「基礎OR」／「OR演習」

第2回

2017/10/10

鉄鉱石配合問題の定式化

- 変数: Tj＝配合1トン当たりの鉱山 j の鉱石の重量（≧0）
- 目的関数:最小化　トン当たりの費用
- 制約条件:各元素(A-C)の品質基準満足
  配合の合計は1トン

- Min $z = 800T1 + 400T2 + 600T3 + 500T4$ (費用)
- s.t. $10T1 + 3T2 + 8T3 + 2T4 \geqq 5$ (元素A)
  $90T1 + 150T2 + 75T3 + 175T4 \geqq 100$ (元素B)
  $45T1 + 25T2 + 20T3 + 37T4 \geqq 30$ (元素C)
  $T1 + T2 + T3 + T4 = 1$ (合計1)
  $T1, T2, T3, T4 \geqq 0$(非負条件)

Microsoft Excel 8.0d 感度ﾚﾎﾟｰﾄ
ﾜｰｸｼｰﾄ名: [Book10]鉄鉱石配合問題
ﾚﾎﾟｰﾄ作成日: 01/10/08 17:23:11

変化させるｾﾙ

ｾﾙ	名前	計算値	限界ｺｽﾄ	目的ｾﾙ係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
B6	変数 鉱石1	0.259259259	0	800	223.6363636	120
C6	変数 鉱石2	0.703703704	0	400	66.84782609	300
D6	変数 鉱石3	0.037037037	0	600	85.71428571	118.2692308
E6	変数 鉱石4	0	91.11111111	500	1E+30	91.11111111

制約条件

ｾﾙ	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
F9	元素A 含有量	5	44.44444444	5	2.375	0.25
F10	元素B 含有量	131.6666667	0	100	31.66666667	1E+30
F11	元素C 含有量	30	4.444444444	30	0.714285714	7
F12	合計 含有量	1	155.555556	1	0.25	0.043478261

Microsoft Excel 14.0 感度レポート
ワークシート名: [exercise1(鉄鋼石配合).xls]鉄鉱石配合問題
レポート作成日: 2016/10/01 20:13:37

変数セル

セル	名前	最終値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
B5	配合比率 x1	0.259259259	0	800	223.6363636	120
C5	配合比率 x2	0.703703704	0	400	66.84782609	300
D5	配合比率 x3	0.037037037	0	600	85.71428571	118.2692308
E5	配合比率 x4	0	91.11111111	500	1E+30	91.11111111

制約条件

セル	名前	最終値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
F10	配合比率総和 z	1	155.5555556	1	0.25	0.043478261
F7	元素A z	5	44.44444444	5	2.375	0.25
F8	元素B z	131.6666667	0	100	31.66666667	1E+30
F9	元素C z	30	4.444444444	30	0.714285714	7

被約費用(reduced cost)（EXCELでは）限界コスト

- 変数（列）に対応
- 二つの解釈が可能
  ① x_j=0である変数を無理に正にしようとしたときの、x_j単位当たりの目的関数値の増加の度合い
  ② x_j=0である変数を正にする可能性が生じる（つまり、最適解が最適でなくなる）目的関数の係数c_jの変化量

潜在価格(shadow price)
双対価格(dual price)

- 制約条件式（行）に対応（別名：単体乗数(simplex multiplier), 双対変数(dual variable)））
- 当該制約条件の右辺定数以外のすべての係数を元の問題のままにした上で、当該制約条件の右辺定数を微小量増加させたときの、増加単位量当たりの最適目的関数値の改善／改悪の度合い

農場経営問題のLP定式化

- ①変数(variables)
  ②目的関数(objective function)
  ③制約条件(constraints)
- 変数：小麦、アルファルファ、肉牛の生産量
  アルファルファの販売・購入量
- 目的関数：「収益ー費用」最大
- 制約条件：土地の許容上限
  用水の許容上限
  アルファルファのバランス

農場経営問題　変数･目的関数

- <u>変数(variables)</u>:（単位の設定は一例）
  W=小麦の生産／販売 (acres)
  A=アルファルファの生産 (tons)
  B=肉牛の生産／販売 (tons)
  Ab=アルファルファの購入 (tons)
  As=アルファルファの売却 (tons)

- <u>目的関数(objective function；収益ー費用)</u>:
  最大化 $72W - 30/3A + 560B - 36Ab + 34As$

農場経営問題　制約条件

制約条件

- 土地（単位acres）
  $W+(1/3)A+0.05B \leqq 1{,}200$
- 灌漑用水（単位acre feet）
  $1.5W+(2.5/3)A+0.1B \leqq 2{,}000$
- アルファルファ（単位tons）
  $A-4B+Ab-As=0$
- 非負条件
  $W, A, B, Ab, As \geqq 0$

限界コストの解釈例

- 小麦の限界コストは-6168であり、目的セル係数から6168増加しても（許容範囲内増加）、現在の解は最適である。
  - 総利益8320000は変わらない。
  - 最適解はW=800,B=8000,Ab=32000となるが、元の解も最適である。
- 買アルファの目的セル係数-36の許容範囲内増加量は2であるが、2.01増加し、-33.99になると？目的関数値は収束しない。
  - 無限にアルファを買い売却（裁定取引）

潜在価格の解釈例

- 土地の上限が緩和（制限）されても、利益の変動=0
- 水の使用量の上限が緩和（制限）されたときの単位変化量当たりの利益の変動：水の使用量の上限が1エーカーフィート緩和されると、利益は4160ドル上昇。
- alfalfaのバランス（－A+4B－Ab+As=0）が緩和（制限）されたときの単位変化量当たりの利益の変動：
  - この値が正になるということは、外部から（無償で）アルファルファを借りてきてもよく、その分購入量が減ることを表す。この場合は、単位借用量当たりの利益の増加量を表す。
  - 逆に、この値が負になるということは、アルファルファを余らせておかなければならないことを表す。この場合は、単位余剰量当たりの利益の減少量を表す。

生産計画問題（2製品）の定式化
線形計画問題

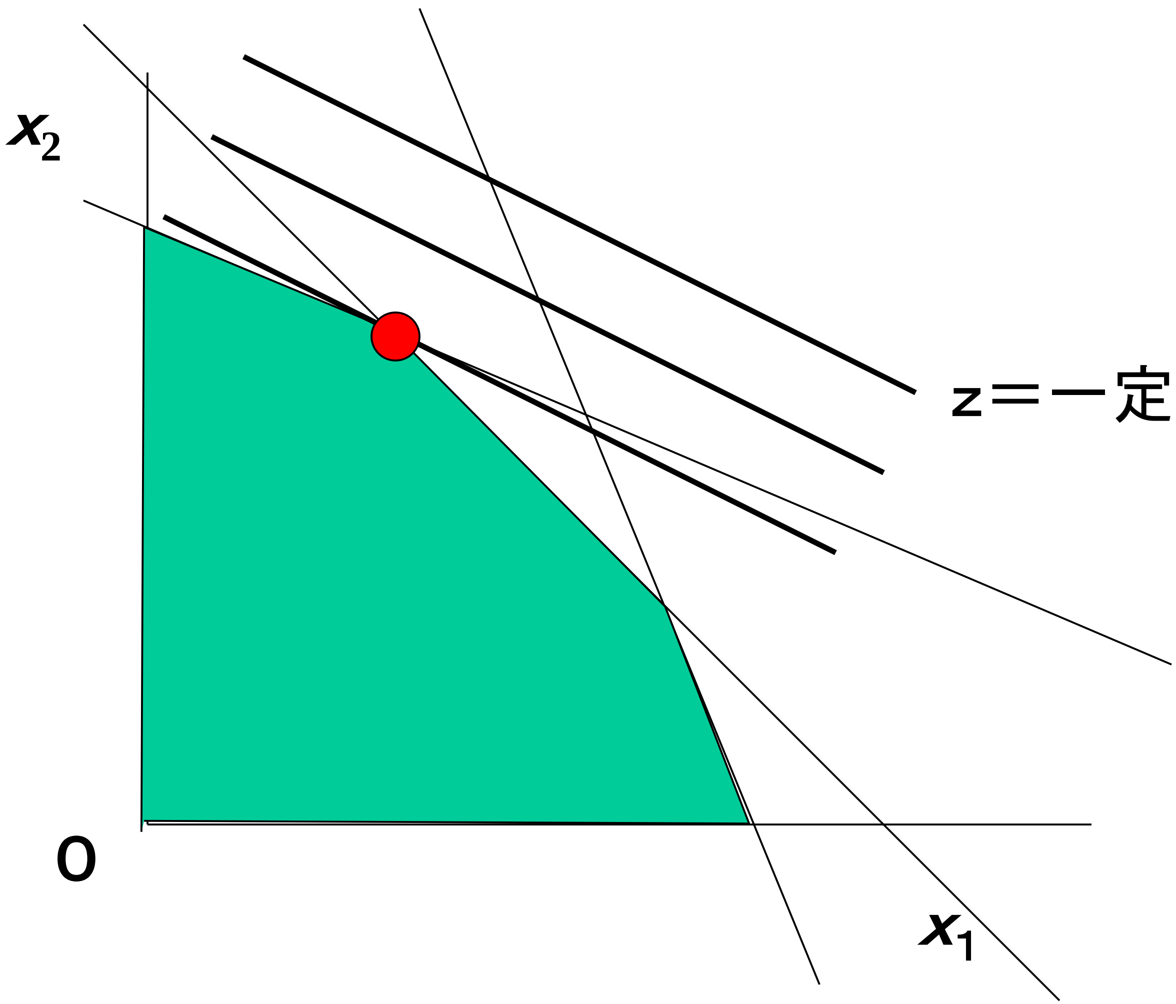
- （決定）変数（決めること）
  - 製品1の生産量　$x1$
  - 製品2の生産量　$x2$
  - 最大化　$z = 2x1 + 3x2$（目的関数：利益）
- 制約（条件）　$x1 + 2x2 \leqq 14$（鉄鋼）

  $x1 + x2 \leqq 8$（電力）

  $3x1 + x2 \leqq 18$（労働力）

  $x1,\quad x2 \geqq 0$

生産計画問題の幾何的表現



生産計画問題：スラック変数の導入

- 最大化 $z = 2x1 + 3x2$（目的関数：利益）
- 制約（条件）
$$\begin{aligned} x1 + 2x2 &\leqq 14 \text{（鉄鋼）} \\ x1 + x2 &\leqq 8 \text{（電力）} \\ 3x1 + x2 &\leqq 18 \text{（労働力）} \\ x1,\ x2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

- 最大化 $z = 2x1 + 3x2$（目的関数：利益）
- 制約（条件）
$$\begin{aligned} x1 + 2x2 + x3 &= 14 \text{（鉄鋼）} \\ x1 + x2 + x4 &= 8 \text{（電力）} \\ 3x1 + x2 + x5 &= 18 \text{（労働力）} \\ x1,\ x2, x3, x4, x5 &\geqq 0 \end{aligned}$$

生産計画： 連立方程式の非負解

$$z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$（目的関数：利益）

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$（鉄鋼）

$$x_1 + x_2 + x_4 = 8$$（電力）

$$3x_1 + x_2 + x_5 = 18$$（労働力）

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqq 0$$

上の連立方程式からすぐに読み取れる解

$x=(x_1,x_2, x_3, x_4, x_5)=(0,0,14,8,18)$, $z=0$

- 実行可能解： 非負条件(+等号制約)を満たす解
- 実行可能基底解：「一切の計算なしに連立方程式から読み取れる実行可能解」

生産計画： 実行可能基底解

$$z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \quad \text{（目的関数：利益）}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \quad \text{（鉄鋼）}$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 8 \quad \text{（電力）}$$

$$3x_1 + x_2 + x_5 = 18 \quad \text{（労働力）}$$

決定変数： $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0$

基底変数（制約数）＋非基底変数（変数総数ー制約数）

非基底変数=0とすると、基底変数の値が一意に定まる

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 14, 8, 18),\ z = 0$$

- **制約は基底変数について解けている**
- **目的関数は非基底変数のみを含む**

生産計画: 最適性の判定

$$z - 2x1 - 3x2 \qquad = 0$$（目的関数:利益）

$$x1 + 2x2 + x3 \qquad = 14$$（鉄鋼）

$$x1 + x2 \quad + x4 = 8$$（電力）

$$3x1 + x2 \qquad + x5 = 18$$（労働力）

$$x1,\ x2,\ x3,\ x4,\ x5 \geqq 0$$

- $x1 = x2 = 0$とすると、$x = (x1, x2, x3, x4, x5) = (0, 0, 14, 8, 18)$, $z = 0$; この解は最適か？
- これ以外の解は$x1$, $x2$の少なくとも一方が正
- 一方を0に固定して他方を正にしよう; $x1$, $x2$のどちらか？; そのとき解は改善するか？
- 目的関数の係数に着目 $z = 2x1 + 3x2$
- （選択された変数を）どこまで増やせるか？

生産計画：連立方程式の等価変換1

$z - 2x1 - 3x2 = 0$（目的関数：利益）

$x1 + 2x2 + x3 = 14$（鉄鋼）

$x1 + x2 + x4 = 8$（電力）

$3x1 + x2 + x5 = 18$（労働力）

$x1, x2, x3, x4, x5 \geqq 0$

非基底変数→$x1$を0に固定して、$x2$を$\theta \geqq 0$まで増加

$2\theta + x3 = 14 \rightarrow x3 = 14 - 2\theta \geqq 0$

$\theta + x4 = 8 \rightarrow x4 = 8 - \theta \geqq 0$

$\theta + x5 = 15 \rightarrow x5 = 18 - \theta \geqq 0$

これらを同時に満たす（最大の）θはθ＝7

生産計画：連立方程式の等価変換2

$z - 2x1 - 3x2 \qquad = 0$（目的関数：利益）

$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 \qquad = 7$（鉄鋼）

$x1 + x2 \qquad + x4 = 8$（電力）

$3x1 + x2 \qquad + x5 = 18$（労働力）

$x1, x2, x3, x4, x5 \geqq 0$

$x2 = 7 - (1/2)x1 - (1/2)x3$

$z - 2x1 - 3x2 \qquad = 0$（目的関数：利益）

$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 \qquad = 7$（鉄鋼）

$(1/2)x1 \qquad - (1/2)x3 + x4 = 1$（電力）

$3x1 + x2 \qquad + x5 = 18$（労働力）

$x1, x2, x3, x4, x5 \geqq 0$

生産計画： 連立方程式の等価変換３

$z - 2x1 - 3x2 = 0$（目的関数：利益）

$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 = 7$（鉄鋼）

$(1/2)x1 - (1/2)x3 + x4 = 1$（電力）

$3x1 + x2 + x5 = 18$（労働力）

$x1, x2, x3, x4, x5 \geqq 0$

$x2 = 7 - (1/2)x1 - (1/2)x3$

$z - 2x1 - 3x2 = 0$（目的関数：利益）

$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 = 7$（鉄鋼）

$(1/2)x1 - (1/2)x3 + x4 = 1$（電力）

$(5/2)x1 - (1/2)x3 + x5 = 11$（労働力）

$x1, x2, x3, x4, x5 \geqq 0$

生産計画： 連立方程式の等価変換4

$$z - 2x1 - 3x2 \qquad = 0\text{（目的関数：利益）}$$

$$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 \qquad = 7\text{（鉄鋼）}$$

$$(1/2)x1 \qquad - (1/2)x3 + x4 = 1\text{（電力）}$$

$$(5/2)x1 \qquad - (1/2)x3 \quad + x5 = 11\text{（労働力）}$$

$$x1,\ x2,\ x3,\ x4,\ x5 \geqq 0$$

$$x2 = 7 - (1/2)x1 - (1/2)x3$$

$$z - (1/2)x1 + (3/2)x3 \qquad = 21\text{（目的関数：利益）}$$

$$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 \qquad = 7\text{（鉄鋼）}$$

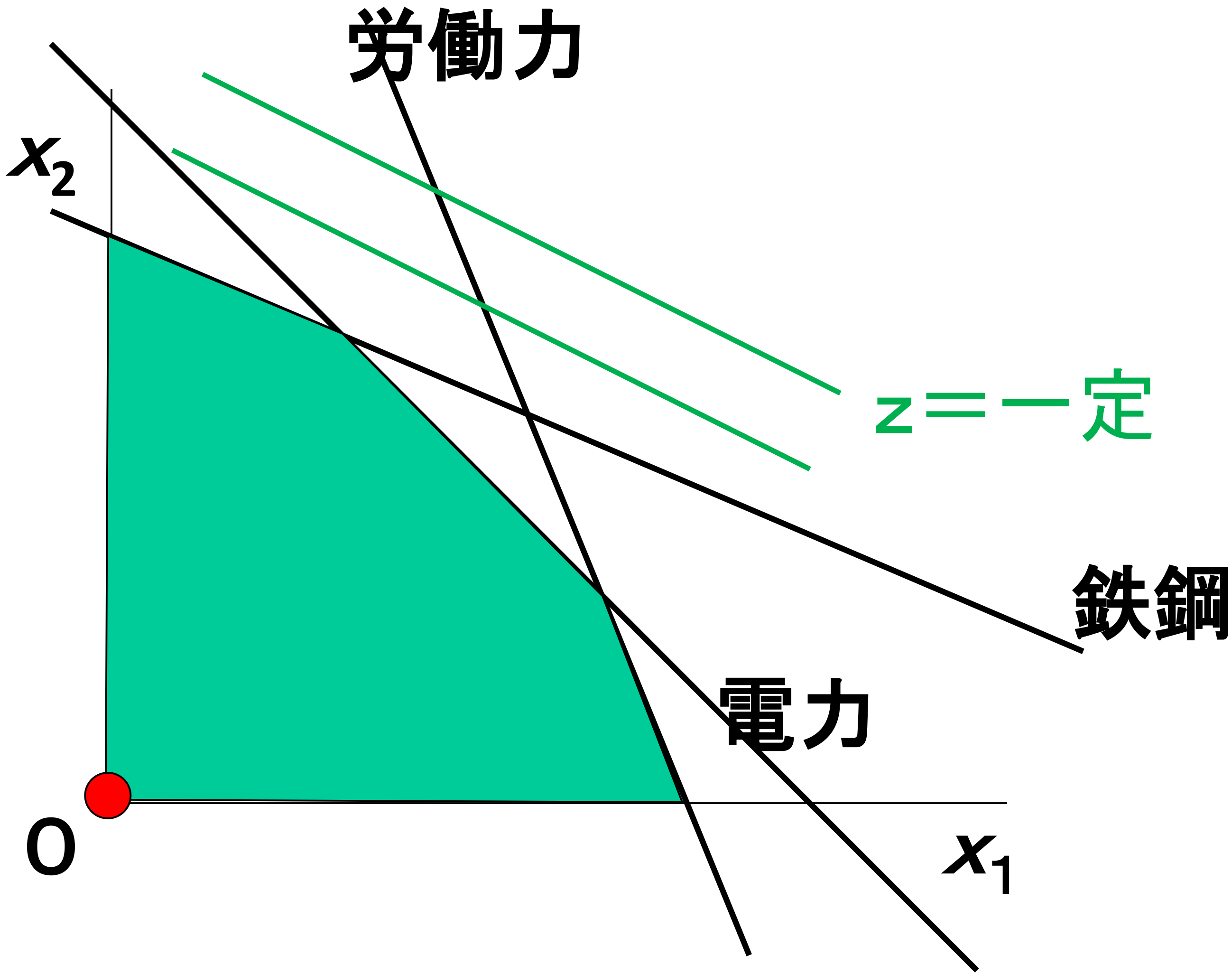
$$(1/2)x1 \qquad - (1/2)x3 + x4 = 1\text{（電力）}$$

$$(5/2)x1 \qquad - (1/2)x3 \quad + x5 = 11\text{（労働力）}$$

$$x1,\ x2,\ x3,\ x4,\ x5 \geqq 0$$

$$x = (x1, x2, x3, x4, x5) \quad = (0,7,0,1,11),\ z = 21$$

生産計画問題の幾何学的表現



生産計画：　解の改善

$$z-(1/2)x1+(3/2)x3 = 21$$ （目的関数：利益）

$$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 = 7$$ （鉄鋼）

$$(1/2)x1 - (1/2)x3 + x4 = 1$$ （電力）

$$(5/2)x1 - (1/2)x3 + x5 = 11$$ （労働力）

$$x1,\ x2, x3, x4, x5 \geqq 0$$

$$x=(x1,x2, x3, x4,x5) = (0,7,0,1,11),\ z=21$$

この実行可能基底解は最適か？

- $x1=x3=0$だと、この解しかない
- この解以外では、少なくとも$x1,x3$の一方が正
- $x1,x3$のどちらを0から増やす？
- 目的関数の係数に着目　$z=(1/2)x1-(3/2)x3+21$
- どこまで増やせるか？

生産計画：　解の改善

$z-(1/2)x1+(3/2)x3 \qquad =21$（目的関数：利益）

$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 \qquad =7$（鉄鋼）　14

$(1/2)x1 \qquad -(1/2)x3 + x4 = 1$（電力）　2

$(5/2)x1 \qquad -(1/2)x3 + x5 = 11$（労働力）　22/5

$x1, x2, x3, x4, x5 \geqq 0$

- （$x3$を0に固定して）$x1$をどこまで増やせるか？

$z-(1/2)x1+(3/2)x3 \qquad =21$（目的関数：利益）

$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 \qquad =7$（鉄鋼）

$x1 \qquad -x3 + 2x4 = 2$（電力）

$(5/2)x1 \qquad -(1/2)x3 + x5 = 11$（労働力）

$x1, x2, x3, x4, x5 \geqq 0$

$x1=2+x3-2x4$

非基底変数$x1$を2まで増加

生産計画： 最適解

$z-(1/2)x1+(3/2)x3 \qquad =21$（目的関数：利益）

$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 \qquad =7$（鉄鋼） 14

$(1/2)x1 \qquad -(1/2)x3 + x4 = 1$（電力） 2

$(5/2)x1 \qquad -(1/2)x3 + x5 = 11$（労働力） 22/5

$x1, x2, x3, x4, x5 \geqq 0$

$z \qquad +x3+x4 \qquad =22$（目的関数：利益）

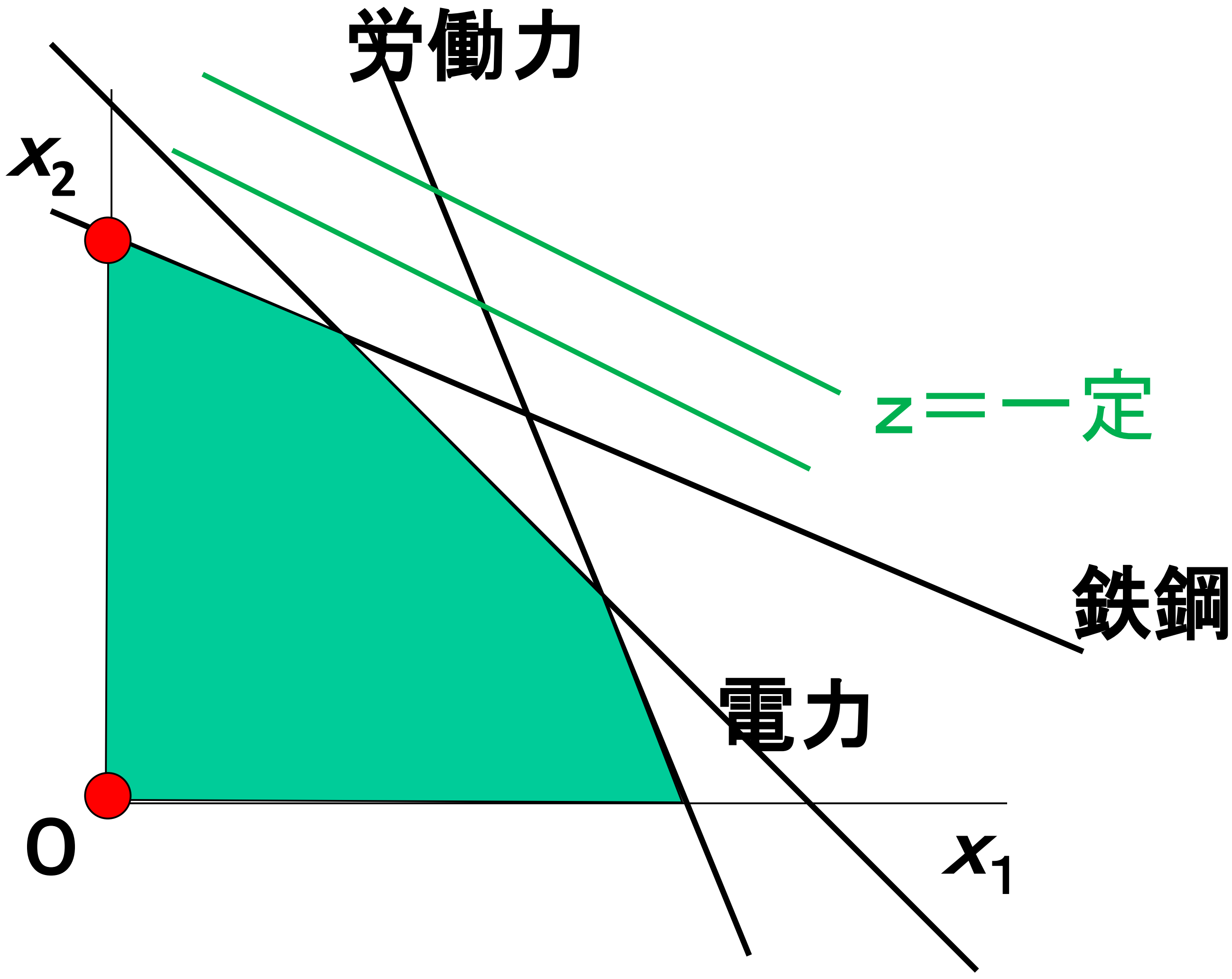
$x2 + x3 - x4 \qquad =6$（鉄鋼）

$x1 \qquad -x3 + 2x4 \qquad = 2$（電力）

$2x3 - 5x4 + x5 = 6$（労働力）

$x1, x2, x3, x4, x5 \geqq 0$

生産計画問題の幾何学的表現



基底形式と基底解

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & z = -2x_1 - 3x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

- 基底形式: 各制約は基底変数について解かれている⇒2個(等式制約数)の変数 x_3, x_4は各制約に1回づつ現れる
- 残り4－2個(変数総数–基底変数個数)の変数x_1, x_2を非基底変数という
- 目的関数は非基底変数のみを含む

$$
\begin{array}{rlllll}
0 = & z & +2x_1 & +3x_2 & & \\
4 = & & x_1 & +x_2 & +x_3 & \\
6 = & & x_1 & +2x_2 & & +x_4
\end{array}
$$

- 基底解とは
- 非基底変数の値を0と固定する:
- 基底変数の値(非負)は一意に定まる:

•$x_1=x_2=0$

•$x_3=4, x_4=6$

基底解を列挙してみよう

- 基底変数の組合せは、4個（変数の総数）から、基底変数となる2個（等式制約数）を選ぶ組合せの数
- 組合せは ${}_4C_2=6$ 通り、非基底変数を0とし基底変数を決める

$$\text{(A)}\left|\begin{array}{lllll} 4 = & x_1 & +x_2 & +x_3 & \\ 6 = & x_1 & +2x_2 & & +x_4 \end{array}\right.$$

- $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=4$, $x_4=6$

$$\text{(B)}\left|\begin{array}{lllll} 4 = & x_1 & +x_2 & +x_3 & \\ 6 = & x_1 & +2x_2 & & +x_4 \end{array}\right.$$

- $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=0$, $x_4=-2$

$$\text{(C)}\left|\begin{array}{lllll} 4 = & x_1 & +x_2 & +x_3 & \\ 6 = & x_1 & +2x_2 & & +x_4 \end{array}\right.$$

- $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=1$, $x_4=0$

$$\text{(D)}\left|\begin{array}{lllll} 4 = & x_1 & +x_2 & +x_3 & \\ 6 = & x_1 & +2x_2 & & +x_4 \end{array}\right.$$

- $x_1=4$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=2$

$$\text{(E)}\left|\begin{array}{lllll} 4 = & x_1 & +x_2 & +x_3 & \\ 6 = & x_1 & +2x_2 & & +x_4 \end{array}\right.$$

- $x_1=6$, $x_2=0$, $x_3=-2$, $x_4=0$

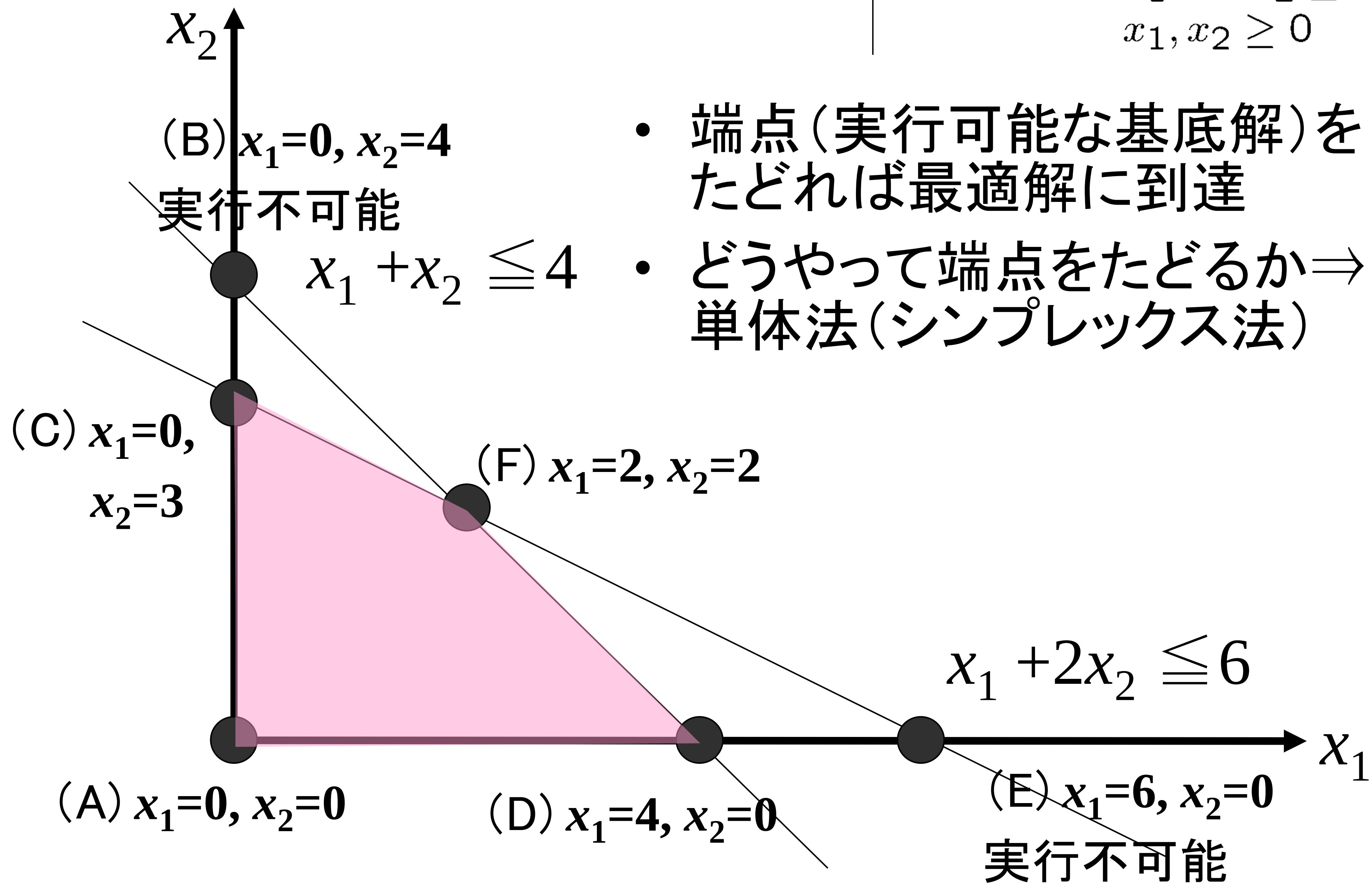
$$\text{(F)}\left|\begin{array}{lllll} 4 = & x_1 & +x_2 & +x_3 & \\ 6 = & x_1 & +2x_2 & & +x_4 \end{array}\right.$$

- $x_1=2$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_4=0$

LPの実行可能領域

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- 端点（実行可能な基底解）をたどれば最適解に到達
- どうやって端点をたどるか⇒単体法（シンプレックス法）



単体表(Simplex Tableau)　No.0

z－2x1－3x2　　　=0（目的関数：利益）

x1 +　2x2 +x3　　=14（鉄鋼）

x1 +　x2　+x4 =　8（電力）

3x1+　x2　　+x5 = 18（労働力）

軸の列

z	x1	x2	x3	x4	x5	定数項	基底変数	比
1	-2	-3	0	0	0	0	z	
0	1	2	1	0	0	14	x3	14/2
0	1	1	0	1	0	8	x4	8/1
0	3	1	0	0	1	18	x5	18/1

軸の行

軸

軸演算(掃き出し計算)の意味

$z - (1/2)x1 \quad + (3/2)x3 \quad = 21$(目的関数:利益)

$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 = 7$(鉄鋼)

$(1/2)x1 - (1/2)x3 + x4 = 1$(電力)

$(5/2)x1 - (1/2)x3 + x5 = 11$(労働力)

z	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$	定数項	基底変数	比
1	-1/2	$\boxed{0}$	3/2	0	0	0	z	
0	1/2	**1**	1/2	0	0	7	$x2$	14
0	1/2	**0**	-1/2	1	0	1	$x4$	2
0	5/2	**0**	-1/2	0	1	11	$x5$	22/5

基底変数は
目的関数に
含まれない

制約式は基底変数$x2$に
ついて解かれている

単体表　No.1

$z - (1/2)x1 \qquad + (3/2)x3 \qquad = 21$（目的関数：利益）

$(1/2)x1 + x2 + (1/2)x3 \qquad = 7$（鉄鋼）

$(1/2)x1 \qquad - (1/2)x3 + x4 = 1$（電力）

$(5/2)x1 \qquad - (1/2)x3 + x5 = 11$（労働力）

z	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$	定数項	基底変数	比
1	-1/2	0	3/2	0	0	21	z	
0	1/2	1	1/2	0	0	7	$x2$	14
0	1/2	0	-1/2	1	0	1	$x4$	2
0	5/2	0	-1/2	0	1	11	$x5$	22/5

単体表　No.2

z	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$	定数項	基底変数	比
1	-1/2	0	3/2	0	0	21	z	
0	1/2	1	1/2	0	0	7	$x2$	14
0	1/2	0	-1/2	1	0	1	$x4$	2
0	5/2	0	-1/2	0	1	11	$x5$	22/5

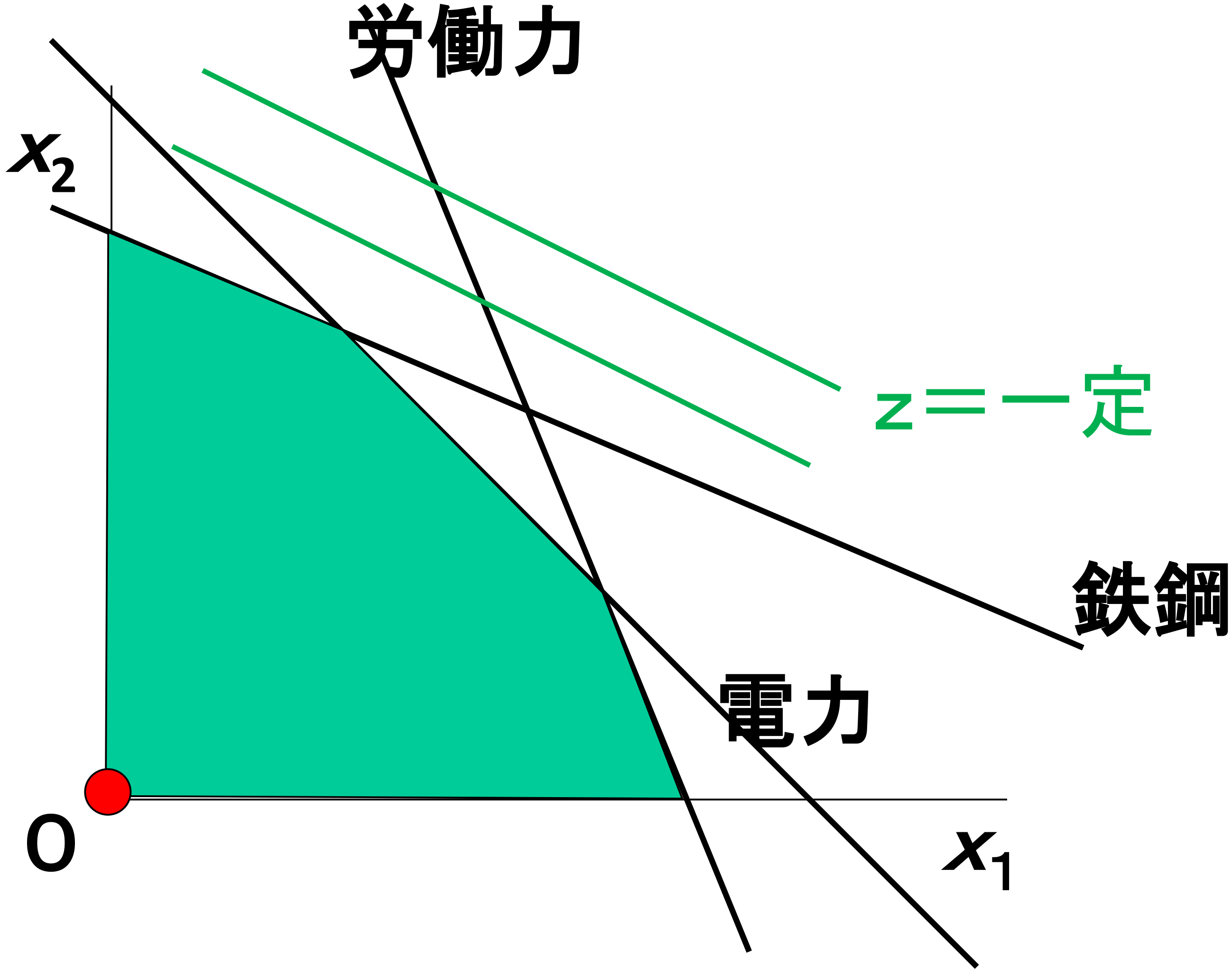
z	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$	定数項	基底変数	比
1	0	0	1	1	0	22	z	
0	0	1	1	-1	0	6	$x2$	
0	1	0	-1	2	0	2	$x1$	
0	0	0	2	-5	1	6	$x5$	

最適解

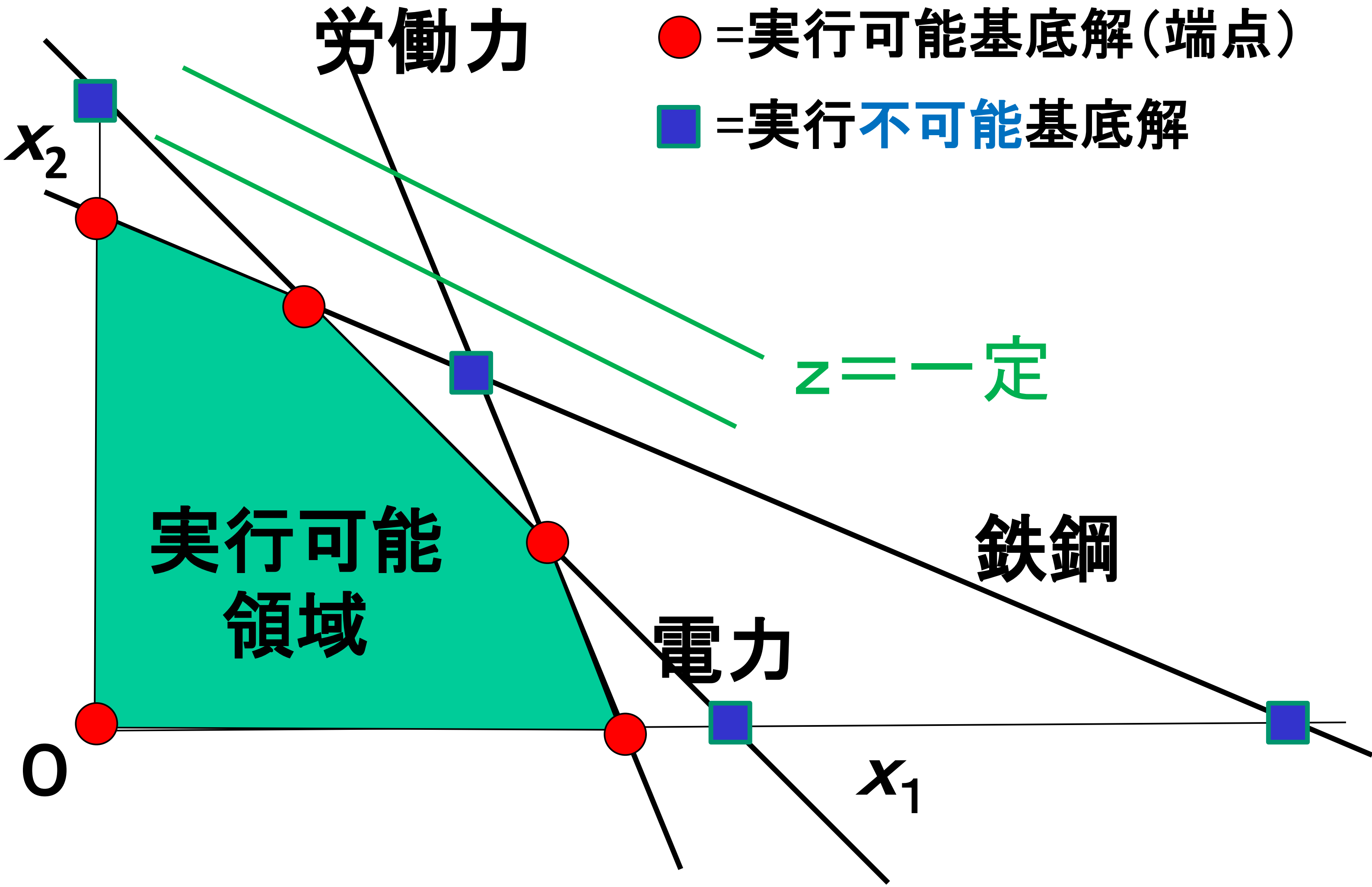
基底解(Basic Solution)

- 基底解　＝　m(3)本の制約条件（非負条件を除く）、n (5)個の変数（スラック変数を含む）からなる連立方程式の解で、適当なn-m (2)個の変数を0に固定し、残りのm (3)個の変数で連立方程式を解いて得られた解　(緑は生産計画問題の場合)
- 問題の制約条件がすべて不等式制約の場合、不等式制約や非負制約を定める直線・平面等の交点として定まる点(「生産計画問題」の場合全部で10個)が、幾何学的には基底解に対応
- 基底解の中には、値が負となる変数が出て、制約条件を満足しない実行不可能基底解も存在

生産計画問題の幾何学的表現



生産計画問題の幾何学的表現



可能基底解と可能基底形式

(basic feasible solution; b.f.s.)

- 可能基底解＝非負条件を満足する基底解、すなわち、実行可能な基底解； 実行可能領域の端点(または頂点)に対応
- 可能基底形式＝一切の計算をせずに可能基底解が読み取れる形で表示された連立方程式
- 可能基底形式(単体表)は、以下の条件を満たす：

  1)基底変数に対応する列は単位ベクトル

  2)基底変数の目的関数の係数は0

  3)右辺定数は非負

単体法の基本手順

- ステップ０　初期可能基底解を見つけ、ステップ１へ。
- ステップ１　可能基底解は最適か？（最適性の判定）最適でなければ、ステップ２へ。（新たに基底変数となる変数の決定；軸の列の決定）
- ステップ２　基底から追い出される変数の決定（＝軸の行の決定）と無限解(unbounded　solution)の存在判定を行い、無限解でなければステップ３へ。
- ステップ３　可能基底解を更新（軸演算、掃き出し演算）し、ステップ１へ。

軸演算(掃き出し演算):計算

- 「軸の列」に関しては、軸の要素を1とする単位ベクトルになるような等価変換を行いたい
- 等価変換で許される演算は、以下の2種類:

(a)軸の行に関しては、行を軸要素の値で割る

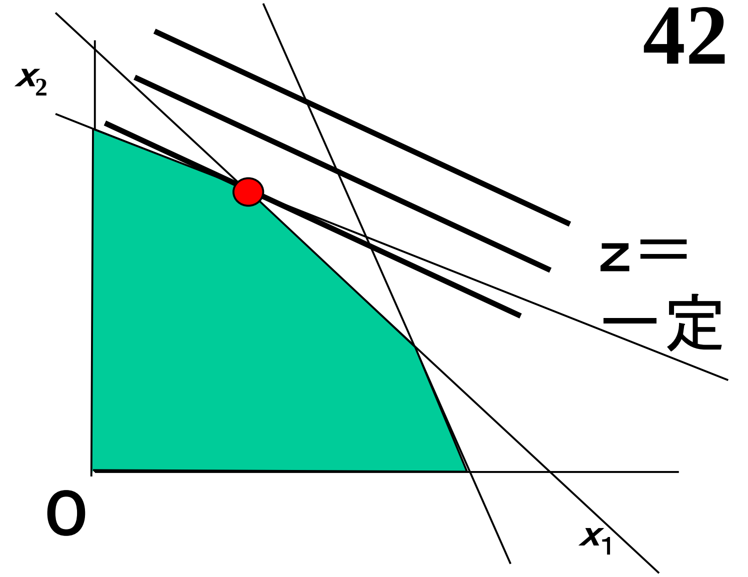
(b)軸の行以外の行に関しては、当該行から軸の行の定数倍を引いたり、当該行に軸の行の定数倍を加える

(a) [新(軸の行)] ← [旧(軸の行)] /軸要素
(b) [新(当該行)] ← [旧(当該行)] -定数* [旧(軸の行)]
(ただし、当該行≠軸の行)

単体法計算のチェックリスト

- 右辺定数(目的関数値を除く)が非負か？(右辺定数が負はおかしい)
- 単位行列が隠れている(基底変数の制約係数)
- 目的関数値が改善されている
  - 基底変数の値が0の行が軸の行に選ばれなければ，すなわち，基底解が「退化」(後で解説予定)していなければ，目的関数値は単調に改善していくはず)

単体法の幾何的解釈



・ 実行可能領域　＝

凸多面体(Convex Polytope)

・ 実行可能領域の端点(または頂点)

→ 実行可能基底解(bfs)に対応

・ 実行可能領域の端点のいずれかに線形計画問題の最適解が存在

・ 単体法(Simplex Algorithm)　＝

実行可能領域の<u>隣接する</u>端点を改善方向に動いていく

初期単体表が作れないとき どうすればよいか？

Key Words:

二段階単体法、PhaseI、人工変数

初期可能基底解が自明な場合

最大化　$z = -3x_1 + x_3$

制約　$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 4$

$-2x_1 + x_2 - x_3 \leqq 1$

$3x_2 + x_3 + x_4 \leqq 9$

$x_j \geqq 0\ (j = 1,2,3,4)$

1)各制約式に**非負スラック変数**を入れて等式化　たとえば、$x_j \geqq 0\ (j = 5,6,7)$

2)スラック変数を初期基底変数として初期単体表(＝初期可能基底解)を作成

初期可能基底解が自明でない問題の解き方

最大化　$z = -3x_1 + x_3$

制約　$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$

$-2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$3x_2 + x_3 + x_4 = 9$

$x_j \geqq 0 \ (j = 1,2,3,4)$

非負人工変数

（Artificial　Variables)の導入

最小化　$z_1 = x_5 + x_6 + x_7$(人工変数の総和）

制約

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad &= 4 \\
-2x_1 + x_2 - x_3 \qquad + x_6 \quad &= 1 \\
3x_2 + x_3 + x_4 \qquad + x_7 &= 9
\end{aligned}
$$

$x_j \geqq 0\,(j = 1,2,3,4),\ x_5, x_6, x_7 \geqq 0$

第１段階(Phase I)

線形計画問題の実行可能性の判定

$$
\begin{array}{lr}
z_1 & -x_5-x_6-x_7=0 \text{（人工変数総和）} \\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 & =4 \\
-2x_1+x_2-x_3 \qquad +x_6 & =1 \\
3x_2+x_3+x_4 \qquad +x_7 & =7
\end{array}
$$

$$x_j \geqq 0\,(j=1,2,3,4),\ x_5, x_6, x_7 \geqq 0$$

これは、可能基底形式か？

1)基底変数に対応する列は単位ベクトル

2)基底変数の目的関数の係数は0

3)右辺定数は非負

第１段階(Phase I)

「単体表」への等価変換

基底変数

z_1	$-x_1+5x_2+x_3+2x_4$	$=12$	z_1
	$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$	$=4$	x_5
	$-2x_1+x_2-x_3+x_6$	$=1$	x_6
	$3x_2+x_3+x_4+x_7$	$=7$	x_7

$x_j \geqq 0\,(j=1,2,3,4),\ x_5, x_6, x_7 \geqq 0$

第1段階(Phase I)

単体法の計算（1）

$$
\begin{array}{lrcl}
 & & & \text{基底変数} \\
z_1 & -x_1+5x_2+x_3+2x_4 & =14 & z_1 \\
 & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 & =4 & x_5 \\
 & -2x_1+x_2-x_3 \qquad +x_6 & =1 & x_6 \\
 & 3x_2+x_3+x_4 \qquad +x_7 & =9 & x_7
\end{array}
$$

$$x_j \geqq 0\,(j=1,2,3,4),\ x_5, x_6, x_7 \geqq 0$$

PhaseI成功（z_1の最適値が0） → 元のLPが実行可能

- 第1段階の線形計画問題の最適目的関数値（z_1の最適値）が0ならば、元のLP問題は実行可能
- 元の問題の実行可能基底解が（原則として）求まる（どうやって？）
- 第1段階の線形計画問題の最適目的関数値（z_1の最適値）が正ならば、元のLP問題は実行不可能

非負人工変数
(Artificial Variables)の導入

最小化　$z_1 = x_5 + x_6 + x_7$(人工変数の総和)

最大化　$z = -3x_1 + x_3$ (元の目的関数)

制約

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad &= 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \quad + x_6 \quad &= 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 \quad + x_7 &= 7 \end{aligned}$$

$x_j \geqq 0 \, (j = 1,2,3,4), \; x_5, x_6, x_7 \geqq 0$

第１段階(Phase I)

線形計画問題の実行可能性の判定

$$z_1 \qquad -x_5-x_6-x_7=0$$ （人工変数総和）

$$z+3x_1 \qquad -x_3 \qquad =0$$ （元の目的関数）

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \qquad =4$$

$$-2x_1+x_2-x_3 \qquad +x_6 \qquad =1$$

$$3x_2+x_3+x_4 \qquad +x_7=7$$

$$x_j \geqq 0\,(j=1,2,3,4),\ x_5, x_6, x_7 \geqq 0$$

第１段階(Phase I)

「単体表」への等価変換

基底変数

$$
\begin{array}{lr}
z_1 - x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 12 & z_1 \\
z + 3x_1 - x_3 = 0 & z \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 & x_5 \\
-2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 1 & x_6 \\
3x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 9 & x_7
\end{array}
$$

$$x_j \geqq 0\ (j=1,2,3,4),\ x_5, x_6, x_7 \geqq 0$$

第1段階(Phase I)

単体法の計算(1)

↓ 基底変数

$$
\begin{array}{lr}
z_1 \quad -x_1+5x_2+x_3+2x_4 = 12 & z_1 \\
z+3x_1 \qquad -x_3 = 0 & z \\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 4 & x_5 \\
-2x_1+x_2-x_3 \qquad +x_6 = 1 & x_6 \leftarrow \\
3x_2+x_3+x_4 \qquad +x_7 = 7 & x_7
\end{array}
$$

$$x_j \geqq 0\ (j=1,2,3,4),\ x_5, x_6, x_7 \geqq 0$$

第1段階(Phase I)

単体法の計算(2)

$$
\begin{array}{lcr}
 & \downarrow & & \text{基底変数} \\
z_1 & +9x_1+6x_3+2x_4-5x_6 & =7 & z_1 \\
z & +3x_1-x_3 & =0 & z \\
 & 3x_1+2x_3+x_4+x_5-x_6 & =3 & x_5 \\
 & -2x_1+x_2-x_3+x_6 & =1 & x_2 \\
 & 6x_1+4x_3+x_4-3x_6+x_7 & =4 & x_7 \leftarrow
\end{array}
$$

$$x_j \geqq 0 \ (j=1,2,3,4), \ x_5, x_6, x_7 \geqq 0$$

まだ続く

基底変数

$$z_1 \quad -x_1+5x_2+x_3+2x_4 = 12 \qquad z_1$$

$$z+3x_1 \quad -x_3 = 0 \qquad z$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 4 \qquad x_5$$

$$-2x_1+x_2-x_3 \quad +x_6 = 1 \qquad x_6 \leftarrow$$

$$3x_2+x_3+x_4 \quad +x_7=7 \qquad x_7$$

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	−1	5	1	2	0	0	0	12	z1	No.0
0	1	3	0	−1	0	0	0	0	0	z	−
0	0	1	1	1	1	1	0	0	4	x5	4
0	0	−2	1	−1	0	0	1	0	1	x6	1
0	0	0	3	1	1	0	0	1	7	x7	7/3

↓ 基底変数

$$z_1 \quad -x_1+5x_2+x_3+2x_4 \quad =12 \quad z_1$$

$$z+3x_1 \quad -x_3 \quad =0 \quad z$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \quad =4 \quad x_5$$

$$-2x_1+x_2-x_3 \quad +x_6 \quad =1 \quad x_6 \leftarrow$$

$$3x_2+x_3+x_4 \quad +x_7=7 \quad x_7$$

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	−1	5	1	2	0	0	0	12	z1	No.0
0	1	3	0	−1	0	0	0	0	0	z	−
0	0	1	1	1	1	1	0	0	4	x5	4
0	0	−2	1	−1	0	0	1	0	1	x6	1
0	0	0	3	1	1	0	0	1	7	x7	7/3

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	−1	5	1	2	0	0	0	12	z1	No.0
0	1	3	0	−1	0	0	0	0	0	z	−
0	0	1	1	1	1	1	0	0	4	x5	4
0	0	−2	1	−1	0	0	1	0	1	x6	1
0	0	0	3	1	1	0	0	1	7	x7	7/3

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	9	0	6	2	0	−5	0	7	z1	No.1
0	1	3	0	−1	0	0	0	0	0	z	−
0	0	3	0	2	1	1	−1	0	3	x5	1
0	0	−2	1	−1	0	0	1	0	1	x2	∞
0	0	6	0	4	1	0	−3	1	4	x7	2/3

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	9	0	6	2	0	−5	0	7	z1	No.1
0	1	3	0	−1	0	0	0	0	0	z	−
0	0	3	0	2	1	1	−1	0	3	x5	1
0	0	−2	1	−1	0	0	1	0	1	x2	∞
0	0	6	0	4	1	0	−3	1	4	x7	2/3

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	0	0	0	1/2	0	−1/2	−3/2	1	z1	No.2
0	1	0	0	−3	−1/2	0	3/2	−1/2	−2	z	−
0	0	0	0	0	1/2	1	1/2	−1/2	1	x5	2
0	0	0	1	1/3	1/3	0	0	1/3	7/3	x2	7
0	0	1	0	2/3	1/6	0	−1/2	1/6	2/3	x1	4

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	0	0	0	1/2	0	−1/2	−3/2	1	z1	No.2
0	1	0	0	−3	−1/2	0	3/2	−1/2	−2	z	−
0	0	0	0	0	1/2	1	1/2	−1/2	1	x5	2
0	0	0	1	1/3	1/3	0	0	1/3	7/3	x2	7
0	0	1	0	2/3	1/6	0	−1/2	1/6	2/3	x1	4

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	0	0	0	0	−1	−1	−1	0	z1	No.3
0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−
0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	0	1	0	2/3	0	−1/3	−5/6	1/3	1/3	x1	

第一段階（Phase I）最適！

元の問題に実行可能解あり！

z	x1	x2	x3	x4	定数	基底	比
							No.3
1	0	0	−3	0	−1	z	−
0	0	0	0	1	2	x4	
0	0	1	1/3	0	5/3	x2	
0	1	0	2/3	0	1/3	x1	

z	x1	x2	x3	x4				定数	基底	比
1	0	0	−3	0				−1	z	No.3’
0	0	0	0	1				2	x4	∞
0	0	1	1/3	0				5/3	x2	5
0	1	0	2/3	0				1/3	x1	1/2

これから、第２段階（Phase II）　元問題は最大化

z	x1	x2	x3	x4				定数	基底	比
1	0	0	−3	0				−1	z	No.3’
0	0	0	0	1				2	x4	∞
0	0	1	1/3	0				5/3	x2	5
0	1	0	2/3	0				1/3	x1	1/2

z	x1	x2	x3	x4				定数	基底	比
1	9/2	0	0	0				1/2	z	No.4
0	0	0	0	1				2	x4	
0	−1/2	1	0	0				3/2	x2	
0	3/2	0	1	0				1/2	x3	

最適！

問題のデータがちょっと違ったら…？

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	−1	5	1	2	0	0	0	16	z1	No.0
0	1	3	0	−1	0	0	0	0	0	z	−
0	0	1	1	1	1	1	0	0	4	x5	4
0	0	−2	1	−1	0	0	1	0	1	x6	1
0	0	0	3	1	1	0	0	1	11	x7	11/3

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	9	0	6	2	0	−5	0	11	z1	No.1
0	1	3	0	−1	0	0	0	0	0	z	−
0	0	3	0	2	1	1	−1	0	3	x5	1
0	0	−2	1	−1	0	0	1	0	1	x2	∞
0	0	6	0	4	1	0	−3	1	8	x7	4/3

問題のデータがちょっと違ったら…？

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	9	0	6	2	0	−5	0	11	z1	No.1
0	1	3	0	−1	0	0	0	0	0	z	−
0	0	3	0	2	1	1	−1	0	3	x5	1
0	0	−2	1	−1	0	0	1	0	1	x2	∞
0	0	6	0	4	1	0	−3	1	8	x7	4/3

z1	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数	基底	比
1	0	0	0	0	−1	−3	−2	0	2	z1	No.2
0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−
0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
0	0	0	0	0	−1	−2	−1	1	2	x7	

第一段階（Phase I）最適！

Excelでは、「仮の解がみつかりません」

所与のLPの実行可能性は、そのLPのPhase I問題(これもまたLP)を解けば判定できる！