基礎 OR／OR 演習　第 5 回

第 5 回演習課題

演習課題 5.1　(1)以下の Dijkstra 法のアルゴリズムに従って、最短路を求めよ。なお、π_i(現在の反復までに求められた点 i への最短距離)は空欄に記入し、 p_i(現在の反復までに求められた点 i への最短路の直前点)はネットワークの辺に記入せよ。

- ステップ 1 ： $\pi_0=0$, $\pi_j=\infty$　($j \in V-\{0\}$), $M=\{1,2,...,n\}$,　$i=0$
- ステップ 2 ： $M\neq\varphi$(空集合)でない場合(i)(ii)(iii)を繰り返す
  - (i)　$j\in M$ に到達する直前点を可能なら仮に i とする。
    $j\in M$ に対し $\pi_j > \pi_i + c_{ij}$ ならば $\pi_j = \pi_i + c_{ij}$, $p_j = i$
  - (ii) $j\in M$ への暫定的最短距離から最小の $\min_{j\in M} \pi_j = \pi_k$ となる k を求める。
  - (iii) k を M から除く、$i=k$ とする(k からの探索を行う)。

(2)課題 5.1(1)の最短路問題を線形計画問題として定式化せよ。また、この問題の双対問題を示せ。さらに最適解において、相補スラック条件が成立することを示せ。

演習課題 5.2　工場 4 か所から倉庫 3 か所への輸送問題を考える。工場 i から倉庫 j への単位輸送量あたりの輸送コスト, 工場 i からの供給量, 倉庫 j の需要量は表のように与えられている。最小費用となる各工場から各倉庫への輸送量を求める。
(1)ハウザッカー法により実行可能解を求め、表に輸送量を記入し、総輸送費用を求めよ。
(2)飛び石法により解を改善せよ。
(3)改善された解が、最適解であることを示せ。
(4)この問題を線形計画問題として、単体法で解け。

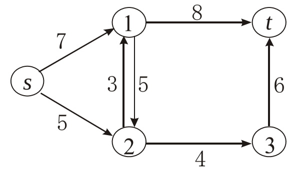
第 5 回宿題　（提出期限：次週月曜　13 時 00 分；経営実験室）

宿題 5.1　練習 3.7 および練習 3.8(テキスト p.105)を解け。

(**発展的課題 5.2** 最小全域木を求める Kruskal 法において、どのように閉路を検出すればよいか。簡潔に示せ。)

例題1:最短路問題

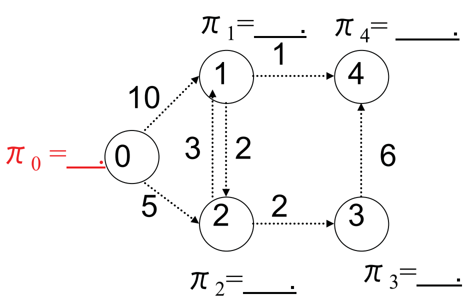
線形計画問題による定式化と双対問題を示せ。



Dijkstra(ダイクストラ)法

- ステップ1 : $\pi_0=0, \pi_j=\infty$ $(j\in V-\{0\})$, $M=\{1,2,\ldots,n\}$, 探索開始点$i=0$
- ステップ2 : $M\neq\varphi$(空集合)でない場合(i)(ii)(iii)を繰り返す
  - (i) $j\in M$ に到達する直前点を可能なら仮に i とする
    $j\in M$に対し$\pi_j>\pi_i+c_{ij}$ならば$\pi_j=\pi_i+c_{ij}, p_j=i$
  - (ii) $j\in M$への暫定的最短距離から最小の
    $\min_{j\in M}\pi_j=\pi_k$となる k を求める
  - (iii) k を Mから除く、$i=k$ とする(kからの探索を行う)

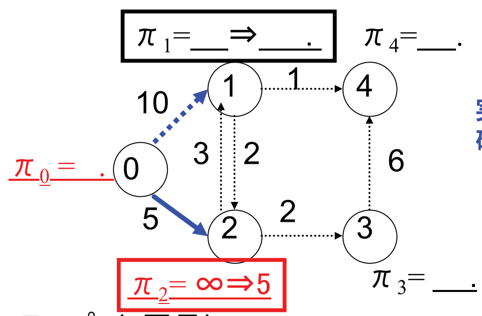
•M:最短路未確定な点の集合(Mから削除されると最短路確定)
•p_j:点 jへの最短路の直前点(終了時)
•点i: 探索を行う点(i は最短路決定、i を直前点とする探索)



- 辺上の数字は辺の長さ

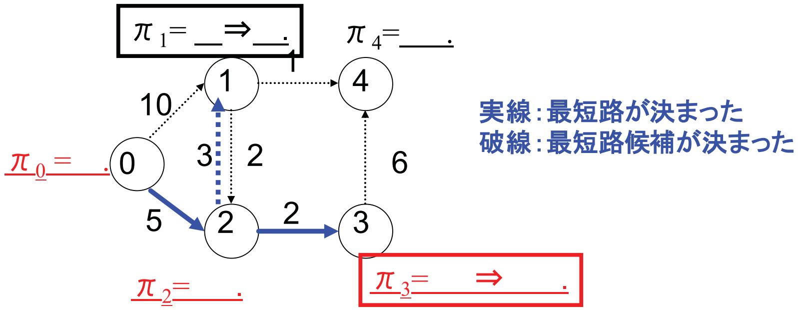
ステップ1:
π_0=___, π_i=___, $(i\in M)$,
M={____________}
点___のみ最短路確定
i=__ よりスタート

•M:最短路未確定
•Mから出ると最短路確定



実線:最短路が決まった
破線:最短路候補が決まった

ステップ2(1回目):i=___, M={________}
(i) M={_______}に到達する直前点を可能なら仮に i=0とする
j=1についてはπ_1 なのでπ_1=__________, p_1=___.
j=2についてはπ_2 なのでπ_2=__________, p_2=___.
j=3,4については、直接i= と接続していないのでそのまま
(ii) $\min_{j\in M}\pi_j$=min {____________} = _____.
点k=__の最短路確定: 1に到達する直前点が p_k =___となる
(iii) k=___ をMから削除し、i=___より再びステップ2を行う



ステップ2（2回目）: i=__, M={________}

(i) M={_____}に到達する直前点を可能なら仮に i=__とする

j=1についてはπ_1________なのでπ_1=_________, p_1=___.

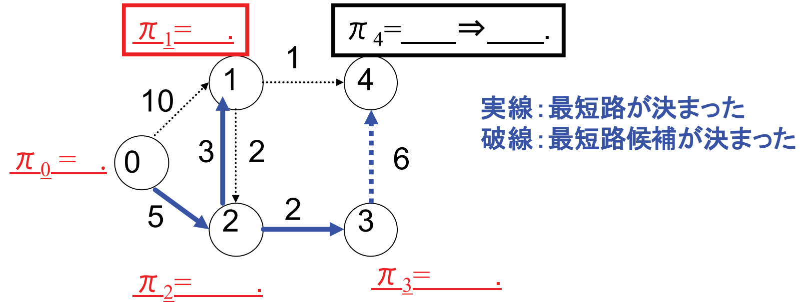
j=3についてはπ_3________なのでπ_3=_________, p_3=___.

j=4については、直接i=___と接続していないのでそのまま

(ii) $\min_{j\in M}\ \pi_j$=min {__________} = ____.

点k=___の最短路確定：___に到達する直前点が p_k =____ となる

(iii) k=___をMから削除し、i=___より再びステップ2を行う



ステップ2（3回目）: i=____ , M={______}

(i) M={_____}に到達する直前点を可能なら仮に i= ___とする

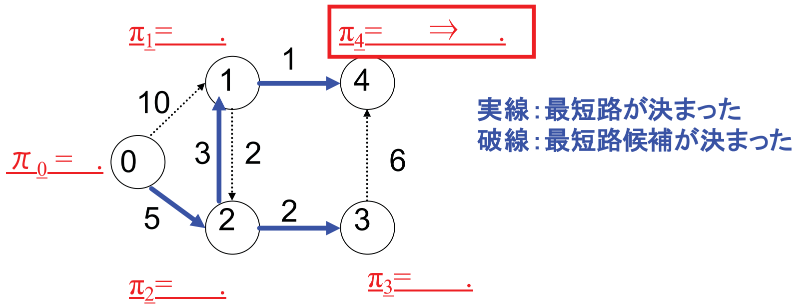
j=1については、直接i=___と接続していないのでそのまま

j=4についてはπ_4____________なのでπ_4=_________, p_4=___.

(ii) $\min_{j\in M}\ \pi_j$=min {_______} =____.

点k=__の最短路確定：__に到達する直前点が p_k =___となる

(iii) k=__をMから削除し、i=__より再びステップ2を行う



ステップ2（4回目）: i=___, M={___}

(i) M={____}に到達する直前点を可能なら仮に i=___とする

j=___についてはπ_4___________なのでπ_4=_________, p_4=___.

(ii) $\min_{j\in M}\ \pi_j$=min {___} =_____.

点k=___の最短路確定：____に到達する直前点がp_k =___となる

(iii) k=___ をMから削除するとMは空集合になるため、最短路が得られた

最短路問題での相補スラック定理

相補スラック定理： x,yが最適解⇔

$$y^T(Ax-b)=0\text{（明らか）},\ (y^TA-c^T)x=0$$

$(\pi 1-\pi 0-10)x01=0\ \Rightarrow$

$(\pi 2-\pi 0-5)x02=0\ \Rightarrow$

$(\pi 2-\pi 1-2)x12=0\ \Rightarrow$

$(\pi 1-\pi 2-3)x21=0\ \Rightarrow$

$(\pi 4-\pi 1-1)x14=0\ \Rightarrow$

$(\pi 3-\pi 2-2)x23=0\ \Rightarrow$

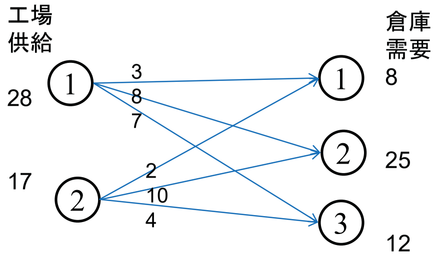
$(\pi 4-\pi 3-6)x34=0\ \Rightarrow$

最短路に含まれる辺(i,j)では　　　　　　　となり、

このとき　　　　　　となる。

例題2：輸送問題

- ある製品をm箇所の工場からn箇所の倉庫に最も安い費用で輸送する
- 各工場からの供給可能量：$S_i(i=1,\ldots,m)$
- 各倉庫の需要量：$D_j(j=1,\ldots,n)$
- 工場iから倉庫jへの製品1個あたりの輸送コストをc_{ij}
- 輸送費用を最小化する輸送量 x_{ij} $(i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n)$を求める



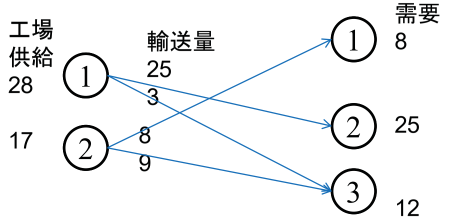
実行可能解設定（ハウザッカー法）輸送費の安い枝（工場→倉庫）から輸送

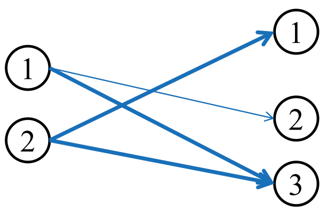
工場＼倉庫	倉庫1	倉庫2	倉庫3	供給量（未達成量）
工場1	3	8	7	28
工場2	2	10	4	17
需要量(未達成量）	8	25	12	

工場＼倉庫	倉庫1	倉庫2	倉庫3	供給量（未達成量）
工場1	3	8	7	28
工場2	2	10	4	17
需要量(未達成量）	8	25	12	

<u>輸送費用は　　　　　　　　　　　.</u>

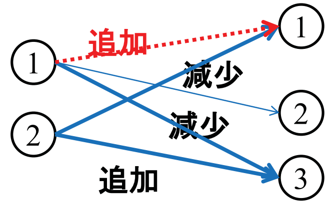
飛び石法による解の改善1



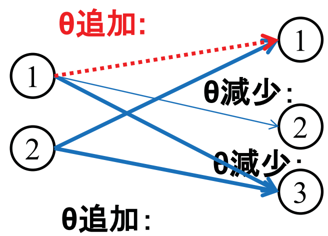


- ハウザッカー法で得られた解を改善
- 輸送量が0の枝(　　　)に注目
  (費用　　　で使われていない枝の中で最も安い)
- 輸送量は増加可能か？
- <u>輸送量が　　　の枝</u>を1つ選ぶと、輸送量が正の枝と閉路をなす
- 閉路(ループ)：ある点から同じ点に戻る輸送経路

飛び石法による解の改善2

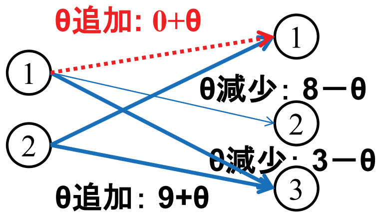


- θループとは何か？
- 輸送量の変動量をθとする
- <u>θループ</u>：閉路上では
  輸送量追加と減少の枝が交互に
- 各工場と倉庫には、輸送量追加と減少の枝が1本づつ接続
- 各工場と倉庫の需要と供給を満足



- 輸送量が0の枝に輸送量θ≧0を追加
- <u>θループ</u>：閉路上では
  輸送量θ追加とθ減少の枝が交互に
- 輸送費用の変動を計算
- <u>枝　　　　　に輸送量θを増加させると</u>
  <u>輸送費用は　　　　　減少する</u>

飛び石法による解の改善3



- 輸送量が0の枝に輸送量θ≧0を追加
- θループ: 閉路上では
  θ追加ーθ減少の枝が交互に

	倉庫1		倉庫2		倉庫3	
工場1	0+θ	3	25	8	3−θ	7
	増加				減少	
工場2	8−θ	2	0	10	9+θ	4
	減少				増加	

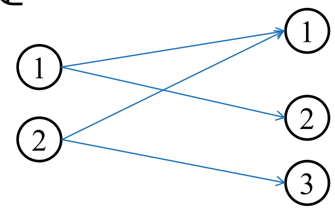
- 追加輸送量θ≧0は
  - ＿＿＿＿≧0
  - ＿＿＿＿≧0
  - ＿＿＿＿≧0
  - ＿＿＿＿≧0
  - を満たす最大のθ
- 輸送量θ=　を追加または減少
- 輸送費は　　減少 (273 ⇒　　　)

輸送費用は

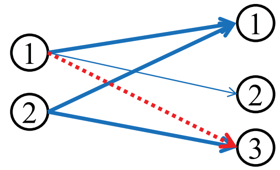
5

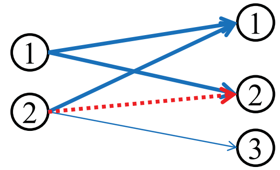
最適性の判定

	倉庫1		倉庫2		倉庫3	
工場1	3	3	25	8	0	7
	増加				減少	
工場2	5	2	0	10	12	4
	減少				増加	



- θループ:費用の改善度を計算⇒改善できない場合(最適解が得られた)
- 輸送量が0である残りの6−4本の枝に輸送量θを追加できるかチェック
- (1)経路13をθ増加
- (2)経路22をθ増加





6

線形計画問題として定式化

目的関数 $\min z = 3x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + 2x_{21} + 10x_{22} + 4x_{23}$

制約条件(1−1) $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 28$

制約条件(1−2) $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 17$

制約条件(2−1) $x_{11} + x_{21} = 8$

制約条件(2−2) $x_{12} + x_{22} = 25$

制約条件(2−3) $x_{13} + x_{23} = 12$

非負条件 $x_{ij} \ge 0, i = 1,2, j = 1,\dots,3$

この問題を基底形式に変形するため、目的関数から x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23} を消去し、制約条件(2-3)を取り除く。また、制約(1-1)から制約(2-2)を引き、制約(1-2)から制約(2-1)を引く。この操作により次の基底形式の線形計画問題が得られる。

7

基底変数	値	z	x11	x12	x13	x21	x22	x23	θ
z	273	1	2	0	0	0	-5	0	
x13	3	0	1	0	1	0	-1	0	3
x23	9	0	-1	0	0	0	1	1	
x21	8	0	1	0	0	1	0	0	8
x12	25	0	0	1	0	0	1	0	
基底変数	値	z	x11	x12	x13	x21	x22	x23	θ

8