「基礎OR」／「OR演習」
第3回

2017/10/17

「基礎OR」／「OR演習」講義、演習全般について

- OR,数理計画は経営工学(ほかの工学でも)基本中の基本的な数理手法
- 必ずマスターしてほしい
- 私語は禁止、他の学生に迷惑
- 余裕のある人は参考文献を読むこと
- さらに、発展的な書物もフリーでダウンロード可能(Springer社はほぼすべて, Wileyの一部)

「基礎OR」／「OR演習」
第2回の内容

- 退化・巡回と単体法の有限収束性
- コンピュータ出力と単体表の情報との関係
- 「双対問題」の導出
- 双対定理（弱双対定理、強双対定理、相補性定理）
- （時間があれば）前回宿題に関連して
  - 鉄鉱石配合問題の$\Sigma_j x_j = 1$の双対価格の解釈

単体法計算のチェックリスト

- 右辺定数（目的関数値を除く）が非負か？
  （右辺定数が負はおかしい）
- 単位行列が隠れているか？
- 目的関数値が改善されているか？
  （「退化」（後で解説）していなければ，単調に改善していくはず；改悪はありえない）

- 上の3点すべてがYesでなくてはならない

前回（第2回）学んだ基本概念／基本用語（その1）

- 単体表、単体法
- 基底解、（実行）可能基底解(bfs)
- 非基底変数、基底変数
- 基底形式、可能基底形式
- 軸の列、軸の行、軸
- 軸演算（掃き出し演算）
- 被約費用（限界コスト）
- 潜在価格（双対価格）

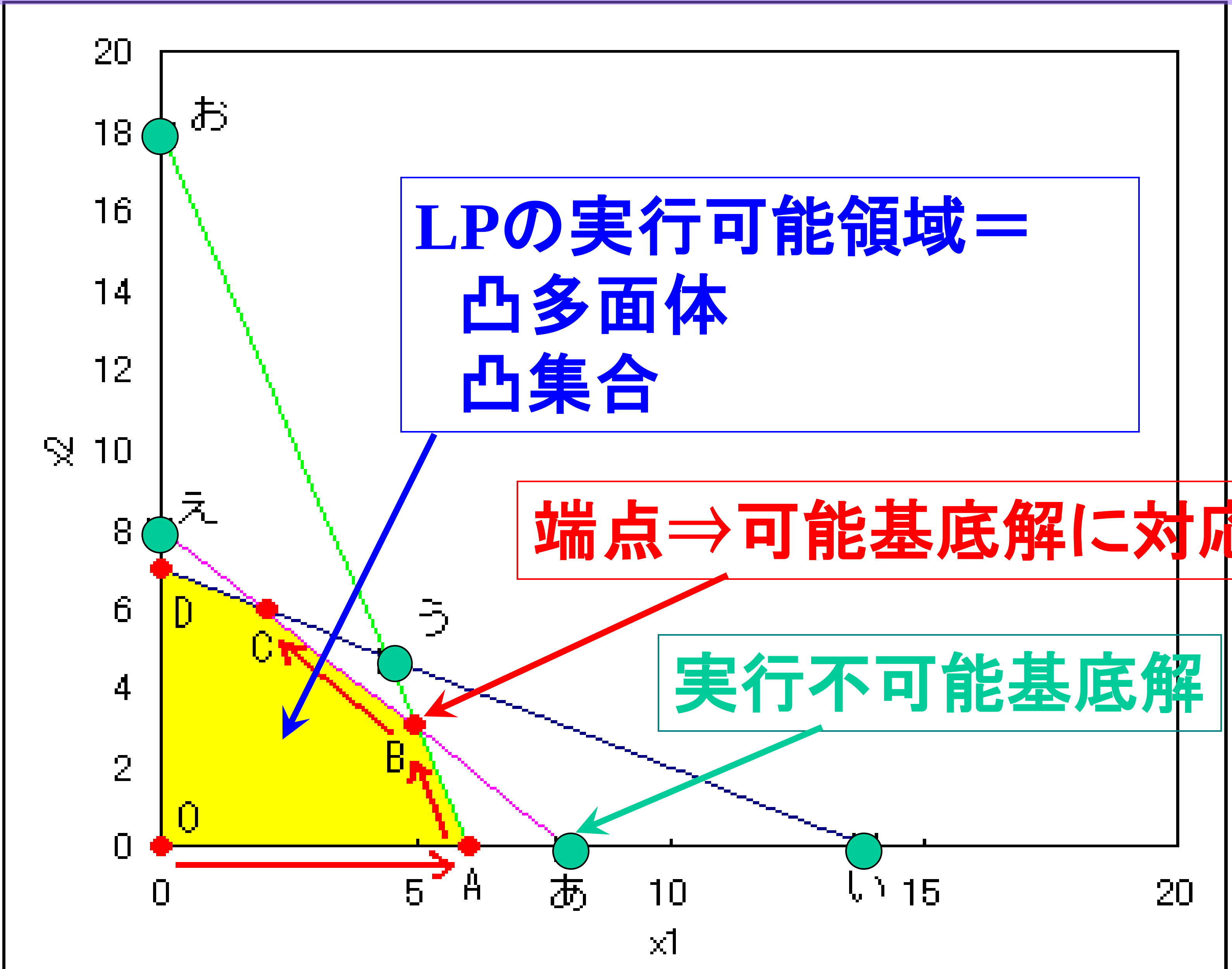
前回（第2回）学んだ基本概念／基本用語（その2）

- 実行可能領域（許容領域）、端点（頂点）
- 隣接する端点
- 無限解
- 実行不可能
- 二段階単体法（第一段階，Phase I；第二段階，Phase II）
- 人工変数，スラック変数（余裕変数）

今日（第3回）学ぶ
基本概念／基本用語

- 退化
- 巡回
- 単体法の有限収束性
- 双対問題
- ラグランジュ緩和による双対問題の導出
- 双対定理（弱双対定理，強双対定理）
- 相補性定理

線形計画問題の可能領域



退化、巡回
単体法の有限収束性

練習1・2〇、45ページ

No.0（色の濃い列・行を軸の列・軸の行として計算すること）

変数								
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	θ
1	-4	-1	0	0	0	0	z	―
0	1	2	1	0	0	16	x_3	16/2
0	1	1	0	1	0	8	x_4	8/1
0	3	1	0	0	1	18	x_5	18/1

No.1

変数								
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	θ
1	-7/2	0	1/2	0	0	8	z	―
0	1/2	1	1/2	0	0	8	x_2	16
0	1/2	0	-1/2	1	0	0	x_4	0
0	5/2	0	-1/2	0	1	10	x_5	4

No.2

変数								
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	θ
1	0	0	-3	7	0	8	z	―
0	0	1	1	-1	0	8	x_2	8
0	1	0	-1	2	0	0	x_1	―
0	0	0	2	-5	1	10	x_5	5

退化と巡回

- 退化

  No.1やNo.2の単体表のように、（可能）基底解において、基底変数の値が0になること

（退化はよく起こる）

- 巡回

  退化を起こしている場合に、一度使われた基底集合が再び出現し、以後その同じ基底変換が無限に繰り返される現象

巡回（Cycling）

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
(a)	z	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6
	x_1	0	1	0	0	[$\frac{1}{4}$]	-8	-1	9
	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
(b)	z	0	-3	0	0	0	4	$\frac{7}{2}$	-33
	x_4	0	4	0	0	1	-32	-4	36
	x_2	0	-2	1	0	0	[4]	$\frac{3}{2}$	-15
	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
(c)	z	0	-1	-1	0	0	0	2	-18
	x_4	0	$-\frac{1}{2}$	8	0	1	0	[8]	-84
	x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$
	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
(d)	z	0	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3
	x_6	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$
	x_5	0	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{64}$	1	0	[$\frac{3}{16}$]
	x_3	1	$\frac{3}{2}$	1	1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$
(e)	z	0	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	-16	0	0
	x_6	0	[2]	-6	0	$\frac{5}{2}$	56	1	0
	x_7	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1
	x_3	1	-2	6	1	$\frac{5}{2}$	-56	0	0
(f)	z	0	0	2	0	$\frac{7}{4}$	-44	$-\frac{1}{2}$	0
	x_1	0	1	-3	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0
	x_7	0	0	[$\frac{1}{3}$]	0	$\frac{1}{6}$	-4	$-\frac{1}{6}$	1
	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
(g)	z	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6
	x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9
	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0

巡回を起こさない軸の選択方法（Blandの軸選択規則，p.47）

- 退化が発生する場合に巡回が起きるか起きないかは、軸の選択規則に依存
- 可能基底解が退化していても、巡回を起こさないことが保証される軸選択規則が存在
- Blandの軸選択規則
  - （目的関数値改善の度合いは考えずに）改善を示す、列番号最小の列を軸の列に選択
  - 軸の行には基底変数が対応しているが、「比の値」にタイが生じた場合、対応する基底変数の添字番号が最小となる行を軸の行に選択

Blandの軸選択規則の適用

(c)	z	0	-1	-1	0	0	0	2	-18
	x_4	0	-12	8	0	1	0	[8]	-84
	x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$
	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
(d)	z	0	2	-3	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	3
	x_6	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$
	x_5	0	[$\frac{1}{16}$]	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$
	x_3	1	$\frac{3}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$
(e)	z	0	0	1	0	$\frac{5}{4}$	-32	0	-3
	x_6	0	0	-2	0	-1	24	1	-6
	x_1	0	1	-2	0	$-\frac{3}{4}$	16	0	3
	x_3	1	0	[2]	1	1	-24	0	6
(f)	z	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-20	0	-6
	x_6	1	0	0	1	0	0	1	0
	x_1	1	1	0	1	$\frac{1}{4}$	-8	0	9
	x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	[$\frac{1}{2}$]	-12	0	3
(g)	z	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$
	x_6	1	0	0	1	0	0	1	0
	x_1	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$
	x_4	1	0	2	1	1	-24	0	6

最適

定理1　単体法の有限収束性

- 「非退化」の仮定の下での簡易証明

１）可能基底解の選び方は明らかに有限個しかない（変数n個、制約m本では、異なる可能基底解の個数は高々 ${}_nC_m$ 個で抑えられる）

２）非退化の仮定の下では、反復（＝軸演算）毎に目的関数値が改善する

３）よって同じ可能基底解が繰り返されることはなく、有限回の反復の後、単体法は終了する

コンピュータ結果出力の情報と（最適）単体表との関係

限界コスト（被約費用）：

最適解において0となる変数（生産しない製品）を微小量増やしたときの目的関数値の変化の割合

潜在価格（双対価格）：

右辺定数（資源量など）が微小量変動した時の目的関数の変化の割合

（最適）単体表に現れている！

コンピュータ結果出力の情報と（最適）単体表との関係

- 被約費用、限界コスト(reduced cost)＝
  第0行（目的関数行）の係数

（基底形式では、目的関数は非基底変数の項からなるため）

- 潜在価格(shadow price)、双対価格（dual price）、単体乗数（simplex multiplier）＝
  第0行（目的関数行）の初期基底変数（スラック変数）の目的関数の係数

（いずれも、単体表の書き方やソフトによっては符号が逆転している可能性があるので、意味を考えること）

限界コスト(＝被約費用)
潜在価格(＝双対価格)

単位当たり利益	2	3	4			
	製品1生産量	製品2生産量	製品3生産量			利益
	2	6	0			22
	製品1	製品2	製品3	資源使用量	≦	資源保有量
鉄鋼	1	2	3	14	≦	14
電力	1	1	2	8	≦	8
労働力	3	1	2	12	≦	18

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数項	基底変数	
0行	1	0	0	1	1	1	0	22	z	利益
1行	0	0	1	0	1	-1	0	6	x_2	鉄鋼
2行	0	1	0	1	-1	2	0	2	x_1	電力
3行	0	0	0	-2	2	-5	1	6	x_6	労働力

Microsoft Excel 14.0 感度レポート
ワークシート名: [exercise1(鉄鋼電力労働力).xls]2製品(鉄鋼電力労働力)
レポート作成日: 2016/10/01 18:49:12

変数セル

セル	名前	最終値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$B$5	生産量 x1	2	0	2	1	0.5
$C$5	生産量 x2	6	0	3	1	1
$D$5	生産量 x3	0	−1	4	1	1E+30

制約条件

セル	名前	最終値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$E$7	鉄鋼 z	14	1	14	2	3
$E$8	電力 z	8	1	8	1.2	1
$E$9	労働力 z	12	0	18	1E+30	6

被約費用と潜在価格

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数項	基底変数	
0行	1	0	0	1	1	1	0	22	z	利益
1行	0	0	1	0	1	-1	0	6	x_2	鉄鋼
2行	0	1	0	1	-1	2	0	2	x_1	電力
3行	0	0	0	-2	2	-5	1	6	x_6	労働力

- 目的関数　$z=22-x3-x4-x5$
- 鉄鋼の上限が14から(14+ε)に増加する場合，鉄鋼の余剰は最小で(－ε)となってもよい
- $z=22-x3-1\times(x4-\varepsilon)-x5$ スラック変数は$(x4-\varepsilon)$と置換

  $=22+1\times\varepsilon-x3-x4-x5$
- (ー1)×（スラック変数の被約費用）＝スラック変数に対応する制約条件（鉄鋼の制約）の潜在価格（右辺が変わることは、スラック変数の値が変わることなので、潜在価格はスラックの被約費用）

「双対問題」の導出
（そうつい）

1)ラグランジュ緩和による導出
2)式の足し合わせによる導出(テキストを読むこと)
3)機械的（公式的）な導出

primal（主） ⇔dual（対になる）

absolute（絶対）⇔relative（相対）

ラグランジュ緩和による双対問題の導出 一般の場合（1）P.60

（P）　最大化　$z=4x1-2x2$

制約　$2x1+3x2 \leqq 4$

$-5x1+x2=-5$

$x1-3x2 \geqq 3$

$x1 \geqq 0$

最大化（最小化）なら右開き（左開き）の不等式、または、等式に変換

（P'）　最大化　$z=4x1-2x2$

制約　$2x1+3x2 \leqq 4$

$-5x1+x2=-5$

$-x1+3x2 \leqq -3$

$x1 \geqq 0$（$x2$は符号条件無）

ラグランジュ緩和による双対問題の導出 一般の場合(2)

（P'） 最大化 $z=4x1-2x2$

制約 $2x1+3x2 \leqq 4$

$-5x1+x2=-5$

$-x1+3x2 \leqq -3$

$x1 \geqq 0$（$x2$は符号条件無）

ラグランジュ乗数

$y1$（$\geqq 0$）

$y2$（符号条件無）

$y3$（$\geqq 0$）

を考える

（Q） 最大化 $z=4x1-2x2+(4-2x1-3x2)y1$

$+(-5+5x1-x2)y2 \quad +(-3+x1-3x2)y3$

制約 $2x1+3x2 \leqq 4$

$-5x1+x2=-5$

$-x1+3x2 \leqq -3$

$x1 \geqq 0$（$x2$は符号条件無）

導出の方針： 上界値のなかで、なるべく小さな上界値をみつける

問題（Q）の最適（目的関数）値は、問題（P'）の最適値の上界値

ラグランジュ緩和による双対問題の導出 一般の場合(2)

問題(Q)の制約条件(符号条件を除く)を緩和

（R） 最大化 $z=4x1-2x2+(4-2x1-3x2)\,y1$
$+(-5+5x1-x2)y2 \quad +(-3+x1-3x2)y3$
制約 $x1 \geqq 0$（$x2$は符号条件無）

問題(R)の最適値は、問題(P')の最適値の上界値(∵制約を緩和)

問題(R)の目的関数xでまとめると:

（R'） 最大化 $z=4y1-5y2-3y3$
$+(4-2y1+5y2+y3)\,x1+(-2-3\,y1-y2-3y3)\,x2$
制約 $x1 \geqq 0$（$x2$は符号条件無）

ラグランジュ緩和による双対問題の導出 一般の場合(3)

（R’） $z=4y1-5y2-3y3$

$+(4-2y1+5y2+y3)\,x1+(-2-3y1-y2-3y3)\,x2$

制約　$x1 \geqq 0$（$x2$は符号条件無）

上界値としては、∞は無意味で、なるべく小さな方がよいので、$x1$の係数は非正、$x2$の係数は0としたい。最小の上界は $x1=x2=0$のもとで　$4y1-5y2-3y3$ をなるべく小さくしたいので:

（D） 最小化　$w=4y1-5y2-3y3$

制約　$2y1-5y2-y3 \geqq 4$

$3y1+y2+3y3=-2$

$y1,\ y3 \geqq 0$（$y2$は符号条件無）

問題（D）の最適値は、（P‘）、すなわち、（P）の上界値

双対問題の「機械的」作り方

1. 最大化（最小化）問題ならば、右開き（左開き）の不等式制約、または、等式制約の問題に変換する
2. 主問題が最大化（最小化）問題ならば、双対問題は最小化（最大化）問題にする
3. 基本的に、制約の行と列を入れかえる
4. 制約条件が不等式（等式）→対応する双対変数は非負条件あり（なし）
5. 変数に非負条件あり（なし）→対応する制約条件は不等式（不等式；不等号の向きは、最小化なら左開き、最大化なら右開き）

双対問題の「機械的」導出（1）

次の問題（P）の双対問題を示せ

（P） 最大化 $z=4x_1-2x_2$

制約
$$
\begin{aligned}
2x_1+3x_2 &\leqq 4\\
-5x_1+x_2 &= -5\\
x_1-3x_2 &\geqq 3\\
x_1 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

双対問題の「機械的」導出（2）

（P’） 最大化 $z=4x1 \quad -2x2$

制約

$$
\begin{array}{rrcrl}
2x1 & +3x2 & \leqq & 4 & y1 \geqq 0 \\
-5x1 & +x2 & = & -5 & y2 \\
-x1 & +3x2 & \leqq & -3 & y3 \geqq 0
\end{array}
$$

$x1 \geqq 0$ （$x2$は符号条件無）

（D） 最小化 $w=4y1-5y2-3y3$

制約

$$
\begin{array}{l}
2y1-5y2 \; -y3 \; \geqq 4 \\
3y1+ \; y2+3y3 \; =-2
\end{array}
$$

$y1, y3 \geqq 0$ （$y2$は符号条件無）

双対性と相補性

「主」問題と「双対」問題

（P）　max　$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqq b_1 \qquad y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqq b_2 \qquad y_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leqq b_3 \qquad y_3$$

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$$

双対変数は（P）の制約に対応

（D）　min　$w = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$

s.t.

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geqq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \geqq c_2$$

$$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$$

主問題のベクトル・行列表現

(P)　max　$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

s.t.

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leqq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leqq b_3 \end{aligned}}\; A$$

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(注)ベクトルは基本的には列ベクトルと仮定し，必要に応じて転置する

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

max　$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

s.t.　$A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$

双対問題のベクトル・行列表現

(D) min $w = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$

s.t.

$$\boxed{\begin{matrix} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \end{matrix}}_{A^T} \begin{matrix} \geqq c_1 \\ \geqq c_2 \end{matrix}$$

$$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

min $w = b^T y \quad (= y^T b)$

s.t. $A^T y \geqq c \quad (y^T A \geqq c^T)$

$y \geqq 0$

双対問題（対称型）

（P）　max　$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

subject to　$A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}$

（D）　min　$w = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$　$(w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})$

s.t.　$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A \geqq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$　$(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c})$

$\boldsymbol{y} \geqq \mathbf{0}$

双対問題の解釈1：生産計画

- 製造業者：製品1（x_1）と製品2（x_2）の生産計画（利益最大化）
- 製品1の利益2万円/単位, 製品2は3万円/単位
- 製品1を1単位生産するための原料（資源1は1kg, 資源2は1kg）
- 製品2を1単位生産するための原料（資源1は1kg, 資源2は2kg）
- 資源1は4kg,　資源2は6kgしか使えない

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 4 \\
& x_1 + 2x_2 \le 6 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & w = 4y_1 + 6y_2 \\
\text{subject to} \quad & y_1 + y_2 \ge 2 \\
& y_1 + 2y_2 \ge 3 \\
& y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

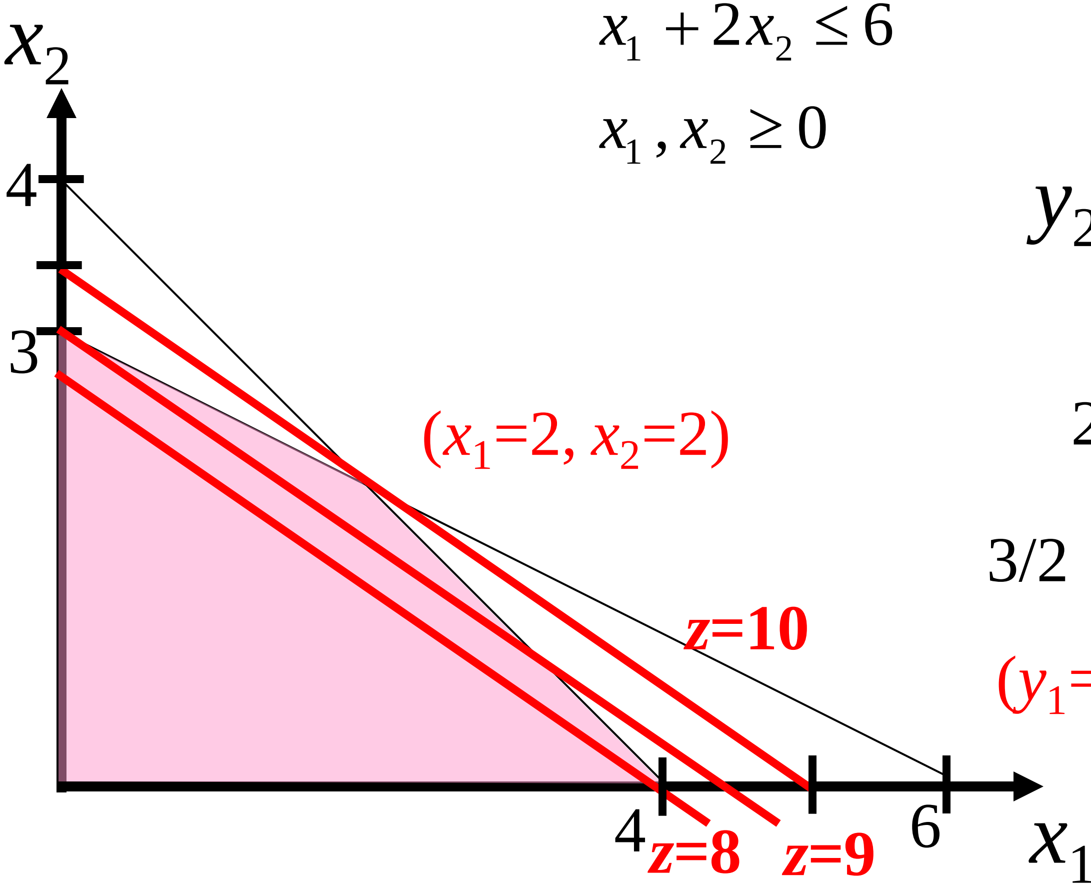
- 総合商社：資源1と資源2の買収を計画⇒買収費用の最小化
- 資源1,2の1kgあたり価格をそれぞれy_1万円, y_2万円
- 製造業者が製品1を売ることによる利益より、商社に資源を売ることによる収入が大きくなければならない。$y_1 + y_2 \geqq 2$
- 製造業者が製品2を売ることによる利益より、商社に資源を売ることによる収入が大きくなければならない。$y_1 + 2y_2 \geqq 3$

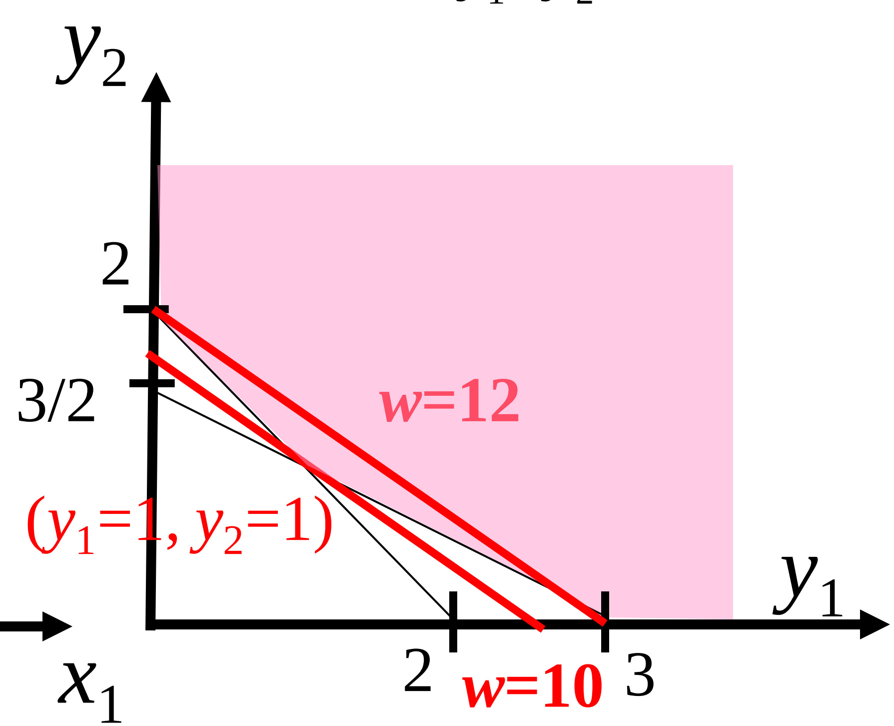
双対問題の図解1

- 目的関数　$2x_1+3x_2 \leqq 4y_1+6y_2$

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 4y_1 + 6y_2 \\ \text{subject to} \quad & y_1 + y_2 \ge 2 \\ & y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$





双対問題の解釈2:栄養問題

- 食堂:新メニューの計画⇒食品購入費用の最小化
- 食品1,食品2は1個当たり50円, 100円、メニューに含まれる食品1,2の個数をそれぞれy_1個,y_2個
- 食品1は1個当たり栄養素1および2を50mg, 10mg含む
- 食品2は1個当たり栄養素1および2を50mg, 30mg含む
- メニューで栄養素1, 2のそれぞれを200mg, 60mg以上摂取できるように

$$\begin{aligned} \max\ & z = 200x_1 + 60x_2 \\ \text{subject to}\ & 50x_1 + 10x_2 \le 50 \\ & 50x_1 + 30x_2 \le 100 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & w = 50y_1 + 100y_2 \\ \text{subject to}\ & 50y_1 + 50y_2 \ge 200 \\ & 10y_1 + 30y_2 \ge 60 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

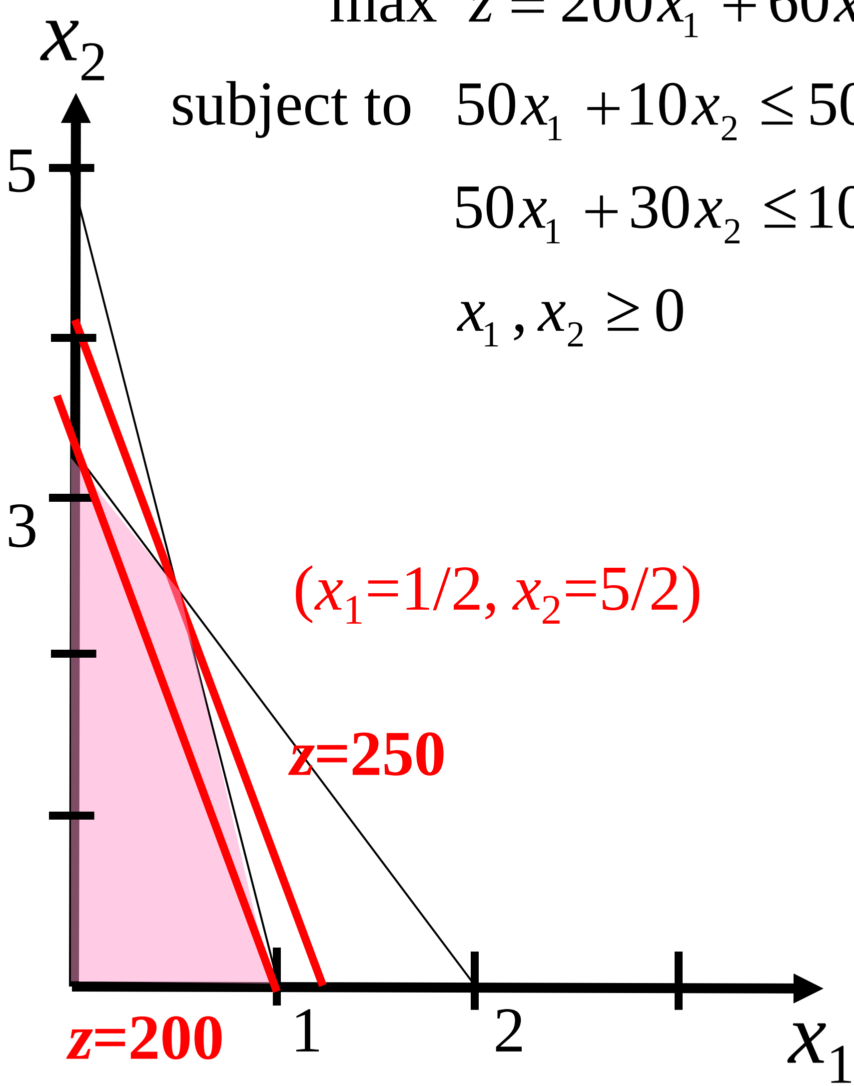
- 薬品販売業者:栄養素1(x_1)と栄養素2(x_2)の販売計画(利益最大化)
- 製品1の販売価格x_1円/mg, 製品2はx_2円/mg
- 食品1に含まれる栄養素1,2を直接食堂に販売するが、食品1の価格よりも栄養素1, 2を直接購入する方が安くなければならない。
- 同様に食品2の価格よりも栄養素1, 2を直接購入する方が安くなければならない。

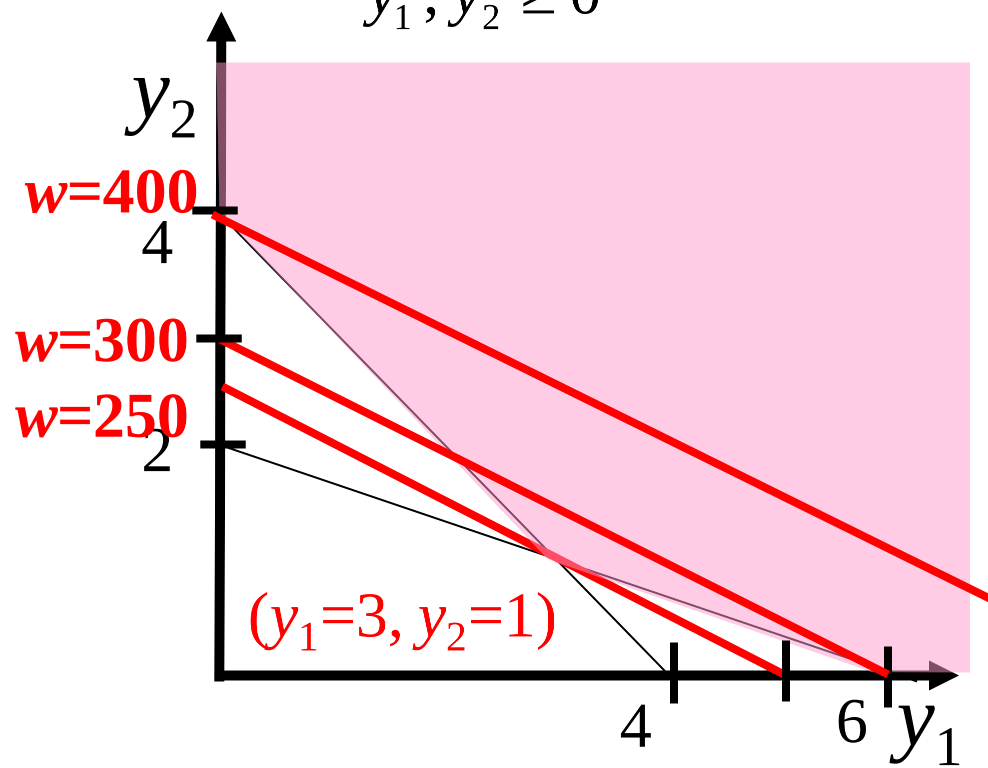
双対問題の図解2

- 目的関数　$200x_1+60x_2 \leqq 50y_1+100y_2$

$$\max \ z = 200x_1 + 60x_2$$
$$\text{subject to} \quad 50x_1 + 10x_2 \le 50$$
$$50x_1 + 30x_2 \le 100$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\min \ w = 50y_1 + 100y_2$$
$$\text{subject to} \quad 50y_1 + 50y_2 \ge 200$$
$$10y_1 + 30y_2 \ge 60$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$





双対問題の双対問題（対称型）

(D)を最大化問題として表す

（D） $\max \quad -b^{\mathrm{T}}y$

s.t. $\quad -A^{\mathrm{T}}y \leqq -c$

$$y \geqq 0$$

この双対問題は以下のように(P)と等しい

（P） $\min \quad -x^{\mathrm{T}}c \; = \max\, c^{\mathrm{T}}x$

subject to $\quad -x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \geqq -b^{\mathrm{T}} \;\Rightarrow\; Ax \leqq b$

$$x \geqq 0$$

双対問題（標準型）

（P）　min　$z = c^{\mathrm{T}} x$

s.t.　$Ax = b$

$x \geqq 0$

（D）　max　$w = y^{\mathrm{T}} b$　$(w = b^{\mathrm{T}} y)$

s.t.　$y^{\mathrm{T}} A \leqq c^{\mathrm{T}}$　$(A^{\mathrm{T}} y \leqq c)$

y の符号条件なし

定理2（弱双対定理）

（P）（最大化問題）の可能解x

（D）（最小化問題）の可能解y

$$z = c^{\mathrm{T}}x \leqq w = y^{\mathrm{T}}b$$

主問題／双対問題の対を考えたとき,

最小化問題の可能解の目的関数値は最大化問題の可能解の目的関数値以上

$y^{\mathrm{T}}A \geqq c^{\mathrm{T}}$ この両辺にxを右からかけると

$y^{\mathrm{T}}Ax \geqq c^{\mathrm{T}}x$となり、左辺は$y^{\mathrm{T}}b$以下

系3（系：定理や命題から直接導かれるもの）

（P）の可能解x；（D）の可能解y

$$z = c^{\mathrm{T}}x = w = y^{T}b$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \text{ は（P）の最適解} \\ y \text{ は（D）の最適解} \end{cases}$$

(P)の可能解の目的関数値と（D）の可能解の目的関数値が一致したならば,それらの解は各問題の最適解

生産計画での双対性

単位当たり利益	2	3	4			
	製品1生産量	製品2生産量	製品3生産量			利益
	2	6	0			22
	製品1	製品2	製品3	資源使用量	≦	資源保有量
鉄鋼	1	2	3	14	≦	14
電力	1	1	2	8	≦	8
労働力	3	1	2	12	≦	18

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数項	基底変数	
0行	1	0	0	1	1	1	0	22	z	利益
1行	0	0	1	0	1	-1	0	6	x_2	鉄鋼
2行	0	1	0	1	-1	2	0	2	x_1	電力
3行	0	0	0	-2	2	-5	1	6	x_6	労働力

$$z = c^{\mathrm{T}} x = 2 \times 2 + 3 \times 6 = w = y^T b = 1 \times 14 + 1 \times 8$$

定理4（強双対定理）

（P）最大化 ＼ （D）最小化	最適解あり	下に有界でない	実行不可能
最適解あり	① 最適値一致	×	×
上に有界でない	×	×	②
実行不可能	×	②	○

定理5　相補性定理

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(P)の可能解} & x \\ \text{(D)　〃} & y\end{array}\right\}\ \text{に対して}$$

$$\left.\begin{array}{l} x, \\ y \end{array}\right\}\ \text{最適} \iff \left\{\begin{array}{l} (y^{\mathrm{T}}A - c^{\mathrm{T}})x = 0 \\ \text{(D)のスラック×(P)の解} \\ y^{\mathrm{T}}(b - Ax) = 0 \\ \text{(D)の解×(P)のスラック} \end{array}\right.$$

主問題の最適解において，**ある制約のスラック変数が正ならば対応する双対問題の変数は0（相補スラック条件）**；相補スラック条件を満たす主問題・双対問題の可能解は最適
（z　$= c^{\mathrm{T}}x$ = w =　$y^{T}b$ が容易に示せる）

今日（第3回）学んだ基本概念／基本用語

- 退化
- 巡回
- 単体法の有限収束性
- 双対問題
- ラグランジュ緩和による双対問題の導出
- 双対定理（弱双対定理，強双対定理）
- 相補性定理

練習1.20、45ページ

No.0（色の濃い列・行を軸の列・軸の行として計算すること）

変数						定数項	基底変数	θ
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
1	-4	-1	0	0	0	0	z	ー
0	1	2	1	0	0	16	x_3	16/2
0	1	1	0	1	0	8	x_4	8/1
0	3	1	0	0	1	18	x_5	18/1

No.1

変数						定数項	基底変数	θ
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
1	-7/2	0	1/2	0	0	8	z	ー
0	1/2	1	1/2	0	0	8	x_2	16
0	1/2	0	-1/2	1	0	0	x_4	0
0	5/2	0	-1/2	0	1	10	x_5	4

No.2

変数						定数項	基底変数	θ
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
1	0	0	-3	7	0	8	z	ー
0	0	1	1	-1	0	8	x_2	8
0	1	0	-1	2	0	0	x_1	ー
0	0	0	2	-5	1	10	x_5	5

練習1.20　45ページ

No.3

変数								
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	θ
1	0	0	0	-1/2	3/2	23	z	ー
0	0	1	0	3/2	-1/2	3	x_2	2
0	1	0	0	-1/2	1/2	5	x_1	ー
0	0	0	1	-5/2	1/2	5	x_3	ー

No.4

変数								
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項	基底変数	θ
1	0	1/3	0	0	4/3	24	z	ー
0	0	2/3	0	1	-1/3	2	x_4	
0	1	1/3	0	0	1/3	6	x_1	
0	0	5/3	1	0	-1/3	10	x_3	

宿題3．1　主問題と双対問題

（P1）　最大化　$z = x_1 + 12x_2 + 10x_3$

制約

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leqq 24 \quad y_1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leqq 24 \quad y_2$$
$$3x_1 + x_2 \leqq 12 \quad y_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

（P2）　最小化　$w = \boxed{24y_1 + 24y_2 + 12y_3}$

制約

$$\boxed{4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geqq 1} \quad x_1$$
$$6y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geqq 12 \quad x_2$$
$$3y_1 + 6y_2 \geqq 10 \quad x_3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geqq 0$$

主問題と双対問題

（P1）　最大化　$z = x_1 + 12x_2 + 10x_3$

制約

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leqq 24$$
$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leqq 24$$
$$3x_1 + x_2 \leqq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

（P2）　最小化　$w = 24y_1 + 24y_2 + 12y_3$

制約

$$4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geqq 1$$
$$6y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geqq 12$$
$$3y_1 + 6y_2 \geqq 10$$
$$y_1, y_2, y_3 \geqq 0$$

主問題と双対問題のソルバー結果の比較

主問題

Microsoft Excel 8.0d 解答ﾚﾎﾟｰﾄ
ﾜｰｸｼｰﾄ名: [第4回演習課題4_2.xls]問題(P1)
ﾚﾎﾟｰﾄ作成日: 01/10/14 22:21:05

目的ｾﾙ (最大値)

ｾﾙ	名前	計算前の値	ｾﾙの値
$H$2	目的関数値	0	58.6666667

変化させるｾﾙ

ｾﾙ	名前	計算前の値	ｾﾙの値
$C$4	変数1	0	0
$D$4	変数2	0	2.66666667
$E$4	変数3	0	2.66666667

制約条件

ｾﾙ	名前	ｾﾙの値	制約条件	ｽﾃｰﾀｽ	条件との差
$F$5	制約1	24	$F$5<=$H$5	満たす	0
$F$6	制約2	24	$F$6<=$H$6	満たす	0
$F$7	制約3	2.666666667	$F$7<=$H$7	部分的に満たす	9.33333333

双対問題

Microsoft Excel 8.0d 解答ﾚﾎﾟｰﾄ
ﾜｰｸｼｰﾄ名: [第4回演習課題4_2.xls]問題(P2)
ﾚﾎﾟｰﾄ作成日: 01/10/14 22:22:40

目的ｾﾙ (最小値)

ｾﾙ	名前	計算前の値	ｾﾙの値
$H$3	変数3 目的関数値	0	58.6666667

変化させるｾﾙ

ｾﾙ	名前	計算前の値	ｾﾙの値
$C$4	変数1	0	1.55555556
$D$4	変数2	0	0.88888889
$E$4	変数3	0	0

制約条件

ｾﾙ	名前	ｾﾙの値	制約条件	ｽﾃｰﾀｽ	条件との差
$F$5	制約1	8	$F$5>=$H$5	部分的に満たす	7
$F$6	制約2	12	$F$6>=$H$6	満たす	0
$F$7	制約3	10	$F$7>=$H$7	満たす	0

Microsoft Excel 8.0d 感度ﾚﾎﾟｰﾄ
ﾜｰｸｼｰﾄ名: [第4回演習課題4_2.xls]問題(P1)
ﾚﾎﾟｰﾄ作成日: 01/10/14 22:21:05

変化させるｾﾙ

ｾﾙ	名前	計算値	限界ｺｽﾄ	目的ｾﾙ係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$C$4	変数1	0	-7	1	7	1E+30
$D$4	変数2	2.666666667	0	12	8	7
$E$4	変数3	2.666666667	0	10	14	4

制約条件

ｾﾙ	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$F$5	制約1	24	1.55555556	24	24	12
$F$6	制約2	24	0.88888889	24	24	12
$F$7	制約3	2.666666667	0	12	1E+30	9.333333333

Microsoft Excel 8.0d 感度ﾚﾎﾟｰﾄ
ﾜｰｸｼｰﾄ名: [第4回演習課題4_2.xls]問題(P2)
ﾚﾎﾟｰﾄ作成日: 01/10/14 22:22:40

変化させるｾﾙ

ｾﾙ	名前	計算値	限界ｺｽﾄ	目的ｾﾙ係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$C$4	変数1	1.555555556	0	24	24	12
$D$4	変数2	0.888888889	0	24	24	12
$E$4	変数3	0	9.33333333	12	1E+30	9.333333333

制約条件

ｾﾙ	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$F$5	制約1	8	0	1	7	1E+30
$F$6	制約2	12	2.66666667	12	8	7
$F$7	制約3	10	2.66666667	10	14	4

主問題と双対問題

（P1）　最大化　$z = x1 + 12x2 + 10x3$

制約

$$4x1 + 6x2 + 3x3 \leqq 24$$
$$2x1 + 3x2 + 6x3 \leqq 24$$
$$3x1 + x2 \leqq 12$$
$$x1, x2, x3 \geqq 0$$

（P2）　最小化　$w = 24y1 + 24y2 + 12y3$

制約

$$4y1 + 2y2 + 3y3 \geqq 1$$
$$6y1 + 3y2 + 1y3 \geqq 12$$
$$3y1 + 6y2 \geqq 10$$
$$y1, y2, y3 \geqq 0$$

相補性をソルバー結果で見る

演習課題3.3の主／双対問題(P1)と(P2)に対して

主問題(P1)の結果

Microsoft Excel 8.0d 解答ﾚﾎﾟｰﾄ
ﾜｰｸｼｰﾄ名: [第4回演習課題4_2.xls]問題(P1)
ﾚﾎﾟｰﾄ作成日: 01/10/14 22:21:05

目的ｾﾙ (最大値)

ｾﾙ	名前	計算前の値	ｾﾙの値
$H$2	目的関数値	0	58.6666667

変化させるｾﾙ

ｾﾙ	名前	計算前の値	ｾﾙの値
$C$4	変数1	0	0
$D$4	変数2	0	2.66666667
$E$4	変数3	0	2.66666667

制約条件

ｾﾙ	名前	ｾﾙの値	制約条件	ｽﾃｰﾀｽ	条件との差
$F$5	制約1	24	$F$5<=$H$5	満たす	0
$F$6	制約2	24	$F$6<=$H$6	満たす	0
$F$7	制約3	2.666666667	$F$7<=$H$7	部分的に満たす	9.33333333

双対問題(P2)の結果

Microsoft Excel 8.0d 解答ﾚﾎﾟｰﾄ
ﾜｰｸｼｰﾄ名: [第4回演習課題4_2.xls]問題(P2)
ﾚﾎﾟｰﾄ作成日: 01/10/14 22:22:40

目的ｾﾙ (最小値)

ｾﾙ	名前	計算前の値	ｾﾙの値
$H$3	変数3 目的関数値	0	58.6666667

変化させるｾﾙ

ｾﾙ	名前	計算前の値	ｾﾙの値
$C$4	変数1	0	1.55555556
$D$4	変数2	0	0.88888889
$E$4	変数3	0	0

制約条件

ｾﾙ	名前	ｾﾙの値	制約条件	ｽﾃｰﾀｽ	条件との差
$F$5	制約1	8	$F$5>=$H$5	部分的に満たす	7
$F$6	制約2	12	$F$6>=$H$6	満たす	0
$F$7	制約3	10	$F$7>=$H$7	満たす	0