場合は、不等式制約で（誤差の範囲で）等号になっている店舗名を「目標店舗」の欄に書き出す。次いで店舗Bのモデルを計算するには

　・目的セルは「$F$22」

　・制約条件の「$E$21 = 1」を選んで「変更」ボタンを押し、「$E$22 = 1」に

以下同様。