「基礎OR」／「OR演習」
第1回

2017/10/03

椎名　孝之

ＯＲ＝Operations Research
モデルを用いた分析技術

- モデル＝特定の目的のもとに、ものごとの本質的なところに着目して本質部分を抜き出し、残りを棄て去ったもの
- 物を考える→頭にイメージ→モデル
  皆、頭の中には「モデル」を持っている。このモデルは、「自分の見た世界」と言ってよい。
- 各人の頭の中のモデルは、以下に欠ける
  正確性、客観性、操作性、伝達可能性
- そこで、「頭の中のモデル」を、数理的に明確化
  ==>　オペレーションズ・リサーチ（ＯＲ）

オペレーションズ･リサーチとは

- **Operations Research (OR):運営、運用、経営、運転などの意味**
- **「より良きもの」のための科学**
  - THE SCIENCE OF BETTER
  - 経営の科学、マネジメント management
  - 計画の科学、プランニング planning
  - 最適化手法、オプティマイゼーション optimization
- **意思決定手法、デシジョンサポート**
- **問題解決のための数理モデル化技術**
- 歴史的背景:オペレーションズ＝ 作戦、リサーチ＝ 研究
  - 生まれ:第2次世界大戦下のイギリス
  - レーダーを使った航空機、潜水艦の探索(ハード＋ソフト)
- 効率の良い運用方法の策定
- 兵站(物資、食糧を適切に準備する)(数学)
- 戦争時⇒現在では企業、団体などの経営

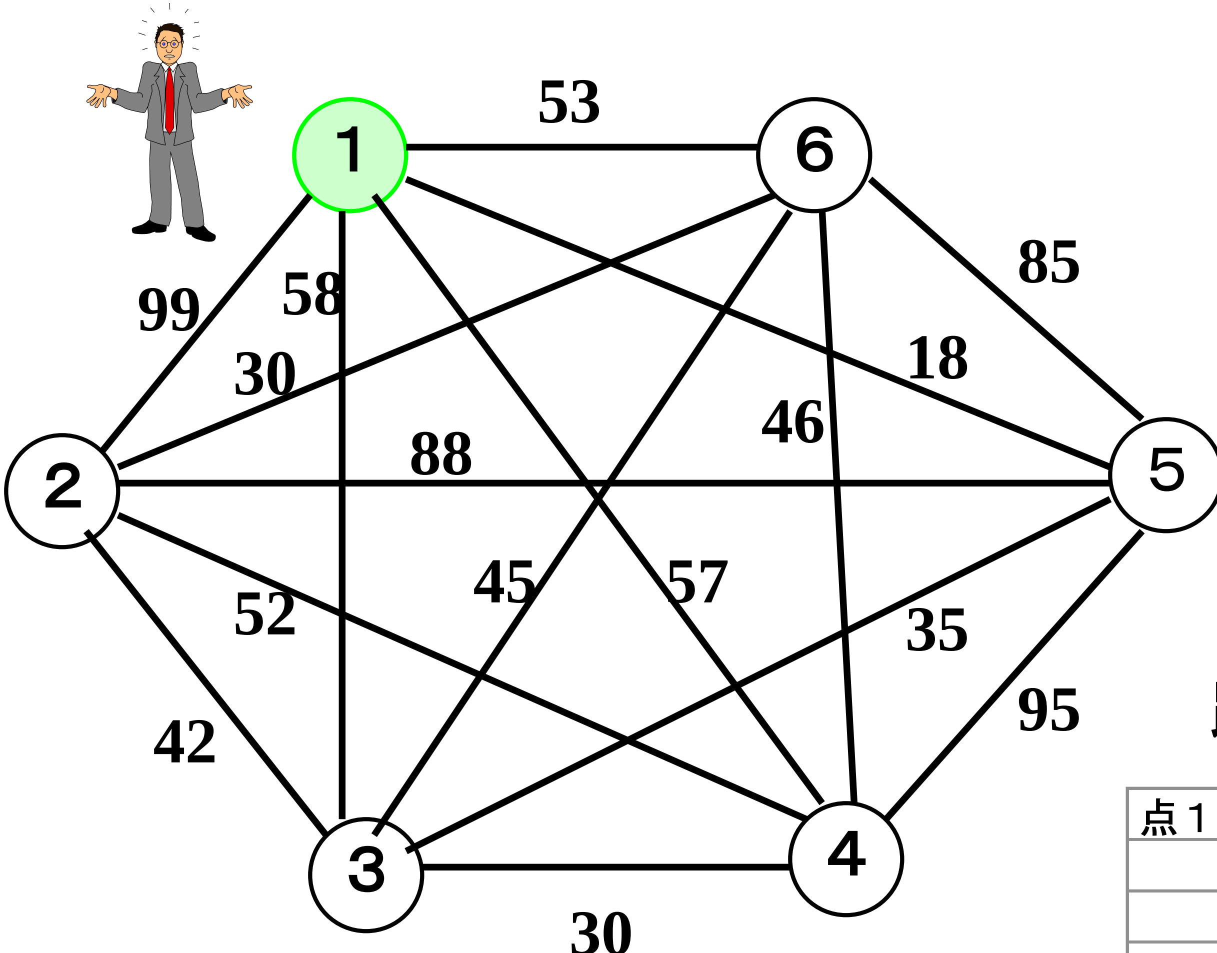
現代のオペレーションズ・リサーチ

- 育ち:アメリカ、イギリス
  - 企業経営の問題に適用:物流、生産、販売
- 関連分野
  - IE(生産工学、作業研究) ⇒ 生産管理
  - トラヒック理論 ⇒ 待ち行列理論
  - モンテカルロ法 ⇒ シミュレーション
  - 最適化理論 ⇒ 数理計画法(誰もが知っているメジャー手法)
  - 統計理論 ⇒ 品質管理
  - ロジスティクス ⇒ 在庫管理
- **ORの定義:システムの運用に関する問題に対して、合理的な解を提供する数理的方法 (JIS:日本工業規格)**
  - モデルに基づく実験科学
  - 問題解決の科学
  - 感度分析

巡回セールスマン問題(TSP)
Traveling Salesman Problem

- 都市がn個存在
- セールスマンの営業拠点は都市1に存在
- セールスマンは各都市を1回ごと(正確には、ちょうど1回)訪問
- 都市iから都市jへの移動「コスト」はc_{ij}
- セールスマンの総移動「コスト」を最小化する訪問順序を決定したい

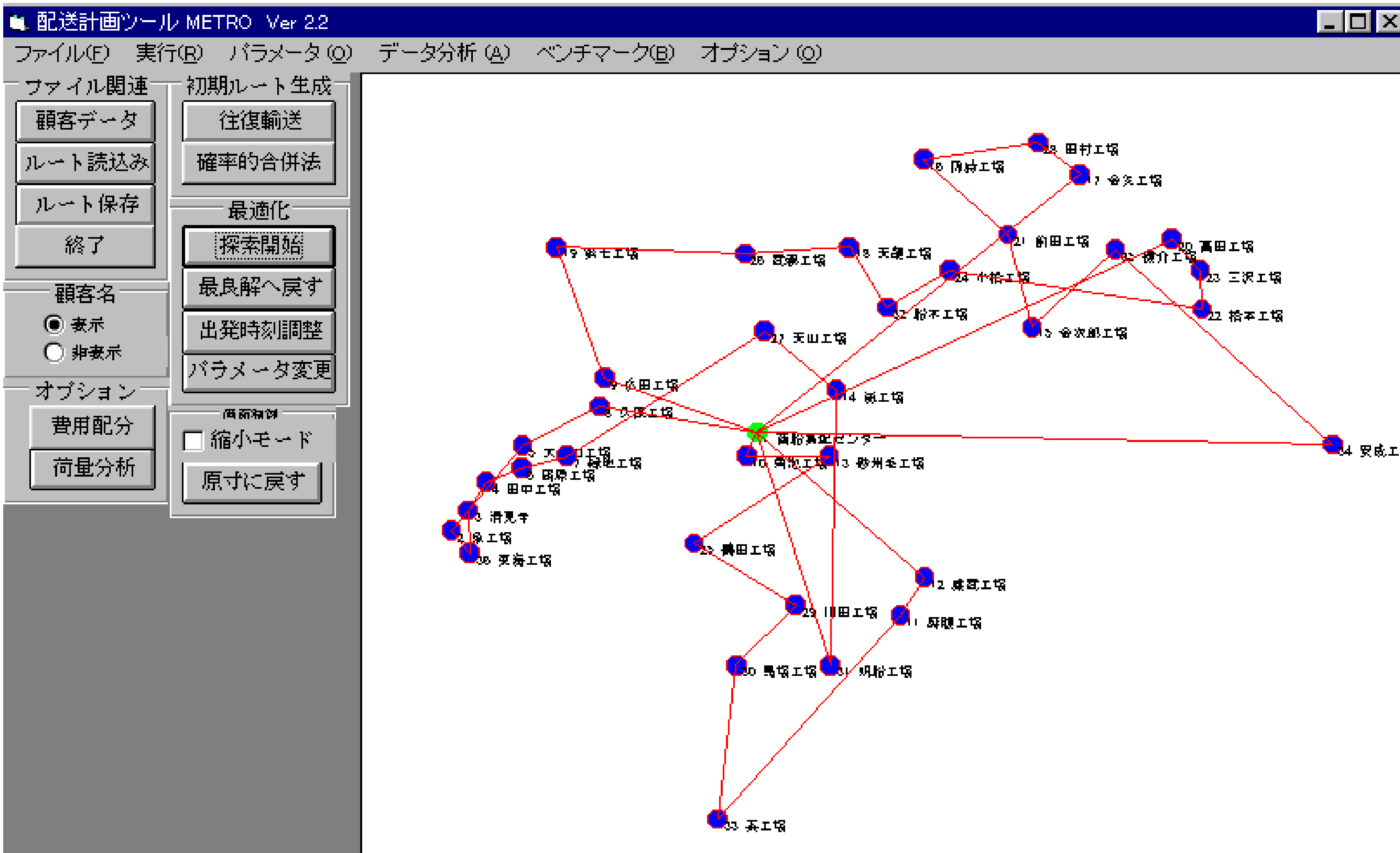
巡回セールスマン問題の一例



距離（費用）行列

点１	99	58	57	18	53
	点２	42	52	88	30
		点３	30	35	45
			点４	95	46
				点５	85
					点６

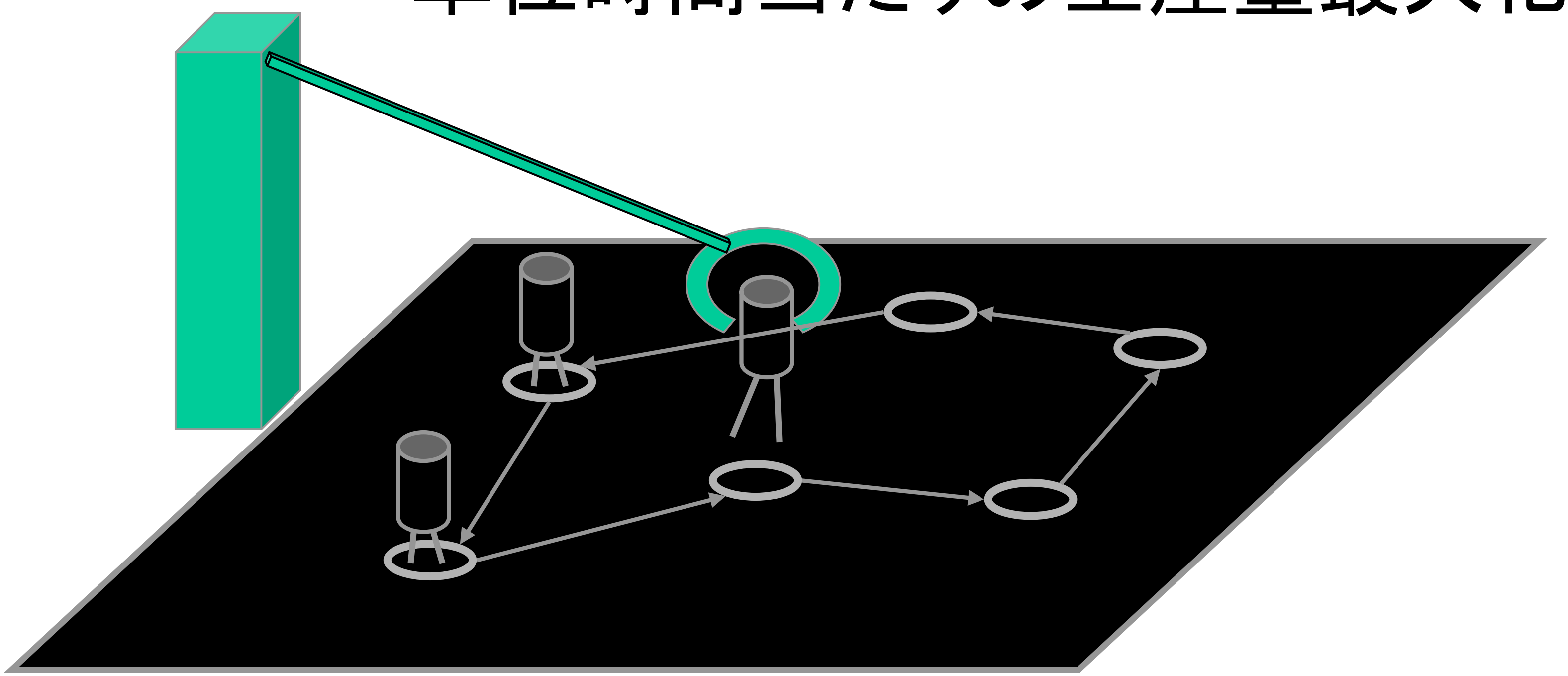
平面TSP(の拡張)： 配送計画



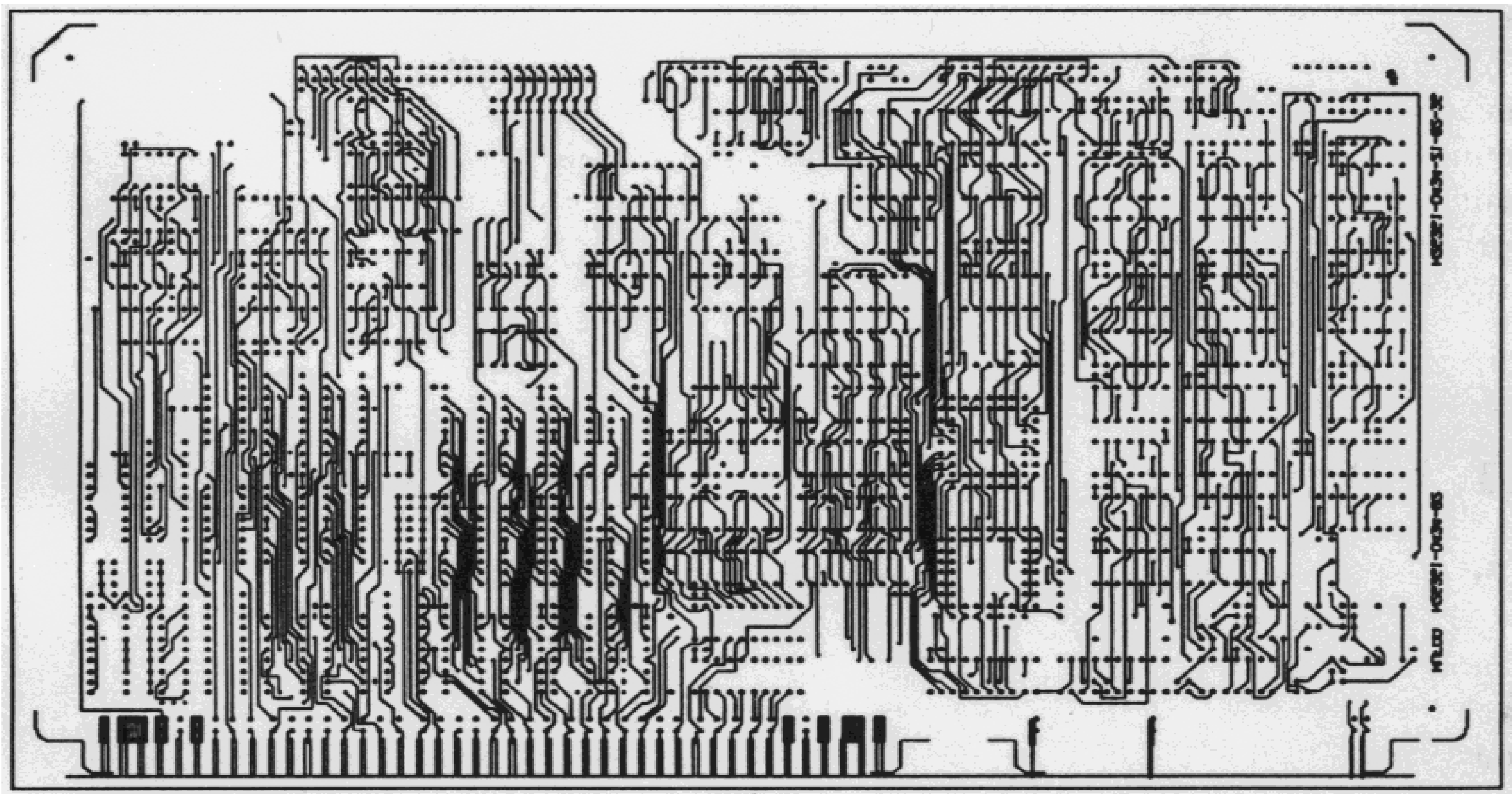
ドリル穴あけ順序決定問題

電子基盤に穴をあける（部品を埋め込む）順序を決定する問題.

総移動距離を最小化する
＝単位時間当たりの生産量最大化.

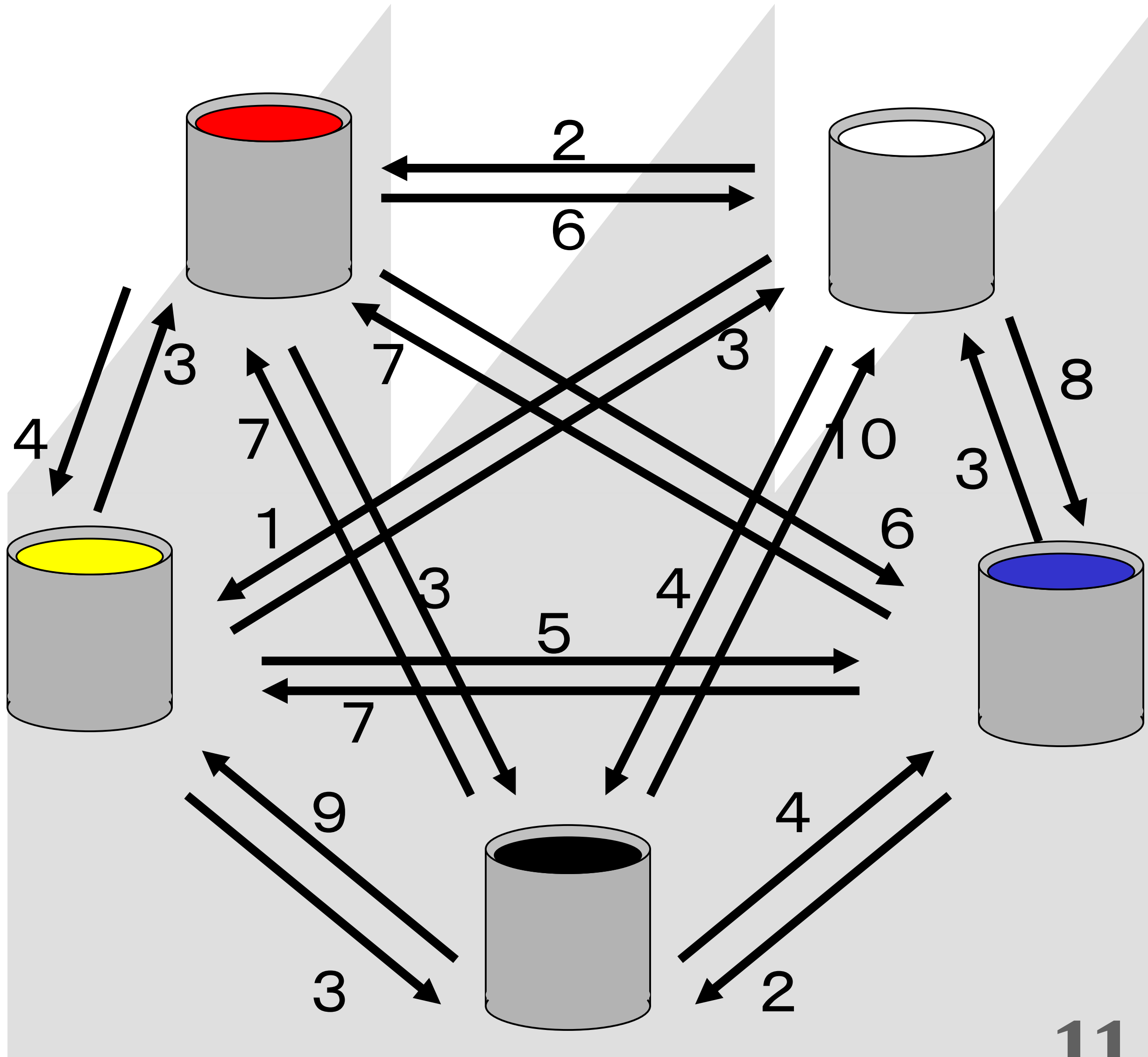


PCBマスク配線



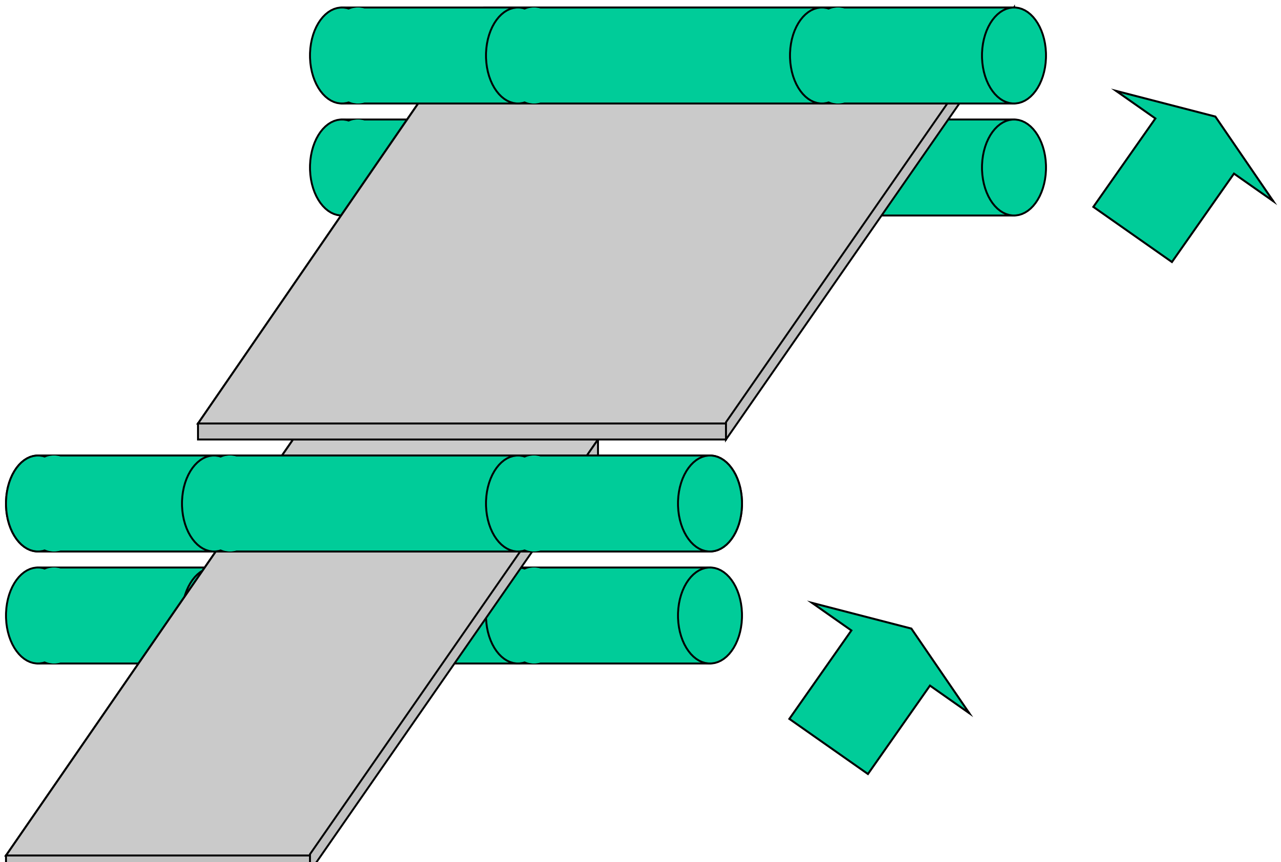
塗料工場の生産順序決定

- 要求の多い顧客
  →多品種少量生産
- 同一設備で複数の品種を生産
- 品種切替時に「段取り」ロスが発生
  →**段取りロスを最小化する生産順序の決定**
  - 段取りロスが前後の生産品種に依存すると、問題は**非対称TSP**



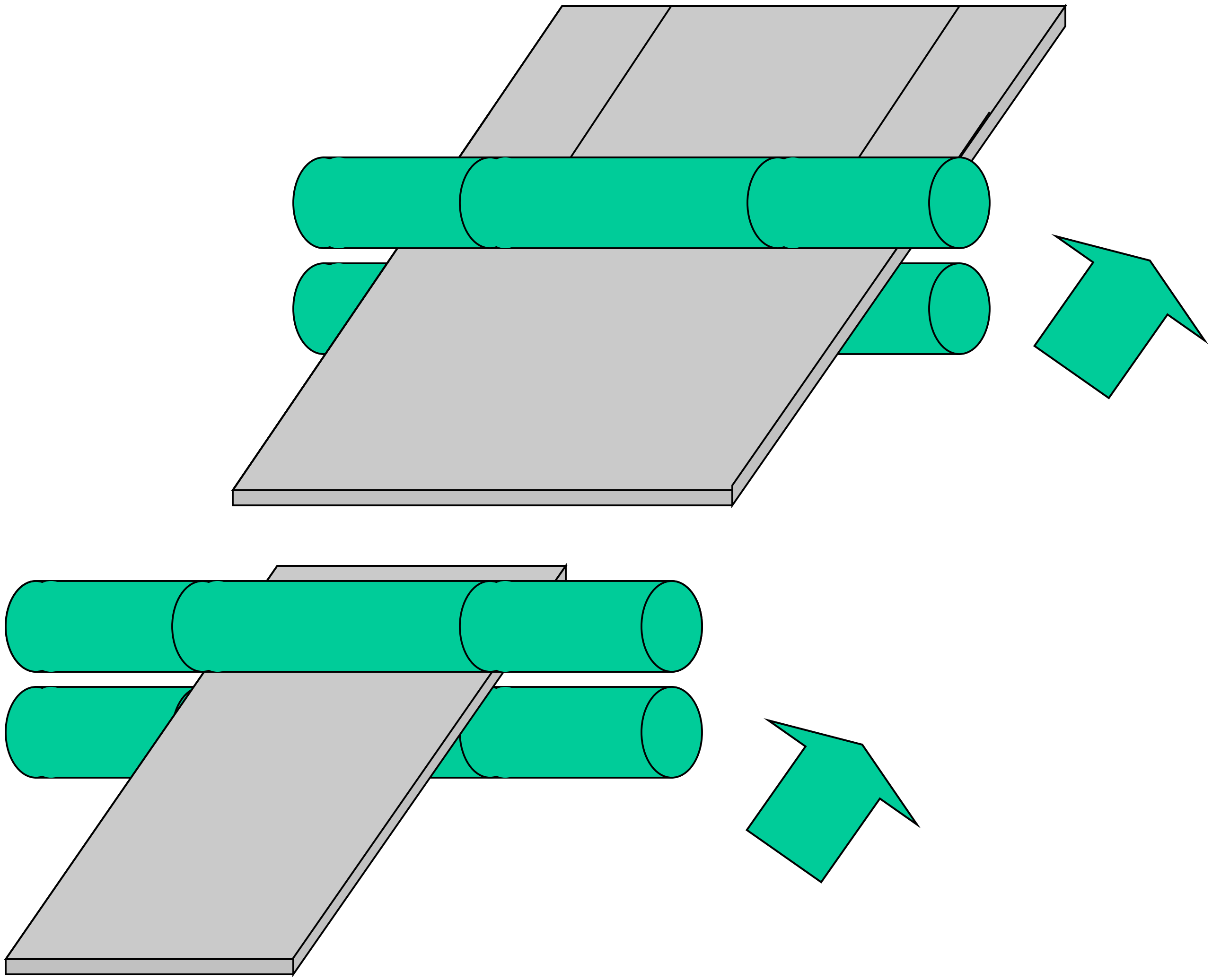
非対称TSPの応用例

製鉄所における圧延順序決定

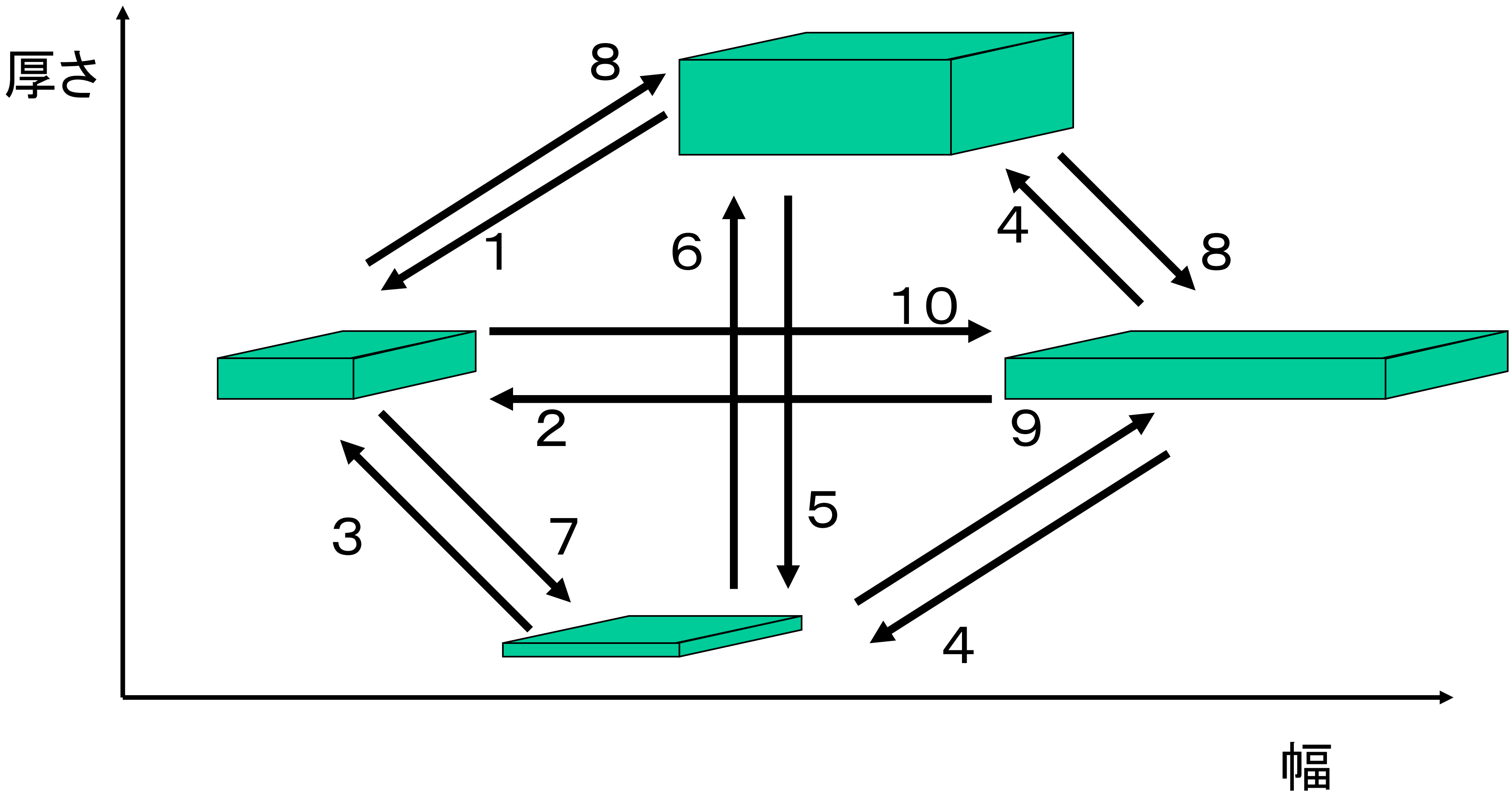


非対称TSPの応用例

製鉄所における圧延順序決定



非対称TSPの応用例
製鉄所における圧延順序決定

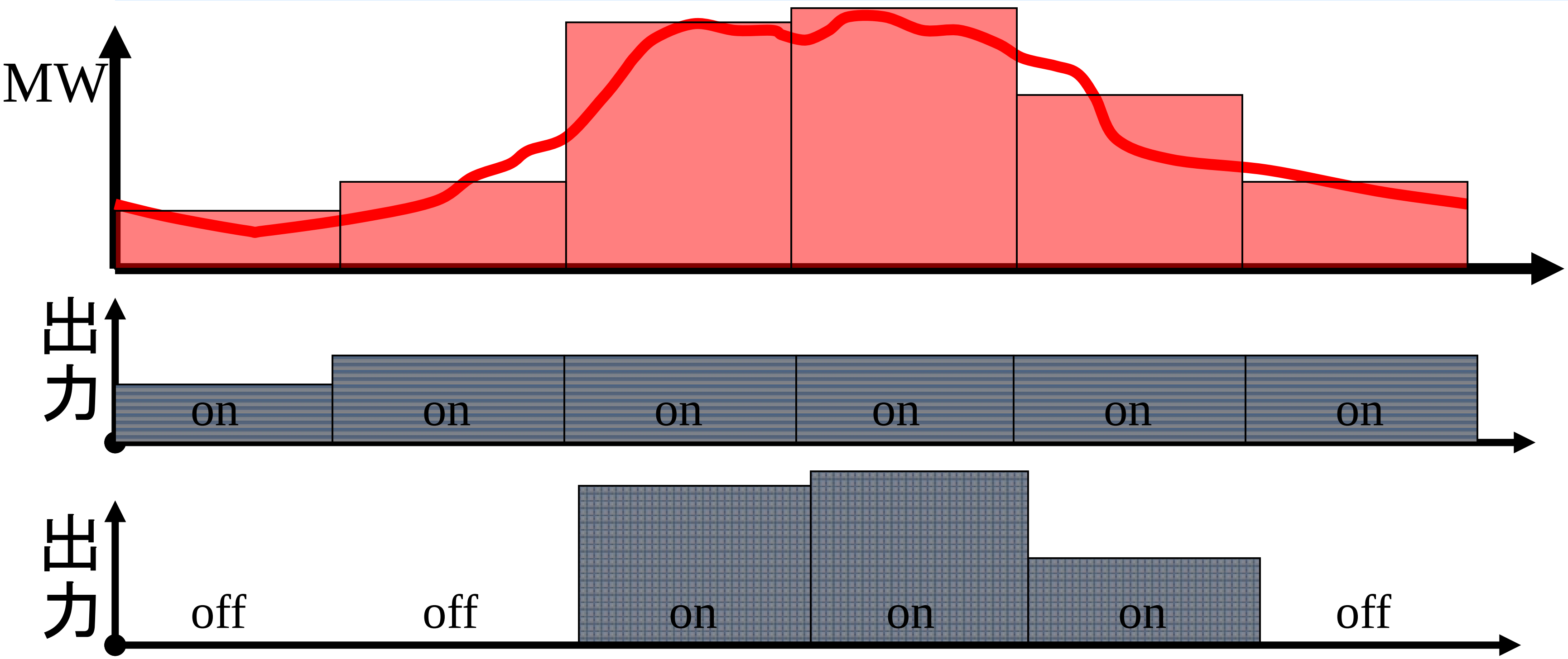


TSPの応用例

- 文字通り、巡回セールスマン
- Vehicle Routing Problem（配送／配車計画）
- 穴あけ順序、プロッタの描画順序
- ペイントショップの生産順序
- 製鉄所における圧延順序
- 鉄道における列車への車両（編成）の割当
- 訪問看護／介護の訪問順序
- 航空会社における遅延フライトの再計画
- ．．．

モデルの例：発電機起動停止問題

- unit commitment：電力システムにおけるスケジューリング問題(Shiina-Birge(2004))
- 各時間帯に与えられた電力需要を満足するように発電機のオン/オフおよび発電量を決定



数理計画法による定式化

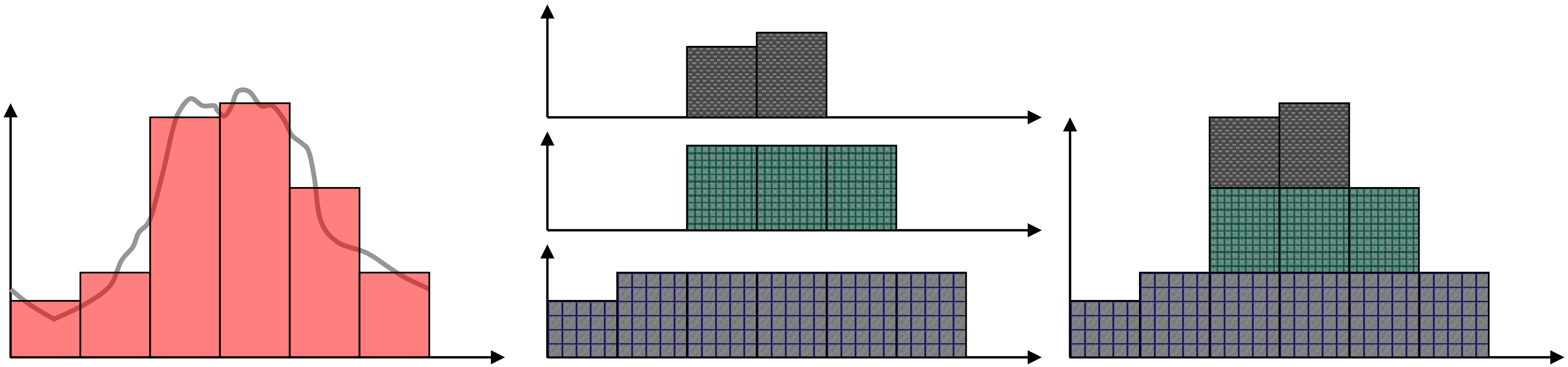
最小化：発電機の起動費用
＋発電機の燃料費（凸関数）の期待値
制約条件：需要制約（変動をシナリオとしてモデル化）
連続稼動制約（一旦運転すると一定時間以上稼動）
連続停止制約（一旦停止すると一定時間以上停止）
運転出力の上下限制約
予測不可能性制約（シナリオ制約）
決定変数：発電機の起動停止（整数変数）、出力（変動に対応）

整数条件を含むリコース型多期間確率計画問題

従来確定的であった電力需要の変動を考慮
問題の難しさ: 複数のシナリオの下で多期間にわたる
連続的決定（168h=24h×7日）

緩和法に基づく解法

- 区分線形近似（L-shaped法）は非効率
- 多期間にわたる決定の流れ（スケジュール）を求める必要



1. 需要制約を緩和して各発電設備毎に問題を分割して、動的計画法により効率的に起動停止スケジュールを生成
2. 電力需要を満たすように、生成したスケジュールを合成 し、出力を調整（2分探索法を応用）

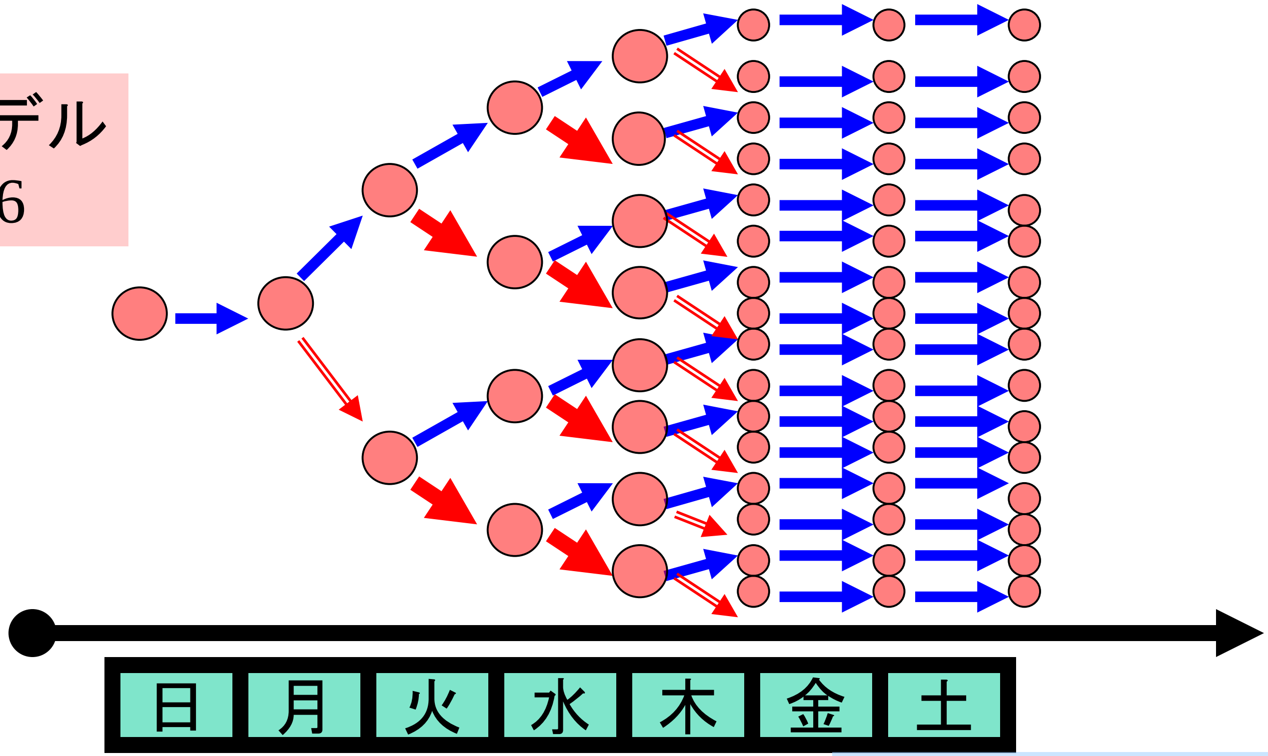
電力需要の変動シナリオ

確率計画モデル
シナリオ16

需要±0%

需要＋20%

需要＋10%



(5%, 10%, 10%, 5%)
(6%, 12%, 12%, 6%)
(7%, 14%, 14%, 7%)
(8%, 16%, 16%, 8%)
(9%, 18%, 18%, 9%)
(10%,20%,20%,10%)

確定的モデル
予備率を設定

16シナリオの平均
・
等間隔で6組の予備率
・
・
16シナリオの最大値

確定的モデルと確率計画モデルの比較

確定的モデルの解(スケジュール)を16個のシナリオに当てはめる

モデル:予備率(月,火,水,木)	最適コストの期待値の比率 (確率計画を1とする)
確定計画(5%,10%,10%,5%)	供給不足
確定計画(6%,12%,12%,6%)	供給不足
確定計画(7%,14%,14%,7%)	供給不足
確定計画(8%,16%,16%,8%)	供給不足
確定計画(9%,18%,18%,9%)	1.051
確定計画(10%,20%,20%,10%)	1.051
確率計画	1

- 多期間の計画において、制約侵犯が起こるリスクを回避
- 同時に供給費用の期待値を最小化

「モデルは皆の公約数」

公約数を扱う意義

- 解いたり動かすことが可能（操作可能性）
- 問題の構造化（構造化）
- 簡素な姿（単純化）
- 理想形を見極めること（理想化）
- 個別の問題が社会の問題（共通性）

これらは、モデル化に伴う**抽象化(abstraction)**により達成される

ORの定義

- 「ORはモデルに基づく科学的な方法、手法をシステムの設計･管理･運用に関する問題に適用して、システムを管理する人に問題に対する適切な解を提供する方法である」

チャーチマン、エイコフ、アーノフの古典的教科書の定義

ORの特徴

（1）合理的な意思決定のための科学的方法

（2）モデルを基礎とする問題の理解と解決

（3）問題解決の方法・技術に関する学問分野

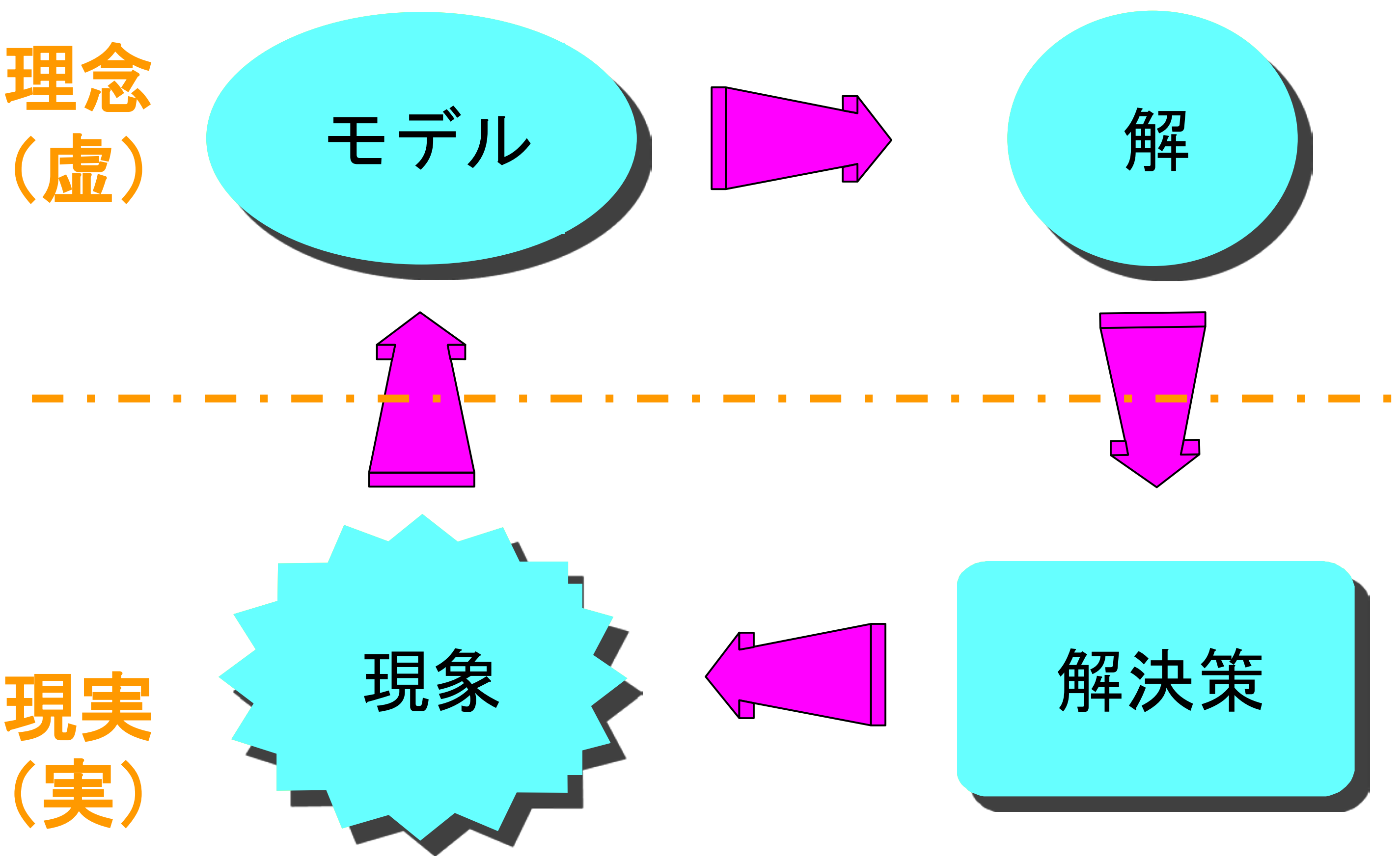
（4）学際的科学

（5）技術をうまく活用する技術

ORによる問題解決の基本要素

問題		モデル		解法
ロジスティクス（輸配送、立地等） スケジューリング（順序づけ、資源配分等） 生産（FMS）	→	最適化モデル（数理計画モデル） 線形計画モデル 組合せ最適化モデル（巡回セールスマン、ナップザック、施設配置、･･･） 非線形計画モデル シミュレーションモデル	→	最適解法（分枝限定法、切除平面法） メタ解法（タブー探索、アニーリング、ニューラルネット、遺伝的解法、･･･） 離散型シミュレーション

問題解決のサイクル



「OR」で勉強すること

- モデルとは何か、モデルを用いた分析技術（＝OR）とは何かを理解する
  （「モデルは皆の公約数」）
- ORの基本ステップを理解する
  問題→定式化→解法（→問題解決）
- いろいろなモデルを学ぶ
- いろいろな解法を学ぶ
- いろいろな応用を知る

関連する授業科目

- **<u>基礎OR</u>**（２年秋学期・ **必修**）
  椎名・蓮池
- **<u>OR演習</u>**（２年秋学期・**必修**）
  椎名・蓮池
- <u>確率とその応用</u>（２年・ 必修） 蓮池
- <u>OR－A</u>（３年・選択） 椎名（2016年度以降）
- <u>OR－B</u>（３年・選択） 蓮池
- 最適化・シミュレーション演習（3年）

モデル分類の視点

- 予測／評価／最適化
- 確定的／確率的
- 線形／非線形
- 静的（時間要因を含まず）／動的（含む）
- 連続／離散
- 解析解存在／解法（アルゴリズム）存在／シミュレーション

生産計画問題（2製品、3リソース）

- 早稲田工場では、鉄鋼、電力、労働力という3種類のリソースを使って、2種類の製品を生産している
- 来週の生産計画を立案したい
- 限られたリソースの範囲内で、利益最大の製品の生産単位数（非負実数ならよいものと仮定）を決めたい

	製品1	製品2	来週使えるリソース許容上限
鉄鋼	1	2	14
電力	1	1	8
労働力	3	1	18
利益	2	3	

数理計画問題（最適化問題）の定式化

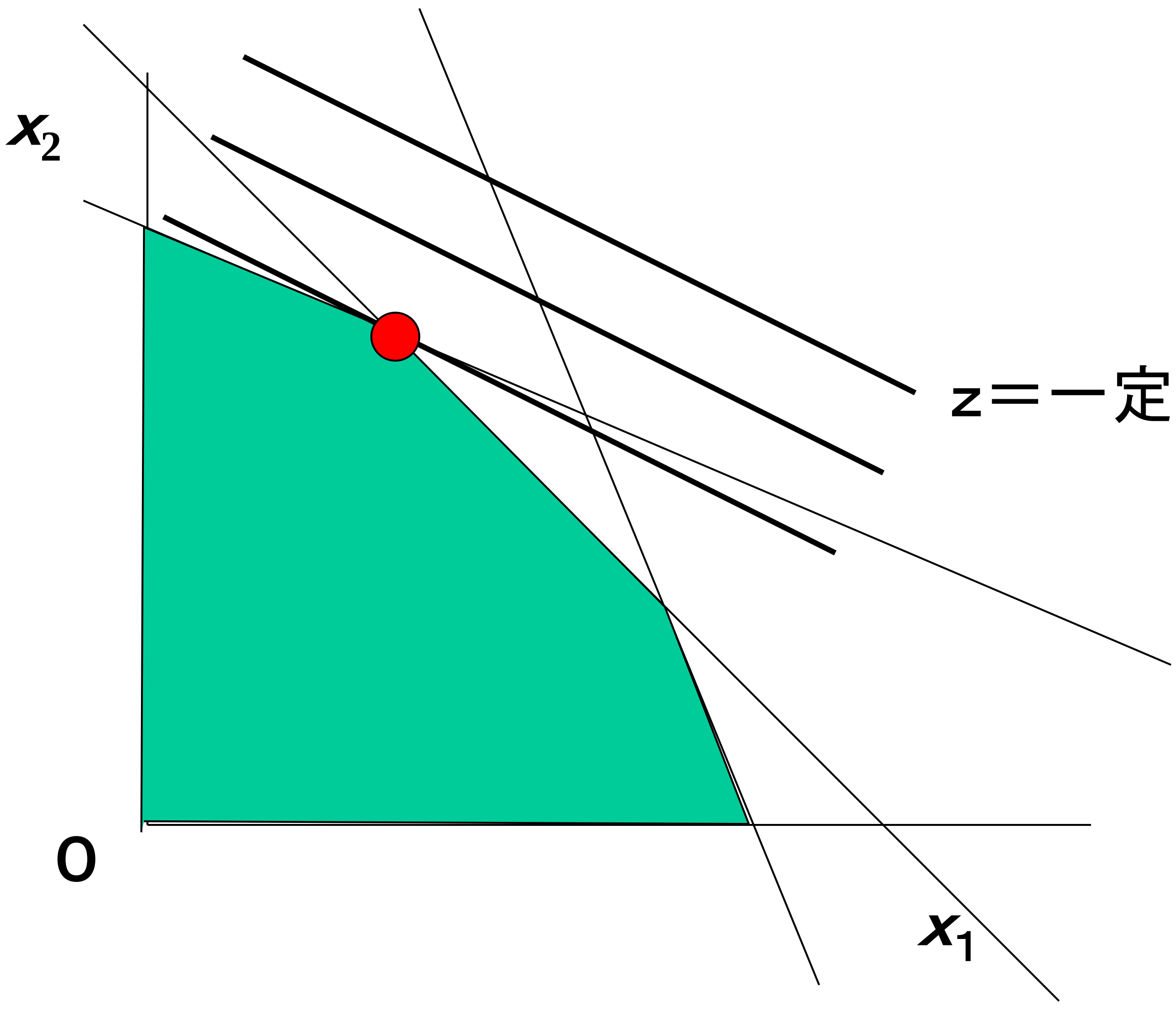
- **（決定）変数**(variables)の定義
  なにが制御可能か。なにを動かして最適化を達成しようとするのか。
- **目的関数**(objective function)の定義
  計画をどう評価するのか。評価値を大きくしたいのか、小さくしたいのか。
- **制約条件**(constraints)の定義
  どのような制約条件があるのか。

生産計画問題の定式化
線形計画問題

- （決定）変数（決めること）
  - 製品1の生産量　x_1
  - 製品2の生産量　x_2
- 最大化　$z = 2x_1 + 3x_2$（目的関数：利益）
- 制約（条件）

$$x_1 + 2x_2 \leqq 14 \text{（鉄鋼）}$$
$$x_1 + x_2 \leqq 8 \text{（電力）}$$
$$3x_1 + x_2 \leqq 18 \text{（労働力）}$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

生産計画問題の幾何学的表現

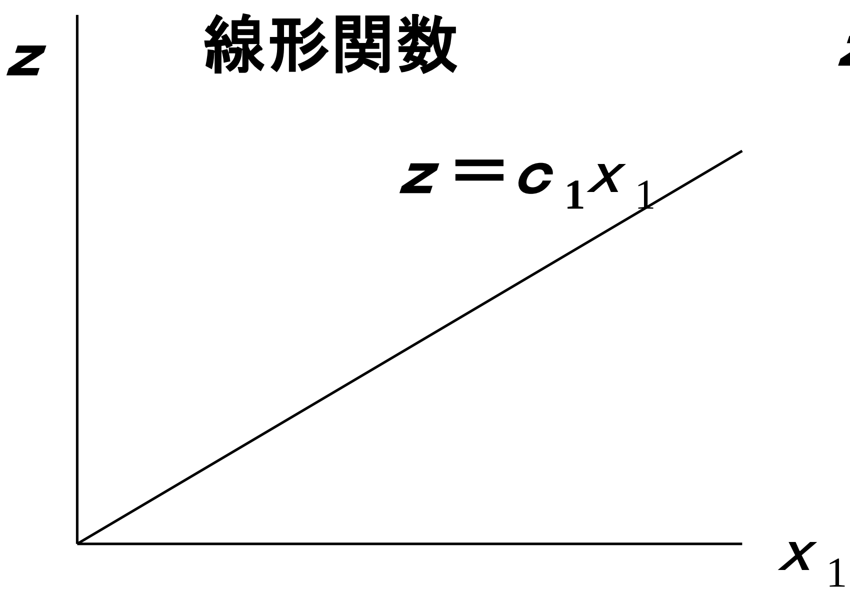


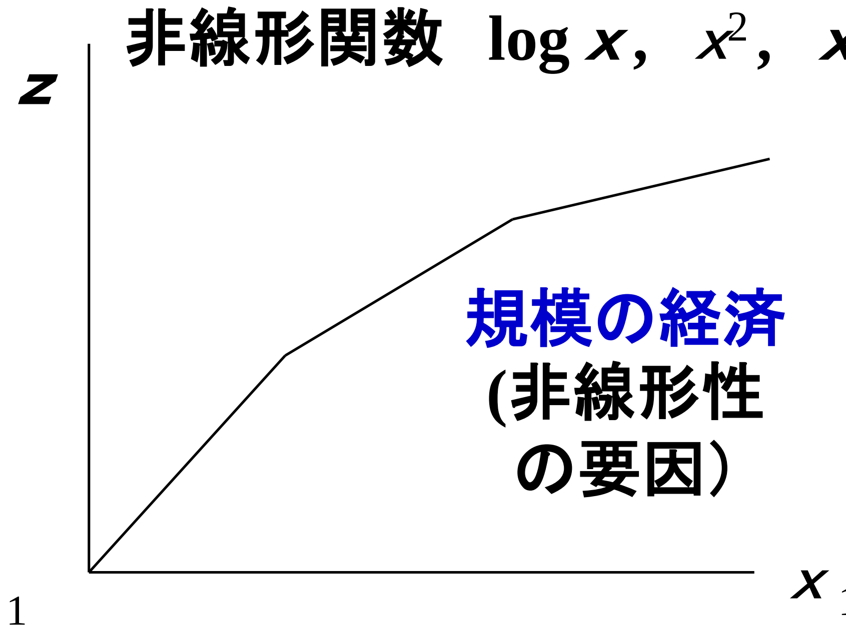
線形計画問題(LP)
(Linear Programming)

- 目的関数、制約条件がすべて線形関数からなる
- 変数は(原則として非負の)実数(連続変数)
- 最大化　$z = \Sigma_{j=1,\ldots,n}\, c_j x_j$
  制約条件　$\Sigma_{j=1,\ldots,n}\, a_{ij} x_j = b_i \quad , i=1,\ldots,m$
  $x_j \geqq 0 \quad , j=1,\ldots,n$
- 制約条件は, ≧または≦の不等式の場合あり
- 効率のよい解法が存在(単体法、内点法)

線形関数とは

- 生産量が倍になれば、必要となるリソースの量も倍になる
- 購入量が倍になれば、購入費用も倍になる
  – 世の中は必ずしも線形でないが、多くの実際問題が線形モデルで表現、あるいは、近似できる





整数計画問題（IP）
(Integer Programming Problem)

- 整数計画問題　＝
  線形計画問題　＋　変数の整数条件
- 多くの、重要な、組み合わせ「最適化問題」(Combinatorial Optimization Problem)が整数計画問題として表現可能
- 一般に、線形計画問題より解きにくい
- 0-1整数計画（組合せ最適化）⇒難しい問題
- （解析的には簡単そうだが、解の候補を列挙する手間が非常に大きい）

数理計画法(数理計画問題)あれこれ

- 線形計画法(Linear Programming)
  - 数理計画の基本
- 非線形計画法(NonLinear Programming)
  - 2次計画法(Quadratic Programming)
- ネットワーク計画法(Network Programming)
- 整数(線形)計画法(Integer Programming)
- 確率計画法(Stochastic Programming)
- 動的計画法(Dynamic Programming)
- ・・・

数理計画モデルをどう解くか

- 解析解　→　ほとんど期待できない
  例：根の公式、連立方程式のクラメルの公式
- 最適解法　→　反復的アルゴリズムによる求解
  与えられた問題（モデル）に対して最適性を保証する解法（この授業では最適解法を扱う）
- 近似解法、ヒューリスティックス解法　→　実用的、どれぐらい最適に近いかは分からない場合が多い；最適性の保証はないが、そこそこの解を出してくれる解法

（3製品版）生産計画問題

- 早稲田工場では、３つの製品、製品１、製品2、製品3を生産）
- 原料として、鉄鋼、電力、労働力を使用
- １個当たり

１個当たり	製品１	製品2	製品３	保有量
利益	２万円	３万円	４万円	
鉄鋼	１	２	３	14
電力	１	１	２	８
労働力	３	１	２	18

生産計画問題の定式化

- <u>変数</u>(決めること) → 変化させるセル
  - 製品1、2、3の生産量　x_1, x_2, x_3
- 最大化 $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ (<u>目的関数</u>:利益)
  → 目的セル
- <u>制約条件</u>

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leqq 14 \text{(鉄鋼)} \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqq 8 \text{(電力)} \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqq 18 \text{(労働力)} \\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

ソルバーの求解手順（1）シート設定

0. 問題を定式化

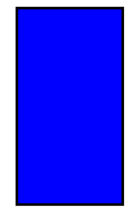
製品1　製品2　製品3

$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

（鉄鋼）　$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqq 14$

（電力）　$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leqq 8$

（労働力）　$3x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leqq 18$



1a. 係数行列作成

1b. 変数セルと目的セルの位置決定

1c. その他説明用の文字列等入力

1d. 制約左辺の値と目的関数値の計算式定義（SUMPRODUCT利用）

ソルバーの求解手順(2) ソルバー設定

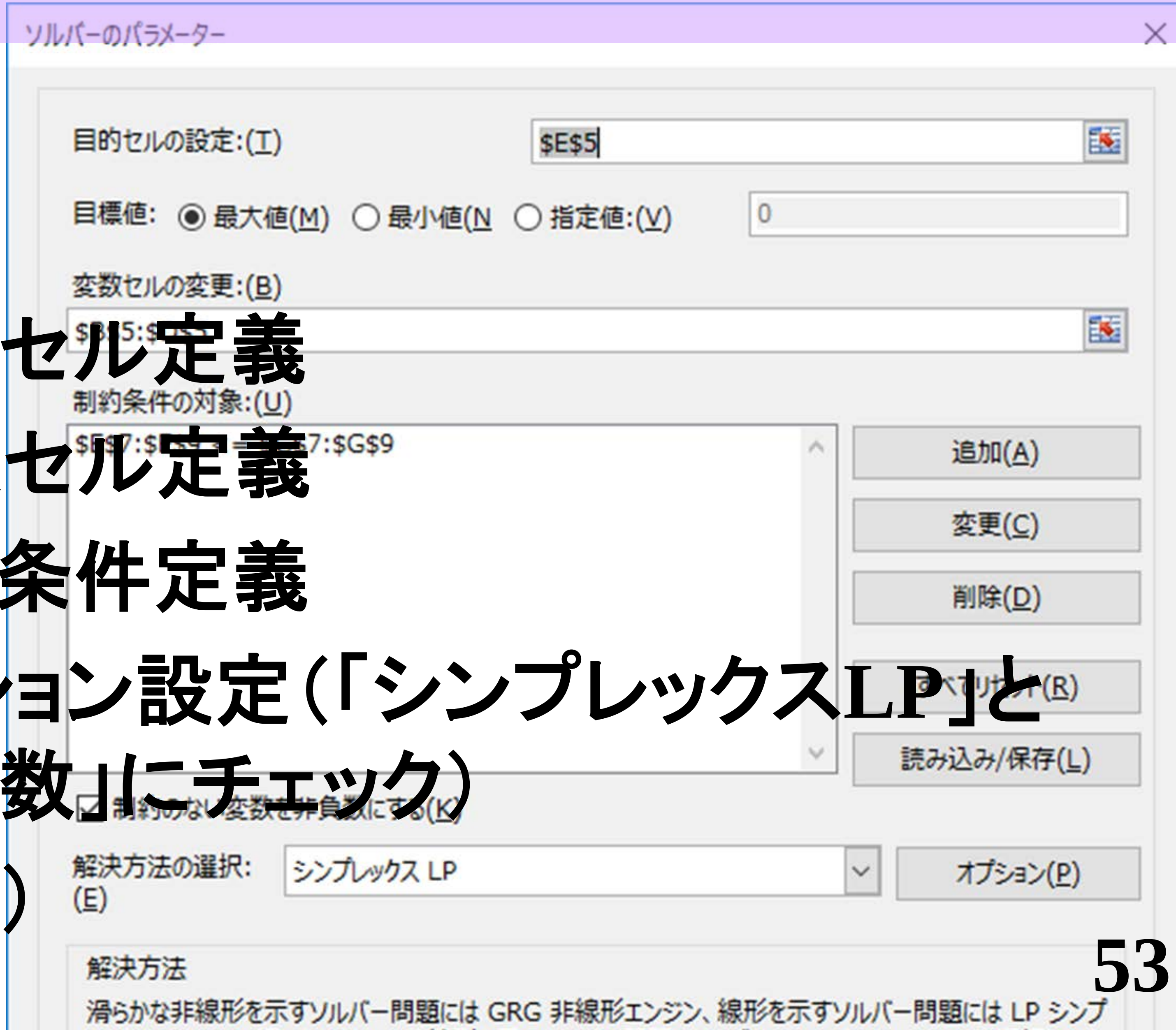
2a. 目的セル定義

2b. 変数セル定義

2c. 制約条件定義

3. オプション設定(「シンプレックスLP」と
「非負数」にチェック)

(4. 実行)



手順1　EXCELシートの設定

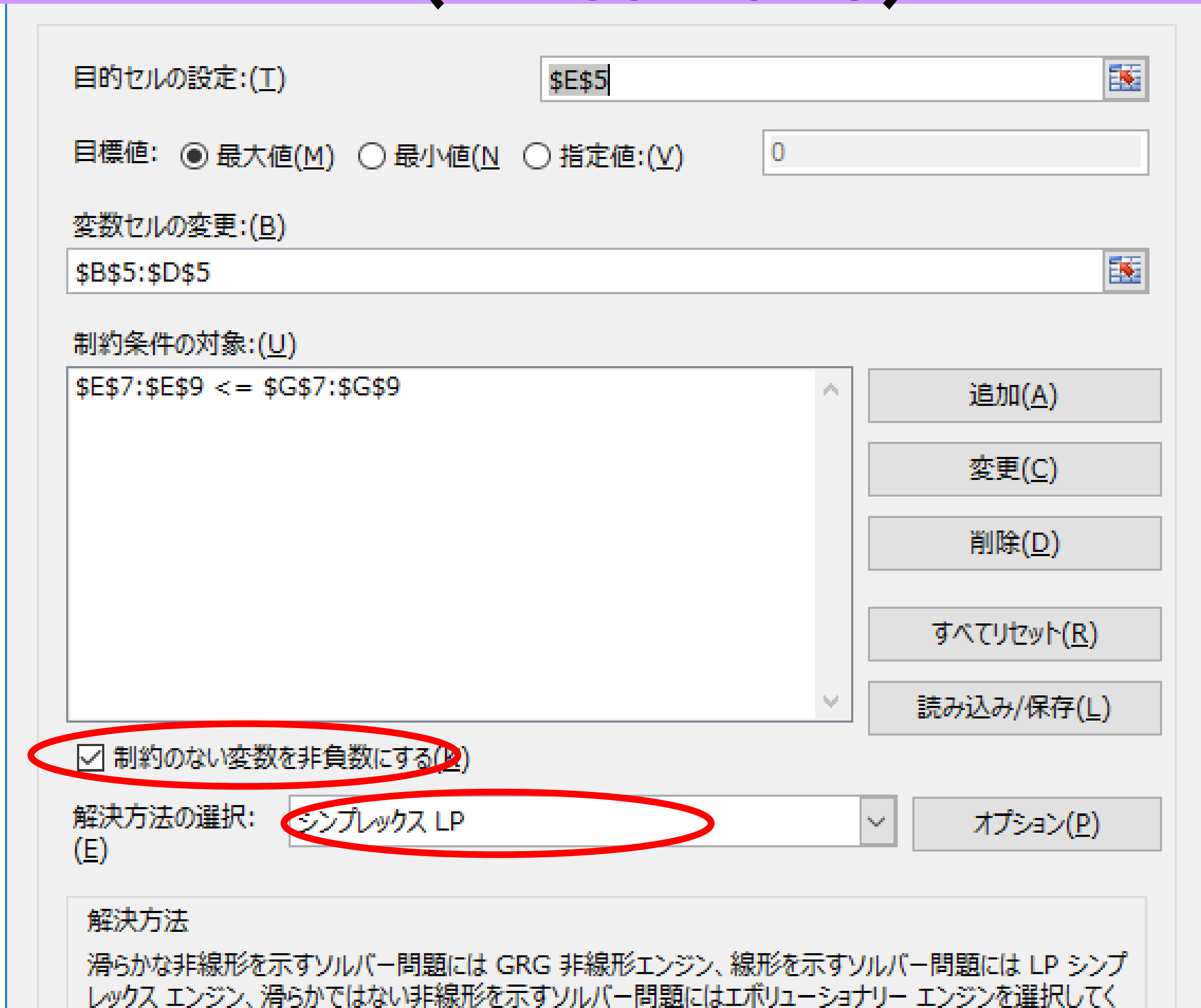
	A	B	C	D	E	F	G
1	鉄鋼電力労働力問題						
2							
3		製品1	製品2	製品3	総利益		
4		x1	x2	x3	z		
5	生産量				0		
6	単位当たり利益	2	3	4			許容上限
7	鉄鋼	1	2	3	0	≦	14
8	電力	1	1	2	0	≦	8
9	労働力	3	1	2	0	≦	18

変数（変化させるセル）

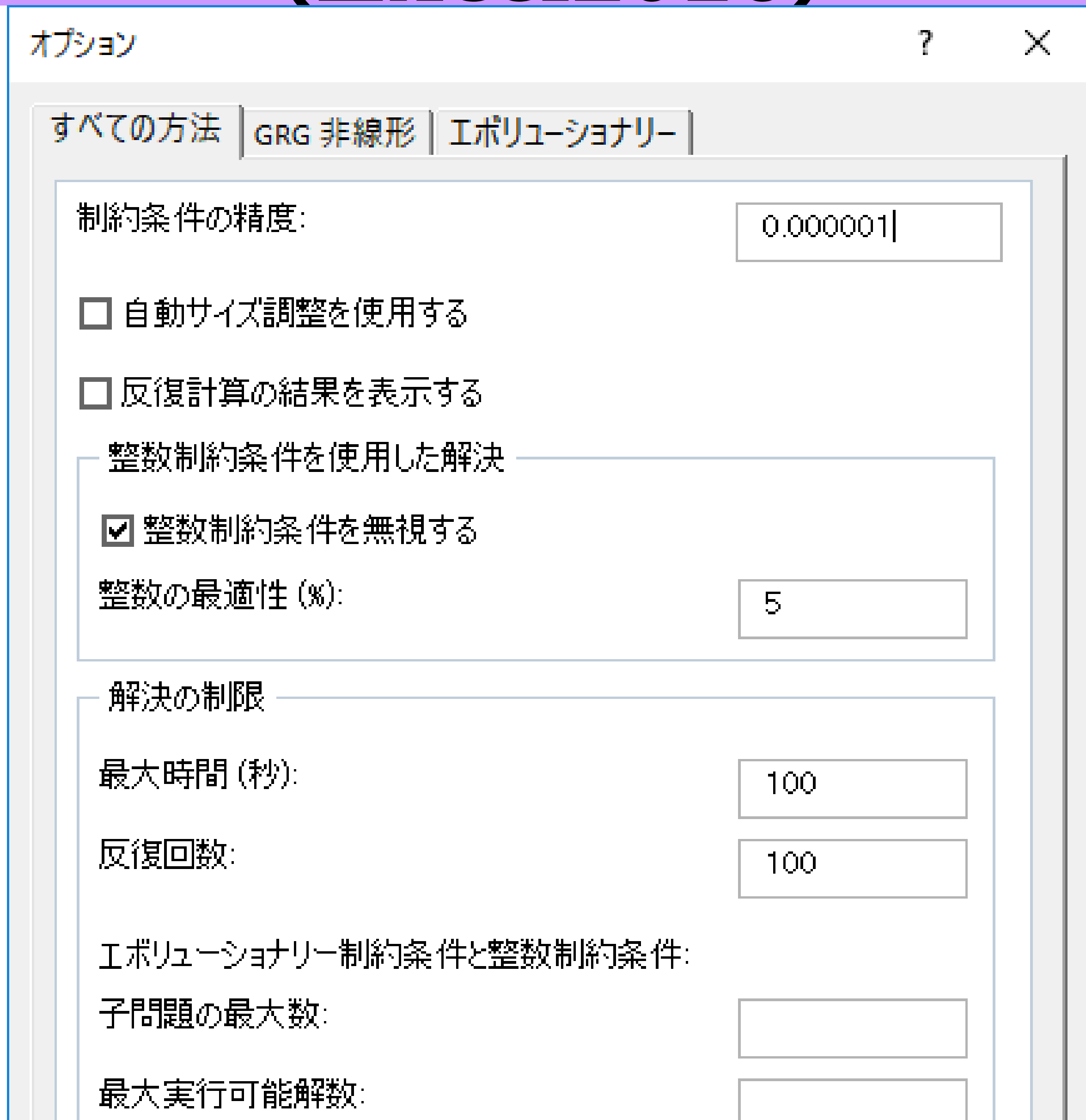
目的関数値（目的セル）
=SUMPRODUCT(B6:D6,$B$5:$D$5)

計算式の設定
SUMPRODUCT

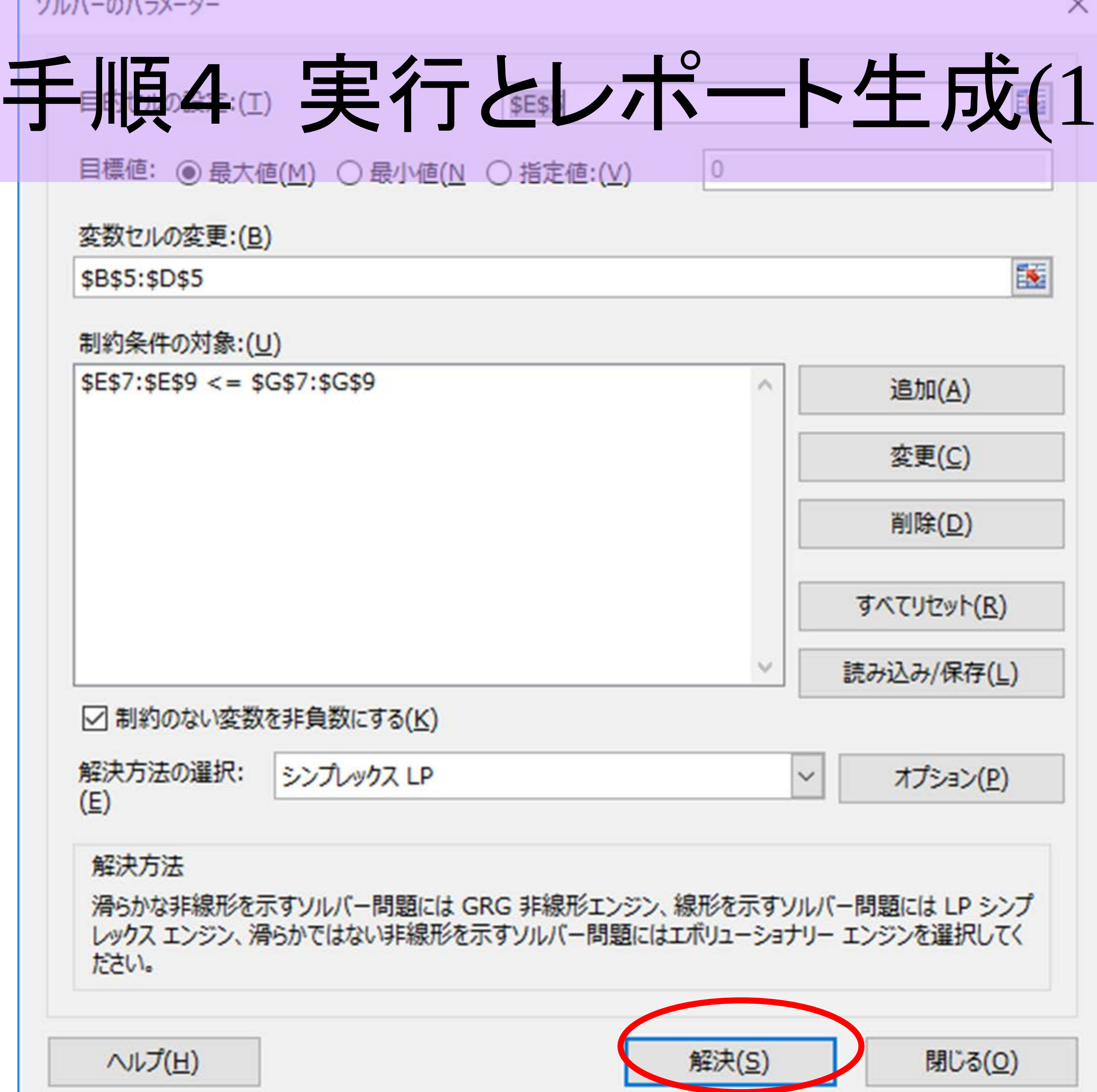
手順２　ソルバーパラメータ設定（Excel2016）



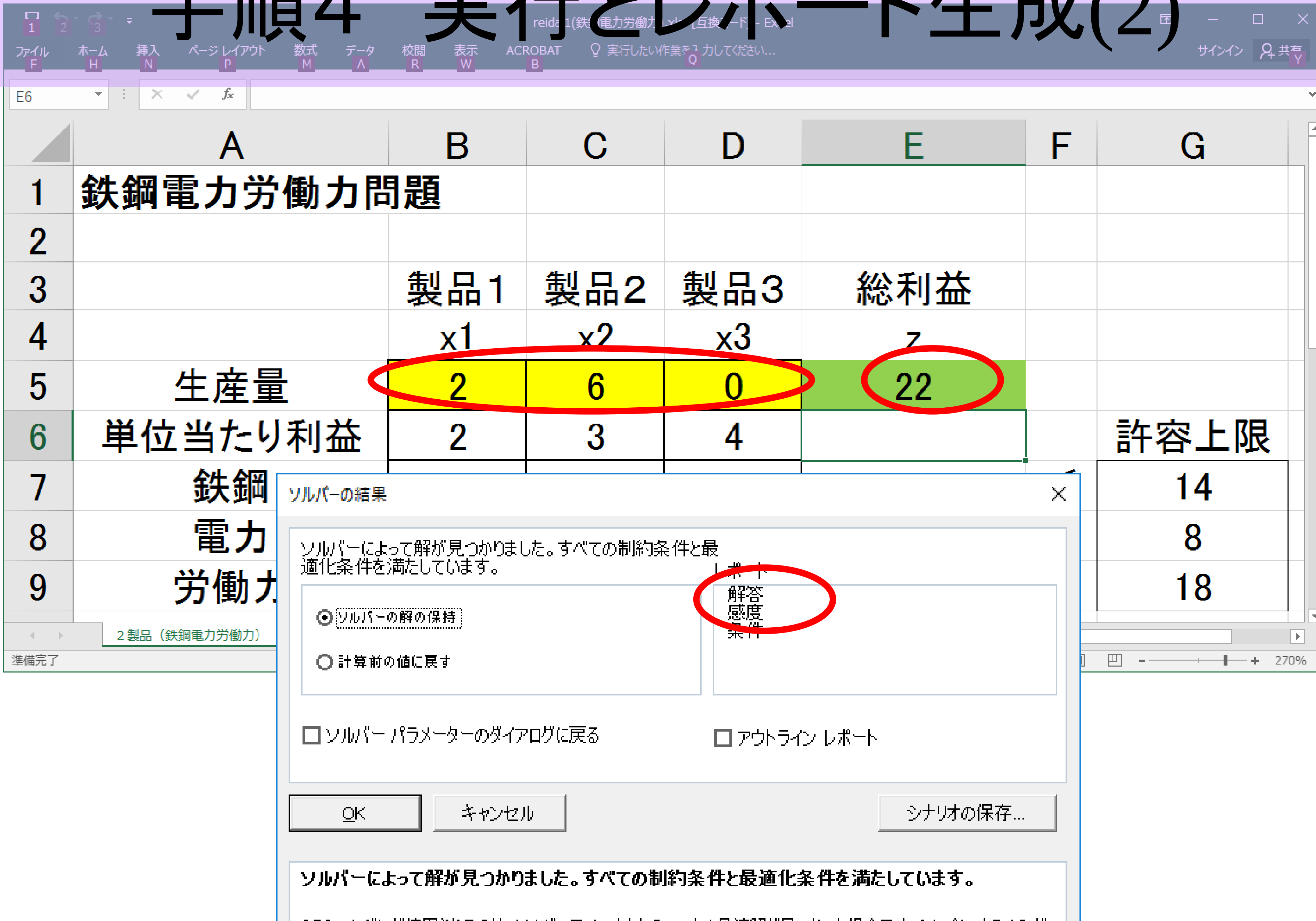
手順３　ソルバーオプション設定（Excel2016）



手順4 実行とレポート生成(1)



手順4　実行とレポート生成(2)



手順4　実行とレポート生成(3)

reidai1(鉄鋼電力労働力).xls [互換モード] - Excel

ファイル　ホーム　挿入　ページ レイアウト　数式　データ　校閲　表示　ACROBAT　実行したい作業を入力してください...

A1　Microsoft Excel 14.0 解答レポート

数式バー

Microsoft Excel 14.0 解答レポート
ワークシート名: [exercise1(鉄鋼電力労働力).xls]2製品(鉄鋼電力労働力)
レポート作成日: 2016/10/01 18:49:12
値: ソルバーによって解が見つかりました。すべての制約条件と最適化条件を満たしています。
ソルバー エンジン
　エンジン: シンプレックス LP
　解決にかかる時間: 0 秒間
　反復回数: 3 子問題: 0
ソルバー オプション
　最大時間 100 秒, 反復回数 100, Precision 0.000001
　子問題の最大数 無制限, 最大整数解数 無制限, 整数の公差 5%, 整数制約条件を使用しない解決, 非負数を仮定する

目的セル (最大値)

セル	名前	計算前の値	最終値
$E$5	生産量 z	0	22

変数セル

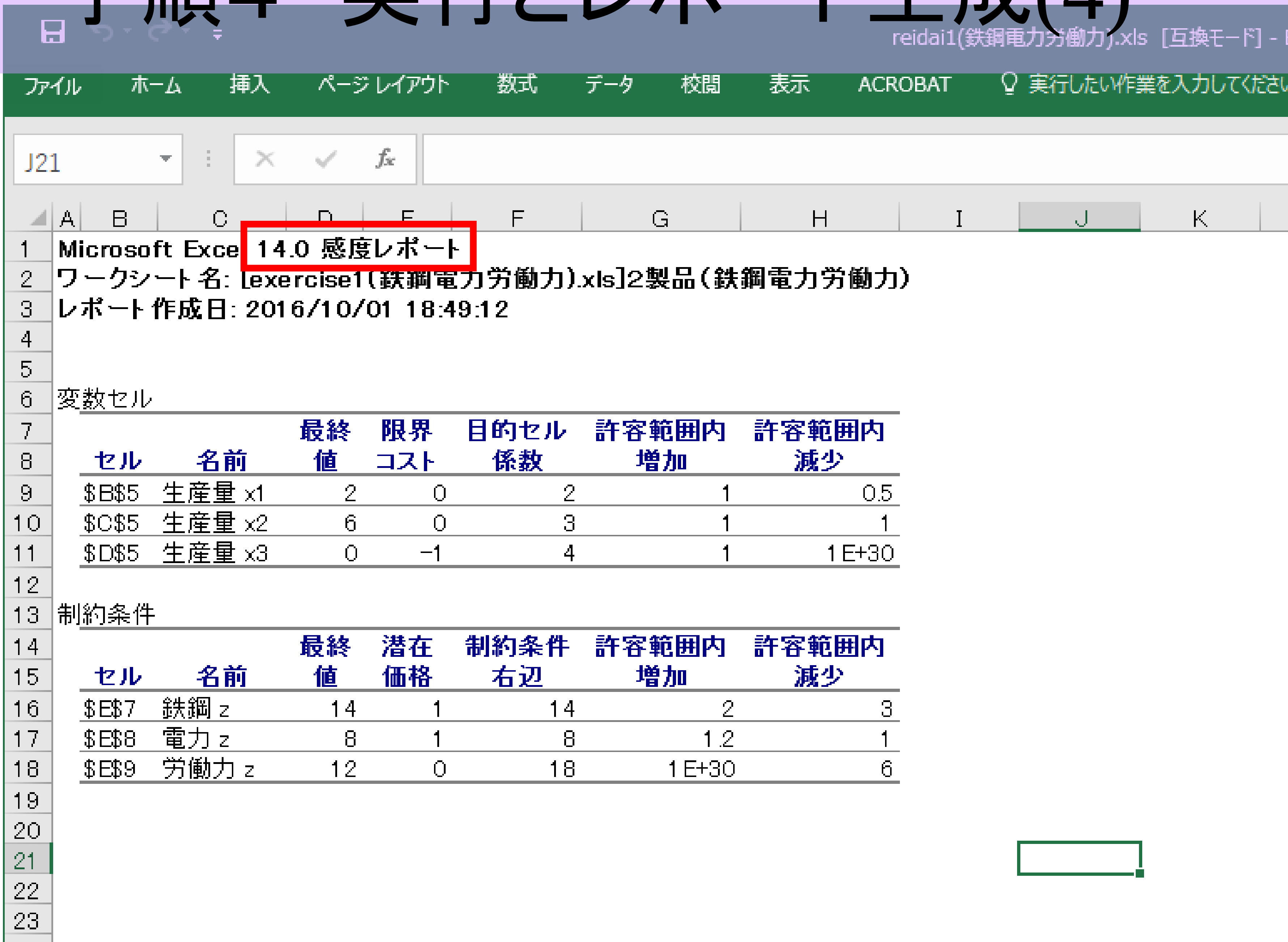
セル	名前	計算前の値	最終値	整数
$B$5	生産量 x1	0	2	連続
$C$5	生産量 x2	0	6	連続
$D$5	生産量 x3	0	0	連続

制約条件

セル	名前	セルの値	数式	ステータス	条件との差
$E$7	鉄鋼 z	14	$E$7<=$G$7	満たす	0
$E$8	電力 z	8	$E$8<=$G$8	満たす	0
$E$9	労働力 z	12	$E$9<=$G$9	部分的に満たす	6

2製品 (鉄鋼電力労働力)　解答レポート 1　感度レポート 1　条件レポート 1　Sheet1

手順4　実行とレポート生成(4)



Microsoft Excel 14.0 感度レポート
ワークシート名: [exercise1(鉄鋼電力労働力).xls]2製品(鉄鋼電力労働力)
レポート作成日: 2016/10/01 18:49:12

変数セル

セル	名前	最終値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$B$5	生産量 x1	2	0	2	1	0.5
$C$5	生産量 x2	6	0	3	1	1
$D$5	生産量 x3	0	-1	4	1	1E+30

制約条件

セル	名前	最終値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
$E$7	鉄鋼 z	14	1	14	2	3
$E$8	電力 z	8	1	8	1.2	1
$E$9	労働力 z	12	0	18	1E+30	6

ソルバー使用上の留意点

- 「変化させるセル」（変数セル）はなるべく一箇所にまとめる
  - 複数の部分に分かれている場合はコンマ区切り
- 式をコピーする場合は、セルの相対参照と絶対参照を使いわける（セルの絶対参照切替はF4）
- 「ソルバーのパラメータ」で、「制約のない変数を非負数にする」にチェックを入れ、「解決方法の選択」は「シンプレックスLP」を選択する
- 整数条件や０－１条件が必要なときは、制約条件の指定の中で、変化させるセルを「int」（＝整数）または「bin」（０－１）に指定する

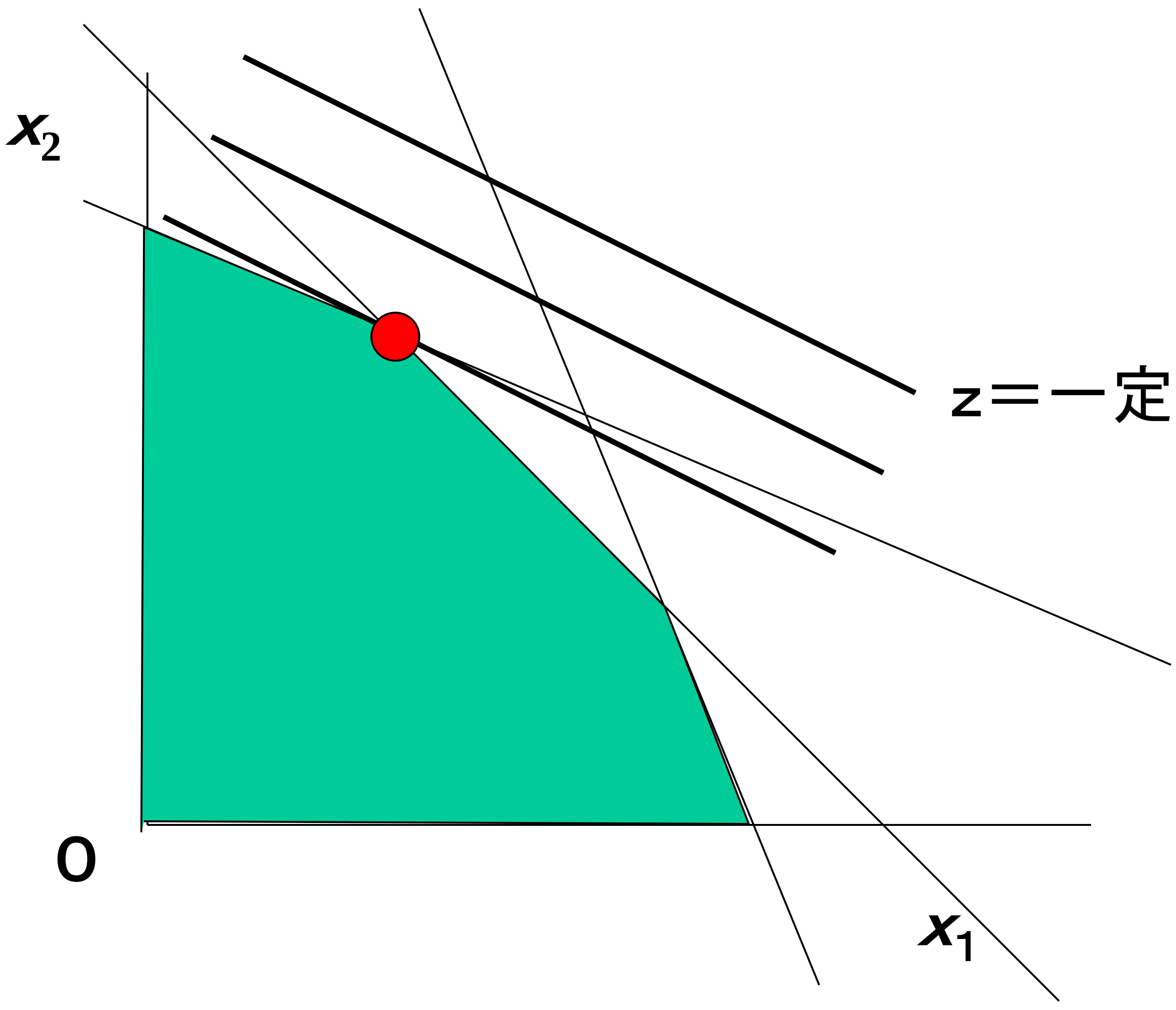
限界コスト、被約費用(reduced cost)

- 変数(列)に対応
- 二つの解釈が可能
①x_j=0である変数を無理に正にしようとしたときの、x_j単位当たりの目的関数値の増加の度合い
② x_j=0である変数を正にする可能性が生じる(つまり、最適解が最適でなくなる)目的関数の係数c_jの変化量
- 許容範囲内(増加—減少):現在の解が最適でありうる費用の範囲

潜在価格(shadow price), 双対価格(dual price)

- 制約条件式（行）に対応（別名：単体乗数 (simplex multiplier), 双対変数(dual variable)）
- 当該制約条件の右辺定数以外のすべての係数を元の問題のままにした上で、当該制約条件の右辺定数を微小量増加させたときの、増加単位量当たりの最適目的関数値の改善／改悪の度合い

生産計画問題の幾何学的表現



数理計画法の有効性

- 大規模な線形計画問題（LP）を高速に解く解法とパッケージが存在　　どれぐらいの問題が解ける？
- かなりの規模の整数計画問題（IP）／組合せ最適化問題も解ける
- 単に最適解を得るだけでなく、問題の情報（具体的には、制約条件や目的関数の係数）が変化した場合の「感度分析」が容易
- 線形計画問題や整数計画問題として把握可能な問題が多く存在（線形計画は石油業界、鉄鋼業界等、整数計画や組合せ最適化の応用領域は極めて広範）

第1回のキーワード

- 数理計画法（数理計画問題）、変数、制約条件、目的関数（評価関数）
- 線形関数とはなにか
- 定式化
- 線形計画問題の定式化
- EXCELソルバーによる求解
- 最適解、最適（目的関数）値、限界コスト、潜在コスト