基礎 OR／OR 演習　第 6 回

第 6 回演習課題

演習課題 6.1　次のナップサック問題を分枝限定法により解け。

（問題 KP-0）max $15x_1+18x_2+6x_3+2x_4$
subject to $4x_1+5x_2+2x_3+x_4 \leqq 6$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

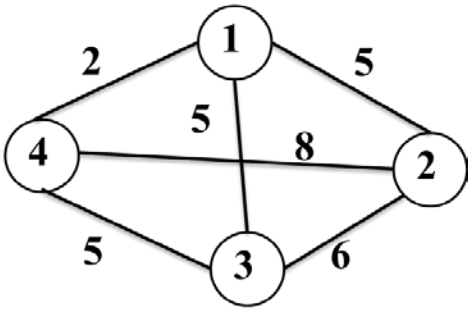
ただし、子問題選択は以下の規則に従うこと。
(1) 奥行優先則
(2) 幅優先則

演習課題 6.2　次のナップサック問題を動的計画法により解け。

max $7x_1+8x_2+3x_3$
subject to $3x_1+4x_2+2x_3 \leqq 6$
$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$

以下の関係式を用いること： $f_k(\lambda)=\max\{f_{k-1}(\lambda),\ c_k+f_{k-1}(\lambda-a_k)\}$
ただし、c_k, a_k を第 k 品目の価値と重さとし、$f_k(\lambda)=\max\{\Sigma_{j=1}^{k}\ c_j x_j \mid \Sigma_{j=1}^{k} a_j x_j \leqq \lambda, x_j \in \{0,1\}, j=1,\dots,k\}$と定義する。また初期設定として次の値を用いること。
$f_0(\lambda)=0$ ($\lambda \geqq 0$ のとき), $f_0(\lambda)=-\infty$ ($\lambda<0$ のとき),
$f_k(\lambda)=0$ ($\lambda=0, k>0$ のとき), $f_k(\lambda)=-\infty$ ($\lambda<0, k>0$ のとき)

演習課題 6.3　次の巡回セールスマン問題を動的計画法により解け。



関係式：$C(S,k) = \min_{m \in S-\{k\}} \{C(S-\{k\},m) + d_{mk}\}$を用いること。
ただし、 $C(S,k)$ は始点 1 を出発して点集合 S に含まれる点をすべてたどり、点 k に到達するときの（1 から k への）最小距離を表し、d_{mk} は点 m と k との距離を表す。

今回はレポート課題はなし。

演習課題 6.1

(1) 次のナップサック問題を分枝限定法によって解く。分枝方法は、連続緩和問題の最適解において 0-1 条件を満たさない変数を 0 と 1 に固定することによって行う。また、子問題選択には<u>奥行優先則</u>を用いる。さらに、連続緩和問題の最適解において 0-1 条件を満たさない変数を 0 に固定することにより、最適目的関数値の下界値が得られる。次の列挙木の空欄を埋めよ。

（問題 KP-0） max $15x_1+18x_2+6x_3+2x_4$

subject to $4x_1+5x_2+2x_3+x_4 \leqq 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

問題番号 0
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________________
暫定目的関数値 ____________________

分枝 ________ =0

分枝 ________ =1

問題番号 1
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________________
暫定目的関数値 ____________________
分枝停止の理由 ____________________

問題番号 2
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________________
暫定目的関数値 ____________________

分枝 ________ =0

分枝 ________ =1

問題番号 3
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________________
暫定目的関数値 ____________________

問題番号 4
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________________
暫定目的関数値 ____________________
分枝停止の理由 ____________________

分枝 x_3 =0

分枝 x_3 =1

問題番号 5
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________________
暫定目的関数値 ____________________
分枝停止の理由 ____________________

問題番号 6
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________________
暫定目的関数値 ____________________
分枝停止の理由 ____________________

奥行優先則では、　　　　　　　　　　　　の順に解いている。

(2) 次のナップサック問題を分枝限定法によって解く。分枝方法は、連続緩和問題の最適解において 0-1 条件を満たさない変数を 0 と 1 に固定することによって行う。また、子問題選択には幅優先則を用いる。さらに、連続緩和問題の最適解において 0-1 条件を満たさない変数を 0 に固定することにより､最適目的関数値の下界値が得られる。次の列挙木の空欄を埋めよ。

（問題 KP-0）max $15x_1+18x_2+6x_3+2x_4$

subject to $4x_1+5x_2+2x_3+x_4 \leqq 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

問題番号 0
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________
暫定目的関数値 ____________

分枝 ______ =0

分枝 ______ =1

問題番号 1
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
21
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________
暫定目的関数値 ____________
分枝停止の理由 ____________

問題番号 2
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________
暫定目的関数値 ____________

分枝 ______ =0

分枝 ______ =1

問題番号 3
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________
暫定目的関数値 ____________
分枝停止の理由 ____________
____

問題番号 4
連続緩和問題の最適解
x_1 =______, x_2 =______, x_3 =______, x_4 =______
連続緩和問題の最適目的関数値
____
非整数値切り下げによる実行可能解
に対する目的関数値____________
暫定目的関数値 ____________
分枝停止の理由 ____________

幅優先則では、　　　　　　　　　の順に解いている。

ナップサック問題に対する動的計画法

(KP) 最大化 $z=\Sigma^{n}_{j=1}\ c_j x_j$

制約 $\Sigma^{n}_{j=1}\ a_j x_j \leqq b$

$x_j \in \{0,1\},\ \forall\ j$

$f_k(\lambda)=\max\ \{\Sigma^{k}_{j=1}\ c_j x_j \mid \Sigma^{k}_{j=1}\ a_j x_j \leqq \lambda,$
$x_j \in \{0,1\},\ j=1,\ldots,k\}$

$f_k(\lambda)$: n個の品物のうち、$j=1,\ldots,k$ 個までの 品物を容量λの
ナップサックに入れる問題の最適目的関数値

最終的に $f_n(b)$を求めればよい

<u>漸化式</u> $f_k(\lambda)=\max\{\ f_{k-1}(\lambda),\ c_k+f_{k-1}(\lambda-a_k)\}$

=max{品物kを入れない利益, 品物kを入れる利益}

- $f_k(\lambda)$を定義するナップサック問題の解においては、品物kが入るかまたは入らないということを考える
- 品物kが入らない場合：容量λのナップサックに$j=1,\ldots,k\text{-}1$個までの品物を入れるときの利益
- 品物kが入る場合：品物kを入れて、残り容量$\lambda-a_k$に$j=1,\ldots,\ k\text{-}1$個までの品物を入れるときの利益

ナップサック問題：例題

(KP) 最大化 $z=7\ x_1+8\ x_2+3\ x_3$

制約 $3\ x_1+4\ x_2+2\ x_3 \leqq 6$

$x_j \in \{0,1\},\ \forall\ j$

最適解を求めよ。ただし、記号を以下のように定義する。

$f_1(\lambda)=\max\{\ 7\ x_1 \mid 3\ x_1 \leqq \lambda,$
$x_j \in \{0,1\},\ j=1\}$

$f_2(\lambda)=\max\{\ 7\ x_1\ +8\ x_2 \mid 3\ x_1\ +4\ x_2 \leqq \lambda,$
$x_j \in \{0,1\},\ j=1,2\ \}$

$f_3(\lambda)=\max\{\ 7\ x_1\ +8\ x_2\ +3\ x_3 \mid 3\ x_1\ +4\ x_2\ +2\ x_3 \leqq \lambda,$
$x_j \in \{0,1\},\ j=1,2,3\ \}$

$f_1(\lambda)$ の結果から$f_2(\lambda)$を求め、$f_2(\lambda)$の結果から$f_3(\lambda)$

<u>$f_k(\lambda)$を計算する場合$f_{k-1}(\lambda)$は既に計算済</u>

初期設定：$f_k(0)=0$ (λ=0のとき), $k=0,1,2,3$, $f_0(\lambda)=0$ (λ>0のとき),
f_k(負の数)$=-\infty$ (λ<0のとき) , $k=0,1,2,3$
実行不可能(容量オーバー)な場合を除外するため

ナップサック問題：解答例

(KP) 最大化 $z=7\ x_1+8\ x_2+3\ x_3$

制約 $3\ x_1+4\ x_2+2\ x_3 \leqq 6,\ x_j \in \{0,1\},\ \forall\ j$

$f_k(\lambda)=\max\{\ f_{k-1}(\lambda),\ c_k+f_{k-1}(\lambda-a_k)\}$

最終的に、$f_n(b)$を求めたい
次の順に計算
$f_1(1) \Rightarrow f_1(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_1(b)$
$f_2(1) \Rightarrow f_2(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_2(b)$
…
$f_n(1) \Rightarrow f_n(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f_n(b)$

$k=1$のとき

$f_1(1)=\max\{\quad ,\quad \}=\max\ \{\ ,\quad \}=\ ,$
$f_1(2)=\max\{\quad ,\quad \}=\max\ \{\ ,\quad \}=\ ,$
$f_1(3)=\max\{\quad ,\quad \}=\max\ \{\ ,\quad \}=\ ,$
$f_1(4)=\max\{\quad ,\quad \}=\max\ \{\ ,\quad \}=\ ,$
$f_1(5)=\max\{\quad ,\quad \}=\max\ \{\ ,\quad \}=\ ,$
$f_1(6)=\max\{\quad ,\quad \}=\max\ \{\ ,\quad \}=\ ,$

$k=2$のとき

$f_2(1)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$
$f_2(2)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$
$f_2(3)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$
$f_2(4)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$
$f_2(5)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$
$f_2(6)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$

$k=3$のとき

$f_3(1)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$
$f_3(2)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$
$f_3(3)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$
$f_3(4)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$
$f_3(5)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$
$f_3(6)=\max\{\quad ,\quad \}=\ ,$

k λ	1	2	3	4	5	6
$f_1(\lambda)$						
x_1						
$f_2(\lambda)$						
x_2						
$f_3(\lambda)$						
x_3						